

ASTRONOMY SEMINAR I
COSMOLOGY

93S2055 小松英一郎

February 14, 1996

目次

1	Relativity	2
1.1	Space	2
1.2	Special theory of relativity	3
1.3	General theory of relativity	3
1.4	Metric	4
1.5	Einstein equation	5
2	Cosmological Models	8
2.1	Cosmological principle	8
2.2	Robertson-Walker metric	8
2.3	Einstein static cosmological model	11
2.4	Friedmann cosmological model	13
2.4.1	Preparation	13
2.4.2	Friedmann model	14
2.5	Cosmic age	16
3	Early Universe	18
3.1	Big-Bang theory	18
3.1.1	宇宙創生最初の3分間(ただし1秒後から)	19
3.1.2	Big-Bang modelの問題点	20
3.1.3	Inflationary Universe	22
A	Einsteinの総和規約	23
B	Hubble's Law	25
B.1	Edwin Hubble	25
B.2	Homogeneous isotropic expansion	25
C	3K-Cosmic Background Radiation	27
C.1	宇宙は熱かった	27
C.2	Homogeneous isotropic Universe	28
D	Comoving Coordinate	29

Chapter 1

Relativity

『もし人が、光の波をうしろから光と同じ速度で追いかけたらどうなるか?』

16歳のEinstein少年がもった疑問は、やがて1905年の特殊相対性理論 (special relativity)、1916年の一般相対性理論 (general relativity) へと結実していった。

1.1 Space

ある空間 (space) を考えるとき、その空間の特徴をあらわす量のひとつに世界距離 (world distance) がある。

たとえば、3次元Euclid-space (Fig.1.1) では点 $P(\mathbf{r})$ と点 $P'(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ の世界距離 ds は、

$$(ds)^2 = (d\mathbf{r})^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (1.1)$$

であらわされる。いまこれを、

$$ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad [i, j = 1, 2, 3]^1 \quad (1.2)$$

とかき、

$$dx^1 \equiv dx, \quad dx^2 \equiv dy, \quad dx^3 \equiv dz \quad (1.3)$$

$$\gamma_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

とすれば、(1.1) と (1.2) は同等の式となる。このとき、 γ_{ij} を metric tensor とよび、その空間の性質をあらわす大切な量である。

では、同じようにして relativistic-space を考えよう。この場合、時間と空間がいつしよになった時空 (space-time) という概念を導入する。

慣性系² (inertial frame of reference) における時空の世界距離は、

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (1.5)$$

¹Einstein の総和規約 → Appendix A

²慣性の法則が成り立つ座標系のこと

であらわされる。ただし c は光速 (light-velocity) である。この場合もまた、

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad [\mu, \nu = 0, 1, 2, 3] \quad (1.6)$$

$$dx^0 \equiv c dt \quad (1.7)$$

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

と書くことができる。(1.5)において、2点間が同時刻 ($dt = 0$) ならば ds は実数 (real number) で空間の距離をあらわし、2点間が空間の同一点 ($dx = dy = dz = 0$) ならば ds は虚数 (imaginary number) で絶対値 (absolute value) は時間間隔をあらわしている。このような metric によってはられる空間を Minkowski world といい、 (x^0, x^1, x^2, x^3) ではられる座標を 4次元座標 (four-dimensional coordinates) と呼んでいる。

1.2 Special theory of relativity

special relativity は、次の 2つの原理にもとづいている。

(1) 特殊相対性原理 (principle of special relativity)

すべての物理法則は、いかなる慣性系を基準にとっても、まったく同じ形式で表現される。

(2) 光速度不変の原理 (principle of constancy of light velocity)

真空中の光の速さは、光源の運動状態に無関係である。

(1) を満たすためには、座標変換に対し、すべての物理法則が同じ形にかけなければならない³。そのためには物理法則が tensor の形にかけていれば都合がよい。

たとえば、ある物理法則が

$$T^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (1.9)$$

という形で書けるとすると、座標変換 $x \rightarrow x'$ に対しても

$$T^{\mu\nu'}(x') = \alpha_\lambda^\mu \alpha_\rho^\nu T^{\lambda\rho}(x) = 0 \quad (1.10)$$

となり、 x' の系でも

$$T^{\mu\nu'}(x') = 0 \quad (1.11)$$

というふうに、同じ形に書けることになる。

すなわち、すべての物理法則を 4次元 tensor で書きあらわすことによって (1) の原理を満たすことができるのである。

1.3 General theory of relativity

ところが、宇宙空間には重力が存在している。重力場においては時空が曲がっているために special relativity を適用することができない。なぜなら、special relativity は慣性系に対してのみ有効な理論だからである。

³この事を、座標変換に対し共変 (covariance) である、という。

そういうわけで、relativityに重力の影響を取り入れ、一般化しなければならない。その結果生まれた general relativity は、次の2つの原理にもとづいている。

(3) 一般相対性原理 (principle of general relativity)

すべての物理法則は、いかなる座標系を基準にとろうとも、まったく同じ形式で書きあらわせる。

(4) 等価原理 (principle of equivalence)

重力場内の任意の点を取り囲む無限小の4次元領域を考え、そこに特別な座標系を設けてこれを基準にとるとき、この無限小領域が無重力地帯となるようにすることが必ずできる。

(3) はあきらかに(1)の拡張である。これにしたがって方程式を general に書き換えなくてはならない。

(4) はややこしい表現ではあるが、要約すれば『重力場内でも局所的に慣性系とみなせる系が必ず存在する』、ということである。

たとえば、地球上の重力場内を自由落下しているエレベーターにのっている系は重力を感じず、慣性系となっている。ただし、それはあくまでエレベーター近傍での話である。

逆に言えば、(Fig.1.2)のような系では、箱の中に加速度が生じ、箱の中にいる人はあたかも重力が生じたかのように感じるであろう。

このように、等価原理は『局所的には加速度によって生じる慣性力と重力とは区別できない』、ということを主張しているのである。

1.4 Metric

いま、general relativity の場合の metric を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (1.12)$$

と書くことにする。ここで、 $g_{\mu\nu}$ が x に依存しているのは、時空の曲がり場所によって違うからである。

世界距離は系に依存しない scalar 量であるから、慣性系 (x') \rightarrow 一般座標系 (x) の変換に対しても不変である。これより、

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} dx^\lambda dx^\rho = g_{\lambda\rho} dx^\lambda dx^\rho \\ \therefore g_{\lambda\rho} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} \end{aligned} \quad (1.13)$$

である。

では実際に、これらを用いて慣性系における等速直線運動

$$\frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (1.14)$$

を一般座標に変換してみよう。

まず、

$$\frac{dx'^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (1.15)$$

であるから、

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} = 0 \quad (1.16)$$

$\partial x^{\sigma} / \partial x'^{\mu}$ をかけて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} &= 0 \\ \delta^{\sigma}_{\lambda} \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 x^{\sigma}}{d\tau^2} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

ここで、Christoffel の記号

$$\Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} \equiv \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \left(-\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial g_{\tau\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^{\lambda}} \right) \quad (1.18)$$

$$= \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} \quad (\because (1.13), g^{\sigma\tau} g_{\tau\mu} = \delta^{\sigma}_{\mu}) \quad (1.19)$$

を定義すれば、一般座標における (1.14) は

$$\frac{d^2 x^{\sigma}}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} = 0 \quad (1.20)$$

となる。

この式は『慣性系から見た等速直線運動 (1.14) は、一般座標系から見た場合重力の影響を受け、経路が曲げられる』、ということを示している。すなわち、重力の効果を表しているのが左辺第 2 項であり、Christoffel- $\Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}$ は重力そのものである。さらに、(1.18) を見ればわかるように、 $\Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}$ は metric- $g_{\lambda\rho}$ の x^{τ} 微分などの微分係数であるので、 $g_{\lambda\rho}$ を Einstein の重力ポテンシャル (Einstein's gravity potential) と呼んでいる。この解釈は、古典力学 (classical mechanics) における

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{d\Phi}{dx} \quad (1.21)$$

を思い浮かべてみれば明らかであろう。実際のところ、重力がなめらかで弱く、運動が高速より十分遅いときには (すなわち、classical mechanics で考えられるときには)、(1.20) は

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad [i = 1, 2, 3] \quad (1.22)$$

と等しいことが示される。これはまさしく Newton の運動方程式 (Newton's equation of motion) であり、この結果からも (1.20) の正当性が示されている。

1.5 Einstein equation

ではこれより実際に、重力場 (gravitational field) がどのように記述されるのか、見てみることにしよう。

Newton 力学 (Newtonian mechanics) における重力場の方程式 (equation of gravitational field) は、Poisson の方程式 (Poisson equation)

$$\Delta \Phi = 4\pi G\rho \quad (1.23)$$

で記述される。この equation は、density- ρ で分布している mass によって発生する gravitational field における gravity potential をあらわしている。よって、この式を一般相対論の形にしなくてはならない。導出過程は省略するが、一般相対論における equation of gravitational field は、かの有名な Einstein equation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.24)$$

である。また、

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

$$\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1.26)$$

と定義すれば、(1.24) は

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.27)$$

というように書き直せる。ここで $G_{\mu\nu}$ を Einstein tensor と呼ぶ。

この式を直感的に理解してみよう。 $R_{\mu\nu}$ は、Ricci tensor と呼ばれているもので、4次元時空の曲がりをおおむね Riemann の曲率 (curvature) tensor

$$R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} \equiv \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\beta\tau}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\tau} - \Gamma_{\nu\tau}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\tau} \quad (1.28)$$

を1回縮約 (contraction) したものであり、

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \quad (1.29)$$

である。

R は、 $R_{\mu\nu}$ をもう一度 contraction したものであり、Ricci scalar と呼ばれている。

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (1.30)$$

これらはすべて時空の曲がりぐあいをあらわす量であり、たとえばある領域において

$$R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = 0 \quad (1.31)$$

ならば、その領域は平坦 (flat) であり、時空は曲がっていない。すなわちここでの metric は $\eta_{\mu\nu}$ となり、空間は Minkowski world となる。これは、直感的に理解しやすいであろう。また、時間一定の3次元空間の物質分布が一様・等方的 (\rightarrow next chapter) であれば、3次元曲率は方向にも場所にもよらない constant になり、空間は球対称 (spherical) かつ定曲率 (constant curvature) である。このような場合を、next chapter 以降で取り扱う。

Λ は、宇宙定数 (cosmological constant) と呼ばれている量で、 $\Lambda g_{\mu\nu}$ は Einstein が『生涯最大のあやまちだった』として削除したという物語のため、後に有名になった宇宙項 (cosmological term) である。 Λ の見積もりは、およそ

$$\Lambda \approx 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$$

くらいであり、宇宙半径 (cosmic radius) はおおよそ $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ に等しい (\rightarrow next chapter)。

$T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソル (energy momentum tensor) とよばれているものであり、energy、momentum の density、flux をあらわしているものである。いいかえれば、媒質となる場

(field) の性質を定めている量である。Einstein equation のなかでは端的に言ってしまえば重力源 (gravity source) となっているものである。その成分は、

T_{00} … エネルギー密度 (energy density)

T_{0i} … エネルギー流束 (energy flux)

T_{i0} … 運動量密度 (momentum density)

T_{ij} … 運動量流束 (momentum flux)

となっている。まさに、field の energy、momentum そのものであることがわかる。

以上を総合して考えれば、Einstein equation は、『 $T_{\mu\nu}$ によって発生した gravitational field によって gravity potential- $g_{\mu\nu}$ が生じ、空間が $R_{\mu\nu}$ だけ曲げられる』状態を記述している、と解釈できる。この equation は非常に重要であり、これから、この equation をもとにして cosmological models を構築してゆく。

Chapter 2

Cosmological Models

2.1 Cosmological principle

宇宙空間は、局所的に見れば銀河 (galaxy)、銀河団 (cluster of galaxis)、超銀河団 (super cluster) など階層構造 (hierarchical structure) をとっている。各階層における密度は不均一であり、空間は非一様 (inhomogeneous) であるが、階層が step-up するごとに密度の不均一さは小さくなってゆく (table.2.1)。いいかえれば、さらに大きな scale で見た場合『宇宙は密度分布が一様 (homogeneous) であるとみなすことができる』、ということである。

さらに、この一様な密度分布は『観測者が宇宙のどこにいようと、どの方向を向こうと、まったく同じに見える』、すなわち『宇宙は等方 (isotropic) である』、とみなすことができる。

以上はあくまでも近似であり、実際の宇宙は非一様・非等方 (anisotropic) であるかもしれないが、Hubbleの法則 (Hubble's law → Appendix B) や 3 K宇宙背景輻射 (3K-cosmic background radiation → Appendix C) など、観測的にも一様等方として扱っていいことが今のところ示されている。そういうわけで今回の Report では宇宙はいたるところ homogeneous isotropic だとする『宇宙原理 (cosmological principle)』を採用することにする。

2.2 Robertson-Walker metric

空間の性質を決めているのは metric である、ということは以前ふれたが、general relativity における homogeneous isotropic space-time の metric は何であろうか。

まず始めに、空間のみについて距離 $d\sigma^2$ を求めてみよう。(Fig.2.1) のように空間の勝手な点 O をひとつとり、それを基準とした動径座標 r を、 O からの測地的距離¹ (geodesic distance) が一定の球面 S_r 上で一定値をとり、かつ S_r の表面積が $4\pi r^2$ となるようにとる。

次に、 O を center とした微小球面 S_ϵ を考える。空間は局所的に Euclid-space とできることを思い出せば、 S_ϵ を含む O の近傍 (厳密には $r \rightarrow 0$) で極座標をとって

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &\equiv dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad [\because d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \end{aligned} \quad (2.1)$$

を得る。

¹最短距離。Euclid-space や Minkowski-world では直線となるが、空間が曲がっていれば直線とは限らない。ちなみに、(1.20) は測地線の方程式である

次に、これを一様・等方の condition を用いて全空間に拡張する (Fig.2.2)。まず、 S_ε 上の θ, ϕ を、点 O を始点としてすべての球面 S_r に垂直な測地線にそって、 $\theta, \phi = \text{const.}$ という条件で全空間に広げる。

このとき、等方性より (θ, ϕ) と $(\theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi)$ の間の距離は、方向によらない (θ, ϕ 依存性がない) ので、その距離は $r^2 d\Omega^2$ であらわされる。同じく等方性より、 S_r と S_{r+dr} の間の球面に垂直な測地線にその距離も方向によらず、 r のみの function となるので、これを $f(r)dr$ とおく。

以上の考察より、点 O に関して等方的な condition のもとでの metric は

$$d\sigma^2 = f(r)^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.2)$$

とあらわせる。

次に一様性の condition を用いる。(2.2) の metric より、Ricci scalar を (1.28)~(1.30) により求めれば、すさまじい計算との戦いの末に

$$R = 4 \frac{f'}{rf^3} + 2 \frac{f^2 - 1}{r^2 f^2} \quad (2.3)$$

を得る。

一様性より、Ricci scalar は constant でなくてはならなかったので、

$$R = 6K \quad (2.4)$$

とおくことにする。なぜ 6 がつくかといえば、その方が equation が美しくまとまって気持ちいいからである。

以上より

$$4 \frac{f'}{rf^3} + 2 \frac{f^2 - 1}{r^2 f^2} = 6K \quad (2.5)$$

を、 $f(0) = 1$ の condition でとけば、

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.6)$$

と求まる。

これを (2.2) に代入すれば、一様等方な 3 次元空間における metric は

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.7)$$

と決定される。

この metric には、curvature の term- K が含まれていることに注目すべきである。これはつまり、homogeneous isotropic space における constant curvature のふるまいにより、その空間の性質が完全に決まってしまうことを意味している。以下で、具体的に見てみよう。

(1) case of $K = 0$

(2.7) は

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.8)$$

となる。

直交座標系に直せば、

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.9)$$

となり、これはよくみなれた『flat』な Euclid-space である。

(2) case of $K > 0$

$1 - Kr^2 > 0$ より、 $|\sqrt{K}r| < 1$ であるから、

$$\sin \chi = \sqrt{K}r \quad (2.10)$$

$$\leftrightarrow \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \cos \chi d\chi &= \sqrt{K} dr \\ dr &= \frac{\cos \chi}{\sqrt{K}} d\chi \end{aligned} \quad (2.12)$$

という χ を定義して (2.7) に代入すれば、

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) \quad (2.13)$$

を得る。

こまかい式をここで羅列することは避けるが、この式は radius- $K^{-\frac{1}{2}}$ の 3 次元球面となっている (3 次元『球体』ではなく、『球面』である。お間違えなく!)。すなわち空間は有限の volume を持ち、一般に『closed space』と呼ばれている。

(3) case of $K < 0$

(2) の場合と似ているが、

$$\sinh \chi = \sqrt{|K|}r \quad (2.14)$$

とおけば、(2.7) より

$$d\sigma^2 = \frac{1}{|K|} (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2) \quad (2.15)$$

を得る。

この式は、3 次元双曲型曲面であり、空間は ∞ の volume をもつため『open space』と呼ばれている。

空間的なふるまいがわかったところで、いよいよこの metric を 4 次元時空へ拡張しよう。

まず、 $d\sigma^2$ に時間の次元を導入しなければならない。Hubble's law によれば、宇宙は homogeneous isotropic expansion をしているので、いま共動座標 (comoving coordinate \rightarrow Appendix D) をとれば、 $t = t_0$ で $d\sigma(t_0)$ であった distance は t とともに $a(t)d\sigma(t_0)$ のようにひきのばされることになる。すなわち、空間をあらわす metric は

$$d\sigma^2(t) = a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.16)$$

と書きなおされる。ここで、 $a(t)$ は空間の size の時間依存性をあらわす量であり、scale factor と呼ばれている。

最後に時間座標を導入してやれば、metric は

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.17)$$

と決定される。この metric を Robertson-Walker metric と呼び、homogeneous isotropic space-time を表現する基本的な metric である。

2.3 Einstein static cosmological model

Einsteinは1916年に general relativity を完成させたが、その翌年の1917年にこの theory を宇宙にあてはめようとした。当時は Hubble's law もまだ発見されておらず、『宇宙は静的 (static) である』という考え方が支配的であった。Einstein も例にもれず、Einstein equation (1.27) から static model を導こうと試みたわけである。

しかし、まだ equation に cosmological term を挿入する前、彼はこの equation

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

には static model の解がないことに気がついた。これをそのままあてはめたのでは、宇宙は自らの重力によりつぶれてしまうのである。

そこで Einstein は思い悩んだ末、equation の中に重力に対抗する term として $\Lambda g_{\mu\nu}$ を挿入し、static model を導き出したのである。それでは、その Einstein static cosmological model を見てみよう。

Einstein equation を解くために、まず field- $T_{\mu\nu}$ を与えてやらなければならない。宇宙を記述するときには、多くの場合 galaxy などを巨視的視点からみて、宇宙は完全流体² (perfect fluid) だとみなし、perfect fluid の $T_{\mu\nu}$ を用いる。

$$(T_{\mu\nu})_{\text{perfect fluid}} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

ここで、

$$u_\mu = g_{\mu\tau} u^\tau \quad (2.20)$$

であり、 u^μ は4元速度 (four-velocity) である。いまは comoving coordinate をとっているのので、fluid は空間的に静止しており velocity の空間成分は 0 なので、

$$\begin{aligned} u^\mu &= (1, 0, 0, 0) \\ \therefore u_\mu &= (-1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} T_{00} = (\rho c^2 + p)u_0 u_0 + pg_{00} = \rho c^2 + p - p = \rho c^2 \\ T_{11} = pg_{11} \\ T_{22} = pg_{22} \\ T_{33} = pg_{33} \end{cases} \quad (2.21)$$

計算を簡単にするため、添字を操作して

$$\begin{cases} T^0_0 = g^{0\tau} T_{\tau 0} = -\rho c^2 \\ T^1_1 = g^{1\tau} T_{\tau 1} = pg^{1\tau} g_{\tau 1} = p\delta^1_1 = p \\ T^2_2 = p \\ T^3_3 = p \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\therefore T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

²粘性・熱伝導が全くない fluid のことである。

となる。

次に、curvatureを求める。涙を流しながら計算すると、Ricci tensorは

$$\dot{R}^0_0 = \frac{3\ddot{a}}{a} \quad (2.24)$$

$$R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2K}{a^2} \quad (2.25)$$

ここで、 $\dot{a} \equiv da/dx^0 = da/cdt$ である。

Ricci scalarは

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \quad (2.26)$$

となる。

では、Einstein equationも添字を操作しておこう。Einstein tensorを用いた式(1.27)をかきかえれば、

$$\begin{aligned} g^{\mu\tau} G_{\tau\nu} + \Lambda g^{\mu\tau} g_{\tau\nu} &= \kappa g^{\mu\tau} T_{\tau\nu} \\ G^\mu_\nu + \Lambda \delta^\mu_\nu &= \kappa T^\mu_\nu \end{aligned} \quad (2.27)$$

ここでEinstein tensorは、

$$G^0_0 = R^0_0 - \frac{1}{2}R = -3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \quad (2.28)$$

$$G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = R^1_1 - \frac{1}{2}R = - \left[\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \quad (2.29)$$

であるから結局(2.27)は0成分と*i*成分に分解できて、

$$-3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] + \Lambda = -\kappa \rho c^2 \quad (2.30)$$

$$- \left[\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] + \Lambda = \kappa p \quad (2.31)$$

を得る。この2式は、一様等方という条件もとで Einstein equationと同等の式である。

現在の宇宙では、物質粒子の平均速度がlight-velocityより十分遅く、輻射温度(radiation temperature)も低いので $p \ll \rho c^2$ としてよい。Einsteinの仮定

(a) 宇宙はclosed-space($K > 0$)でなければならない。

(b) 宇宙はstatic-space($\dot{a} = \ddot{a} = 0$)でなければならない。

を用いて(2.30)(2.31)を書き直せば、

$$-3 \frac{K}{a^2} + \Lambda = -\kappa \rho c^2 \quad (2.32)$$

$$-\frac{K}{a^2} + \Lambda = 0 \quad (2.33)$$

これらより、

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{K}{a^2} = \frac{\kappa \rho c^2}{2} \\ &= \frac{4\pi G \rho}{c^2} \quad \left[\because \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

を得る。これが Einstein の静的宇宙モデル (Einstein static cosmological model) である。

これに、宇宙の density として例えば $\rho \sim 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$ をいれれば

- scale factor
 $a \sim 10^{28} \text{ cm} \sim 10^{10} \text{ 光年}$
- cosmological constant
 $\Lambda \sim 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$

と求められる。

この Einstein static model が提唱されたのと同じ 1917 年、de Sitter により $\Lambda \neq 0$ での真空 (物質が存在しない) の static model が発見され、さらに同じ条件の下で膨張解が導かれた。この de Sitter の解は時代をこえてさまざまな注目を浴びたが、ここではこのくらいにしておく。

2.4 Friedmann cosmological model

1922 年、Friedmann は Einstein equation を修正なし ($\Lambda = 0$) で解き、膨張宇宙 (expanding Universe) の解を発見した。Einstein は、当初これに強く反発したが、1929 年の Hubble's law の発見により宇宙膨張の観測的証拠をつきつけられ、static model を捨てざるをえなかった。これが先ほどの cosmological term にまつわる話である。それでは、その Friedmann model を見てみることにしよう。

2.4.1 Preparation

実際に解を導く前に、少し準備をしておこう。Einstein equation のほかに、基本となる equation を 2 つ用意することにする。

Einstein equation と同等の式 (2.30)(2.31) において、まず (2.30) の両辺を x^0 で微分すれば、

$$3 \left(\frac{2\ddot{a}}{a} \right) = \kappa c^2 \left[\dot{\rho} \left(\frac{a}{\dot{a}} \right) + 2\rho \right] + 2\Lambda \quad (2.35)$$

これと (2.31) から

$$\frac{2\ddot{a}}{a} = \kappa c^2 \left[\dot{\rho} \left(\frac{a}{\dot{a}} \right) + 2\rho + \frac{2p}{c^2} \right] + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2K}{a^2} \quad (2.36)$$

次に (2.30)(2.31) より、

$$\frac{2\ddot{a}}{a} = -\kappa c^2 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2K}{a^2} \quad (2.37)$$

よって、これらの 2 式 (2.36)(2.37) より最終的に

$$\dot{\rho} = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (2.38)$$

を得る。これは、物理的には局所的なエネルギー保存 (energy conservation) をあらわす式である。もし君が共変微分 (covariance derivative) を知っているなら、(2.38) が energy momentum tensor における energy conservation の式

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0 \quad (2.39)$$

から導かれることを、勝手に確かめてください。

とにかく、最後に3つめの equation として物質の状態方程式 (equation of state)

$$p = \gamma \rho c^2 \quad (2.40)$$

を加えれば、基本方程式として次の3式

$$\kappa \rho c^2 = 3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] - \Lambda \quad (2.30)$$

$$\dot{\rho} = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (2.38)$$

$$p = \gamma \rho c^2 \quad (2.40)$$

が準備される。これでOK。これら3式によって、宇宙の時間発展は完全に記述することができる!! この3本の式を扱うため、1本にまとめてみよう。(2.40)を(2.38)に代入すれば、

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \gamma) \frac{\dot{a}}{a}$$

これをとけば、

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\gamma)} \quad (2.41)$$

ここで、 $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$, $a_0 \equiv a(t_0)$ である (t_0 は現在の時刻)。これより、宇宙が膨張すれば ρ は減少し、収縮すれば ρ は増加する様子が分かるだろう。

さらに、(2.41)を(2.30)に代入すれば、

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \kappa \rho_0 c^2 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\gamma)} = \Lambda - \frac{3K}{a^2} \quad (2.42)$$

を得る。これからやっつと、Friedmann modelを導くことができる。(やれやれ)

2.4.2 Friedmann model

さっきも言ったが、Friedmann modelは膨張宇宙である。Big-Bang theory(→next chapter)が正しければ、時間をさかのぼるにつれ宇宙はどんどん小さくなり、早期宇宙 (early Universe) では輻射密度 (radiation pressure) が優勢となるような high density、high temperature の世界が実現していたと考えられる。そのためFriedmann modelにおいては、

(a) 現在のような物質優勢期 (matter-dominant stage)

$$\gamma = 0 \longrightarrow p = 0 \quad [\because (2.40)]$$

(b) early Universe のような輻射優勢期 (radiation-dominant stage)

$$\gamma = \frac{1}{3} \longrightarrow p = \frac{1}{3} \rho c^2 \quad [\because (2.40)]$$

の2つの時代に分けて考えなくてはならない。

(a) matter-dominant stage ($\gamma = 0$)

(2.42) を $\Lambda = 0$ として変形すれば、

$$\frac{\frac{4}{3}\pi a_0^3 G \rho_0}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{Kc^2}{2} \quad [a \geq a_0] \quad (2.43)$$

ここで、左辺第1項は gravity potential ($\equiv E_G$)、第2項は運動エネルギー (kinetic energy $\equiv E_K$) であるから、

$$E_G - E_K = \frac{Kc^2}{2} \quad (2.44)$$

と書き直せる。すなわち、一様等方宇宙の力学的ふるまいは、 K の符号に完全に支配されているのである。

(1) case of $K = 0$ (flat)

$$E_G = E_K \quad (2.45)$$

であり、 $a \rightarrow \infty$ で $E_K \rightarrow \infty$ となるような膨張をし続ける。

この解は、

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.46)$$

$$\rho_0 = \frac{1}{6\pi G t_0^2} \quad (2.47)$$

である。この model は一般に、Einstein-de Sitter model と呼ばれている。

(2) case of $K > 0$ (close)

$$E_G > E_K \quad (2.48)$$

であり、宇宙は膨張するものの、ある a まで膨らむととたんに収縮へ転ずることになる。

(3) case of $K < 0$ (open)

$$E_G < E_K \quad (2.49)$$

であり、宇宙は永遠に膨張し続ける。

(2)(3) の場合を厳密に解くのはいささか大変である。そのため、ここでは簡単に定性的ふるまいを見ておくにとどめるが、まあこれで十分である。これらのふるまいを図に plot すれば、(Fig. 2.3) のようになる。

ここで、(2)(3) の境界である (1) の ρ_0 を、臨界密度 (critical density) と呼び、 ρ_c と書く。よく話題にされることだが、宇宙の密度が $\rho_0 > \rho_c$ なら宇宙は close であり、 $\rho_0 < \rho_c$ であれば宇宙は open である。これは、今までの議論によりたやすく理解できるであろう。

(b) radiation-dominant stage ($\gamma = 1/3$)

(2.42) は、 $t = t_1$ として

$$\frac{a_1}{a} E_G - E_K = \frac{Kc^2}{2} \quad [a \geq a_1] \quad (2.50)$$

と書き直せる。すなわち、radiation pressureが gravity potentialに対抗する力となって生じているため、potentialは弱められているのである。

(1) case of $K = 0$ (flat)

(2.50) の厳密解は、

$$a = a_1 \left(\frac{t}{t_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.51)$$

$$\rho_1 = \frac{3}{32\pi G t_1^2} \quad (2.52)$$

である。基本的に (a) と同じであるが、 $\gamma = 0$ のときに比べ速く膨張しているのがわかるだろう。

(2) case of $K \neq 0$ (close or open)

この場合も (a) と同じようなふるまいを見せるが (Fig.2.4)、radiative な宇宙の違うところは、 t が小さくなるにつれ $K = 0, K > 0, K < 0$ がすべて同じようにふるまうことである。すなわち、radiative な early Universe では curvature があまり関係ない、ということになる。

2.5 Cosmic age

cosmology における大きな問題として、宇宙年齢 (cosmic age) の算定があげられるだろう。そこでここでは、Friedmann model を用いて cosmic age を測ってみることにする。ただし、観測により現在の宇宙は空間的に十分平坦であることがわかっているので、 $t = t_0$ (現在の時間) において $K \sim 0$ として計算する。

cosmic age の算定法としてもっとも有名で理解しやすいものは、Hubble constant を用いた算定法だと思うので、それをとりあげてみよう。まず、(B.1) を書きかえれば

$$\frac{dr}{dt} = H_0 r \quad (2.53)$$

この式を scale factor を用いて書きなおし、 $t = t_0$ とすれば

$$\left(\frac{da}{dt} \right)_{t=t_0} = H_0 a_0 \quad (2.54)$$

$$\longleftrightarrow \quad (2.55)$$

$$H_0 = \frac{1}{a_0} \left(c \frac{da}{cdt} \right)_{t=t_0} = \frac{1}{a_0} c (\dot{a})_{t=t_0} = c \left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)_{t=t_0} \quad (2.56)$$

と書ける。

matter-dominant stage では、(2.46) より

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.57)$$

$$c \frac{\dot{a}}{a_0} = t_0^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} \right) \quad [\because \text{両辺を } t \text{ で微分}] \quad (2.58)$$

$$H_0 = \frac{2}{3} t_0^{-1} \quad [\because t = t_0] \quad (2.59)$$

$$\therefore t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \quad (2.60)$$

radiation-dominant stage では、 $t = t_1$ (radiative なある時期)として(2.51)を同様に計算し、

$$t_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{H_1} \quad (2.61)$$

となる。

Hubble constant がわかれば、このようにして cosmic age を算定することができるが、最近の値

$$H_0 = 80 \pm 17 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

を用いて計算すると、

$$t_0 = 6.8 \times 10^9 \sim 1.1 \times 10^{10} \text{ yr} = 68 \text{ 億年} \sim 110 \text{ 億年}$$

くらいになってしまい(Fig.2.5)、Our Galaxyにある最も古い球状星団(globular cluster)の年齢(150億~160億年)よりも短くなってしまふ。globular clusterの年齢は、恒星の内部構造進化の理論をもとに算定されており、かなり信頼のおける数値である。したがって、いま算出した cosmic ageの値は小さ過ぎる、ということになってしまう。実はこれが現在の cosmologyにおけるおおきな問題であり、まだ解答は出ていない。この辺の議論を簡単に知りたい人は、Newtonの1995.11/12号を見てもらうとよいと思う。ここではこれ以上はふれない。

Chapter 3

Early Universe

3.1 Big-Bang theory

『宇宙が膨張しているのなら、時間をさかのぼればどうなるのだろう？』

ロシア生まれのアメリカ人George Gamowは、1948年に『宇宙は過去へさかのぼればさかのぼるほど物質密度は上昇し、それにともなって輻射密度はより大きく、温度も高くなる。そして最終的に限りなく高温、高圧、高密度な時期を迎え、宇宙はその火の玉「Big-Bang¹」から始まった』という描像に達した。そのtheoryでGamowは現在存在している元素(element)の起源も説明しようと試みた。

しかし、まったく同じ1948年、Bondi,Gold,Hoyleらは『宇宙は過去も未来も大局的な姿は変わらず、densityは不変である』とする、定常宇宙論(stedy-state cosmology)を発表、この2つのtheoryは真っ向から対立し、それから10年以上にわたって激しい論争を繰り広げることとなった。

この戦いに決定的な審判を下したのが、1965年の3K-cosmic background radiationの発見である。これによって宇宙にはかつて高温、高圧の『熱い時代』があったことが観測的に示されることとなり、Big-Bangが勝利を収めたのである。

そういうわけでBig-Bang theoryは、現在おそらくもっとも受け入れられているものであるが、実はこのmodelを支えている観測的事実(大発見?!)は3つあり、

- (1) Hubble's law
- (2) 3K-cosmic background radiation
- (3) 元素の存在量(element abundance)

である。Big-Bang modelは、これらの観測事実をすべて統一的に説明できる点で非常に説得力があり、現在の地位を築いているのである。(1)(2)はそれぞれAppendix B,Cにゆずるとして、ここでは(3)についてみてみよう。

GamowはBig-Bang modelを用いて元素の起源を解き明かそうと試みた。それは水素(hydrogen)からウラン(uranium)までを宇宙誕生から20分くらいでつくってしまうという、壮大なものであった。

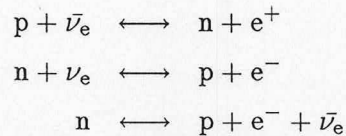
¹ 「Big-Bang」という言葉の由来は、実はライバルである定常宇宙論者のFred HoyleがGamowを皮肉って批判したときに初めて使ったことによっている。

3.1.1 宇宙創生最初の3分間(ただし1秒後から)

宇宙が生まれてから $t = 1$ 秒~3分の間はヘリウム (helium) 形成の時代であった。宇宙の温度ごとに見てみよう。

(1) $10^{10} \text{K} < T$

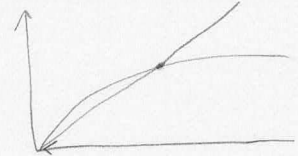
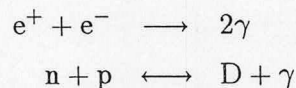
この時期に存在しているのは、 e^- , e^+ , ν_e , $\bar{\nu}_e$, γ , p , n であった。この高温期では、弱い相互作用 (weak interaction) しかおこなわない ν_e も頻繁に反応し、



が実現しており、 n と p は互いに激しく交換し合っている。

(2) $10^9 \text{K} < T < 10^{10} \text{K}$

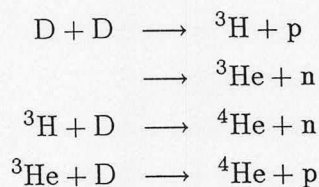
宇宙の温度が下がるとともに、反応時間は T^{-4} に比例して長くなってゆくが宇宙の年齢は T^{-2} に比例している。すなわち、ある時間(温度)を境にして反応時間が宇宙年齢よりも長くなってしまふ、ということである。当然のことながらこうなってしまうともはや反応はほとんど起こらなくなってしまう²。 ν_e が凍結するのは $T \sim 10^{10} \text{K}$ であるから、この時期には ν_e の関与した反応は起こらず、



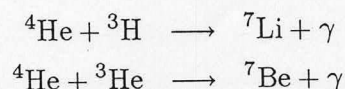
という反応が起こる。2つめの反応の逆反応は、この温度では D の n と p の結合が緩く、 γ によって簡単に壊されてしまうことによる。

(3) $T < 10^9 \text{K}$

ここまで温度が下がると、突然劇的な反応が起こる。温度の低下により比較的安定になった D が次々に反応してゆき、あっという間に ${}^4\text{He}$ をつくってしまうのである。

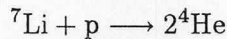


これにくわえ、

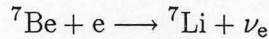


²この事を反応の凍結、という。

のように重い元素もつくられるが (Fig.3.1)、 ${}^7\text{Li}$ は



という反応がとて大きな反応率を持つために、最終的に0.001%以下しか残らない。さらに、 ${}^7\text{Be}$ は不安定であり、すぐに



という反応を起こして ${}^7\text{Li}$ になってしまう。

すなわち、early Universeでは ${}^4\text{He}$ より重い元素は生成できないのである (Fig.3.2)。この時点でGamowのもくろみは灰になってしまったわけであるが、このtheoryが予言するこの時点でのelement abundanceは、H 74%、He 26%であり、現在の観測値 H 75%、He 23% とほぼ一致している。これにより、Big-Bang theoryの正当性はさらにウラづけられることとなった。

ところで、いまBig-Bang theoryによってH 74%、He 26%が予言される、といったが、これにはある条件が必要である。宇宙において元素が生成されるためには、当然のことながら材料が必要であるが、その材料の量をあらわすparameterとして

$$\eta \equiv \frac{\text{バリオン (baryon) 数密度 } (N_B)}{\text{光子 (photon) 数密度 } (N_\gamma)}$$

が定義できる。これは不変量であるので、扱いやすい。先ほどの予言値をはじきだすためには、

$$\eta \sim 2.5 \times 10^{-10}$$

となる必要がある。この値を条件とすれば、各種元素の存在量を同時に説明できるわけである (Fig.3.3)。

3.1.2 Big-Bang modelの問題点

このように、多くの観測事実を統一的に説明できるBig-Bang modelは非常に優れた信頼性の高いmodelであるといえるが、それでもいくつかの問題点は存在する。

(1) horizon problem

2点A, Bを考える。Aで起こった出来事をBへ伝達する手段の中で最速なのはlightを使うことであるが、いいかえると『情報の伝達はlight velocityをこえて行われることはない』ということである。ここで、ある時間 t までにlightが進めた距離、すなわち因果関係を結べた領域をその時刻 t での地平線 (horizon) という。

これを3K-radiationにあてはめて考えてみよう。3K-radiationの源となったのは宇宙の晴れ上がりであるから、

$$t \sim 10^6 \text{ yr}$$

のころである。その時までに因果関係を結べた領域は

$$l_1 = ct \sim 10^6 \text{ 光年} \sim 0.3 \text{ Mpc}$$

である。この領域は、その後の宇宙膨張により現在までに1000倍になっているので

$$l_0 = 1000l_1 \sim 300 \text{ Mpc}$$

$T \propto a(t)$ は反比例

となり、例えば『一様等方』という情報を伝達できたのは現在での半径 300Mpc の領域のみということになる。

しかし、現在 3K-radiation の観測は少なくとも 4000Mpc の scale で一様等方であり、晴れ上がりころの horizon を完全にこえてしまっている。このような因果律との矛盾が地平線問題 (horizon problem) である。

(2) Flatness problem

宇宙の密度を議論するために、密度パラメータ (density parameter) Ω を導入しよう。

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad [\rho_c = \text{critical density}] \quad (3.1)$$

これは、空間が open なのか close なのか、それとも flat なのかを与える parameter であり、

- $\Omega > 1 \cdots$ close
- $\Omega = 1 \cdots$ flat
- $\Omega < 1 \cdots$ open

である。

さて、現在の宇宙は観測によりほぼ平坦であることが知られているので、現在の Ω を

$$\Omega_0 = 1 + d\Omega \quad (3.2)$$

と書くことにする。ところが、この flat からのズレ $d\Omega$ は

$$d\Omega \propto a^2 \propto T^{-2} \quad (3.3)$$

というふうに、宇宙膨張とともにどんどん大きくなっていってしまう。すなわち、現在ほぼ flat であるので $d\Omega \ll 1$ だが、さらに early Universe では、ほぼ $d\Omega = 0$ でなくてはならないことになる。

事実、定量的に見てみれば、宇宙の晴れ上がりころ ($k_B T \sim 0.1\text{eV}$) $d\Omega \sim 10^{-4}$ であったとすれば、宇宙を classical に扱える限界の plank 時間 (plank time)

$$t_p = \left(\frac{Gh}{2\pi c^5} \right)^{\frac{1}{2}} = 5.4 \times 10^{-44}$$

では $k_B T = 10^{19}\text{GeV} = 10^{28}\text{eV}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_p}{d\Omega_1} &= \left(\frac{10^{28}}{0.1} \right)^{-2} = 10^{-58} \\ \therefore d\Omega_p &= 10^{-62} \end{aligned}$$

となり、なんと 62桁の精度で flat でなくてはならないことになってしまう。もしこの値を少しでもこえていたならば、宇宙はとっくにつぶれていた ($\Omega \gg 1$) か、空っぽ ($\Omega \ll 1$) になっていたであろう。このような非常に制約された初期値でのみ現在の宇宙が存在しうる、という問題が平坦性問題 (flatness problem) である。

これら 2つの問題を解く鍵は、一体なんであろうか。さらに early な Universe で何かあったのではないか？

3.1.3 Inflationary Universe

1980年、アメリカのGuthは、Big-Bang以前の宇宙でインフレーション(inflation)という指数関数的な急激な膨張があれば、horizon、flatness problemが解決されることを示した³。

(1)horizon problem

過去に宇宙が指数関数的膨張を遂げたとする、ある時刻に因果関係を持っていた領域は、膨張後に広大な領域になっており、その大きさは現在の地平線を超えている(Fig.3.4)。すなわち、今現在見えるようになってきた遠くの領域も過去に因果関係を持った領域であるので、みな一様に観測されるのである。

(2)flatness problem

もし、宇宙初期のcurvatureが $k \neq 0$ であっても、急激な膨張により空間は平らに引き伸ばされてしまってほぼflatに近くなってしまう。これは、地球という球体上にいるわれわれが、周りを見渡してまったいらだと思うのと同じ事である。

おわりに

1980年以降、さまざまなinflationary modelが提唱されてきてはいるものの、それらはやはりなにかしら問題を抱えており、まだはっきりとした描像には達していない。しかし、上記2つの問題やmonopole problemなどを実にあっさり解決してしまうところには非常に魅力がある。この分野がcosmologyのこれからの重要な課題であることだけは確かだ。また、それとともにmicroな分野の大統一理論、量子力学などとの融合も真剣に取り組まれている。とくに大統一理論とのかねあいによってinflationary modelが誕生、発展しているのは注目し値するが、あまりにも複雑で僕にはわけがわからないので、もうここでやめることにする。ご静聴ありがとうございました。

³もっとも早くinflationary modelを提唱したのは、東京大学の佐藤勝彦教授であったが、彼は主としてモノポール(monopole)問題の解決のためにこのmodelを導入した。

Appendix A

Einstein の総和規約

これからの計算の準備として、『Einstein の総和規約』という規則を定義しよう。これは、『上つきと下つきの対として同じ文字が出てきたときには、それについて総和をとる』という規則である。何のことだかわからないと思うので、具体的に見てみよう。

$$\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3) \quad (\text{A.1})$$

は、unit vector = (e_1, e_2, e_3) を用いてあらわせば、

$$\mathbf{a} = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 \quad (\text{A.2})$$

と書ける。(なぜ上つきと下つきに分けたかは、ここではあまり気にしないでほしい。) これは別の表記で書くと、

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i e_i \quad (\text{A.3})$$

であるが、この \sum 記号を取っ払って、

$$\mathbf{a} = a^i e_i \quad (\text{A.4})$$

と書くことにする。これが Einstein の総和規約である。たとえばこれが、 $a^i e_j$ なら和はとらない。では、(1.2) を見てみよう。

$$ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{1.2})$$

これを書き下せば、

$$\begin{aligned} ds^2 &= \gamma_{11} dx^1 dx^1 + \gamma_{12} dx^1 dx^2 + \gamma_{13} dx^1 dx^3 \\ &+ \gamma_{21} dx^2 dx^1 + \gamma_{22} dx^2 dx^2 + \gamma_{23} dx^2 dx^3 \\ &+ \gamma_{31} dx^3 dx^1 + \gamma_{32} dx^3 dx^2 + \gamma_{33} dx^3 dx^3 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる。そろそろわかってもらえただろうか。

そこでもう一つ、『添字が i, j などのアルファベットなら、それに対応する数は 1, 2, 3 とし、添字が μ, ν などのギリシャ文字なら、対応する数は 0, 1, 2, 3 とする』という規則を加えよう。これを用いれば、

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned} &= \gamma_{00} dx^0 dx^0 + \gamma_{01} dx^0 dx^1 + \gamma_{02} dx^0 dx^2 + \gamma_{03} dx^0 dx^3 \\ &+ \gamma_{10} dx^1 dx^0 + \gamma_{11} dx^1 dx^1 + \gamma_{12} dx^1 dx^2 + \gamma_{13} dx^1 dx^3 \\ &+ \gamma_{20} dx^2 dx^0 + \gamma_{21} dx^2 dx^1 + \gamma_{22} dx^2 dx^2 + \gamma_{23} dx^2 dx^3 \\ &+ \gamma_{30} dx^3 dx^0 + \gamma_{31} dx^3 dx^1 + \gamma_{32} dx^3 dx^2 + \gamma_{33} dx^3 dx^3 \end{aligned} \tag{A.7}$$

となることは自明である。これだけやれば、わかってもらえるであろう。

Appendix B

Hubble's Law

B.1 Edwin Hubble

1912年～1925年にかけて、Slipherは41個の galaxies からの光が Red shift していることを発見した。これを Doppler shift によるものだと考えれば、これらの galaxies がわれわれから遠ざかる運動をしている、ということになる。

この発見に刺激された Edwin Hubble は、1929年に galaxy の後退速度 v (velocity of recession) と距離 r (distance) に関する研究から、有名な Hubble's law

$$v = H_0 r \tag{B.1}$$

を発見した (Fig.B.1)。ここで、 H_0 は Hubble constant である。

しかし、この時 Hubble は

$$H_0 \approx 550 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

という、今から考えればとんでもない値を見積もっていた。

これは、当時 Hubble が galaxy の中にある HII-region を star と勘違いし、galaxy までの距離を低く評価してしまったことと、galaxy までの距離の測定に用いられる Cepheid 型変光星が実は2種類あったことを知らずに r を測定してしまったために、さらに低く見積もってしまったことに起因している。

現在も、Hubble's constant については議論が絶えないが、最近では Hubble space-telescope によるおとめ座銀河団内の M100 にある Cepheid の観測から

$$H_0 = 80 \pm 17 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

という値が発表されている。

B.2 Homogeneous isotropic expansion

では、Hubble's law はどのように解釈できるのだろうか。

これは、Hubble 自身も指摘しているように、宇宙空間そのものが膨張 (expansion) している、と考えれば自然な説明ができる。さらにいえば、この法則には $v \propto r$ という関係があるので、空間は場所によらず一様に膨張している、ということが出来る (Fig.B.2)。

では、次に幾何的に考えてみよう (Fig.B.3)。

$$v_A = H_0 r_A \quad (\text{B.2})$$

$$v_B = H_0 r_B \quad (\text{B.3})$$

において、

$$dv = v_A - v_B \quad (\text{B.4})$$

$$dr = r_A - r_B \quad (\text{B.5})$$

とすれば、(B.2)(B.3)より

$$v_A - v_B = H_0(r_A - r_B) \quad (\text{B.6})$$

$$\therefore dv = H_0 dr \quad (\text{B.7})$$

である。よって、任意の2点間においてもやはり Hubble's law がなりたっており、これより空間は場所にも方向にもよらず一様等方に膨張していることが示される。

Appendix C

3K-Cosmic Background Radiation

1965年、自分のアンテナがどのくらいnoiseを含むかを調べようとしたPenziasとWilsonは、アンテナをいろいろな方向に向け、波長7.35cmの電波を測定していた。しかし、得られたnoiseは予想値をはるかに超えたものであった。さらにこのnoiseは、あらゆる方向から同じ強さで時間変動もなくやってきていた。しかも不思議なことに、いろいろな波長で調べた結果電波の強度(intensity)の分布は $T \simeq 3$ のPlank分布(Plank distribution)

$$F_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \quad (\text{C.1})$$

に非常に近いものであった。

これらのことより、このnoiseは宇宙に固有のものである、と結論され、3 K宇宙背景輻射(3K-cosmic background radiation)と名づけられた。この発見はHubble's lawに続く大発見といわれているが、なぜそう呼ばれるのか、これから簡単に見てみよう。

C.1 宇宙は熱かった

このように等方的にPlank-distribution- F_ν が観測されるためには、宇宙全体が黒体輻射(black body radiation)を行っていないなければならないが、現在の宇宙は明らかに物質優勢(matter-dominant)であり、radiationの影響は皆無なのでblack-bodyであるとは到底言えない。すなわち、過去のある時期宇宙はblack-bodyであり、その時のなごりのphotonが現在3K-radiationとして観測されている、と考えるのが自然である。black-bodyであるためにはradiationとmatterとが相互作用(interaction)によって熱平衡(thermal equilibrium)になっていなければならないので、radiationの影響が効いてくるくらい宇宙の温度が高くなければならない。すなわち、過去のある時期に宇宙は熱かった!!ということになり、Chapter-3でとりあげるBig-Bang theoryの有力な観測的証拠を与えたのである。この功績により、彼らは1978年、ノーベル賞を受賞した。

それでは、もう少し具体的に見てみよう。宇宙の大きさの尺度であるscale factor- a とtemperature- T との間には、

$$\frac{T(t_1)}{T(t_0)} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (\text{C.2})$$

という関係がある(t_0 は現在の時刻、 t_1 は過去のある時点の時刻)。この式の意味するところは、

$$T(t_0) = \frac{T(t_1)a(t_1)}{a(t_0)} \propto a(t_0)^{-1} \quad (\text{C.3})$$

と書きなおせば明らかのように、『宇宙の温度は宇宙の大きさに反比例する』ということである。

時間をさかのぼってみよう¹。 $t = t_1$ で scale-factor が 1000 分の $1(a(t_1)/a(t_0) = 1/1000)$ になれば、temperature は 1000 倍 ($T(t_1)/T(t_0) = 1000$) になる。観測より $T(t_0) = 3K$ だから、 $T(t_1) = 3000K$ である。実は、この T は特別な temperature であり、このとき radiation と matter の thermal equilibrium がとけてしまうのである (詳しい議論は chapter-3 『early Universe』で行う)。この時を境に宇宙は black-body ではなくなり、この時吸収されずに (interaction を起こさずに) 取り残されてしまった哀れな photon は、これから宇宙を放浪することになる。そして現在、 a の増加とともに T の下がった状態でこれらの photon が観測されているのである。

C.2 Homogeneous isotropic Universe

1992年、宇宙背景輻射探査衛星COBEが3K-radiationの詳しい姿を描き出した。そこには、 10^{-5} 程度の揺らぎで宇宙全体に一様等方に広がるradiationの姿があった。宇宙がblack-bodyであったその時。宇宙はすでに一様等方だったのである。また、 $T(t_0)$ の値も精密に求められ、

$$T(t_0) = 2.735 \pm 0.06 \text{ K}$$

であった (Fig.C.1)。

¹ここでは、膨張宇宙モデルが正しいことを仮定して話を進めている。

Appendix D

Comoving Coordinate

4次元時空の metric を具体的にあらわすためには、時間と空間の座標の取り方を指定しなくては行けないが、空間の座標としては『物質から見て常に座標が静止している』ようなものを選ぶのが自然であり、便利であろう。物質に対して座標が静止している、ということはいいかえれば『座標が物質とともに動いている』ということもできるであろう。こういう意味でこの座標のことを共動座標 (comoving coordinate) と呼ぶ。これだけでは何のことかわからないと思うので、具体的に見てみることにしよう。cluster of galaxy を例にとって話す。ここに comoving coordinate をはれば、すべての galaxy の座標 x^i は constant となるはずである (Fig.D.1)。しかし実際の cluster においては、座標に対して $x^i = \text{const.}$ となるのは cluster の重心であり、個々の galaxy は勝手気ままな固有運動 (proper motion) をおこなっているため、座標に対して静止しないことになる。

けれどもこの proper motion は、scale を大きくしてみれば無視できるくらいであるので、ここではすべての galaxy についても $x^i = \text{const.}$ ということにする。これで comoving coordinate をはることができた。これにより、galaxy の velocity における空間成分はすべて 0 となる。

さて、空間はいま一様等方であるから座標の原点はどこにとってもいいわけであり、観測者のいる位置を原点とする。2.2 節でやったように再び極座標 (r, θ, ϕ) を導入すれば、いま comoving coordinate をとっていることよりすべての物質に対して同じ座標を用いることができるので、この座標は全空間に広げることができる。このとき空間の膨張により、 $r \rightarrow a(t)r$ とひきのばされる¹のでこれを (2.7) に代入すれば (2.16) を得る。

¹ θ, ϕ は変化しない。これは等方性からの要請である。

Bibliography

- [1] 中野董夫 「物理入門コース9 相対性理論」 1984
- [2] 内山龍雄 「物理テキストシリーズ8 相対性理論」 1977
- [3] Bernard F.Schutz 著、江里口良治・二間瀬敏史共訳 「シュッツ・相対論入門」 1988
- [4] 佐藤文隆 「相対論と宇宙論」 1981
- [5] 小玉英雄 「パリティ物理学コース 相対論的宇宙論」 1990
- [6] 成相秀一・富田憲二 「物理学選書19 一般相対論的宇宙論」 1988
- [7] 横山順一 「Frontier Science Series 宇宙創生をさぐる ～インフレーション宇宙への招待～」 1994
- [8] 桜井邦朋 「アインシュタインが見た宇宙 ～相対論的宇宙論への道～」 1989
- [9] 吉村太彦 「宇宙創生と素粒子」 1985

Chapter 1

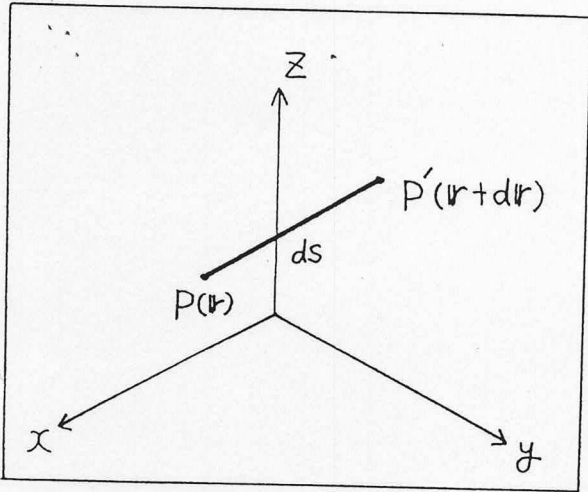


Fig.1.1 3次元Euclid space

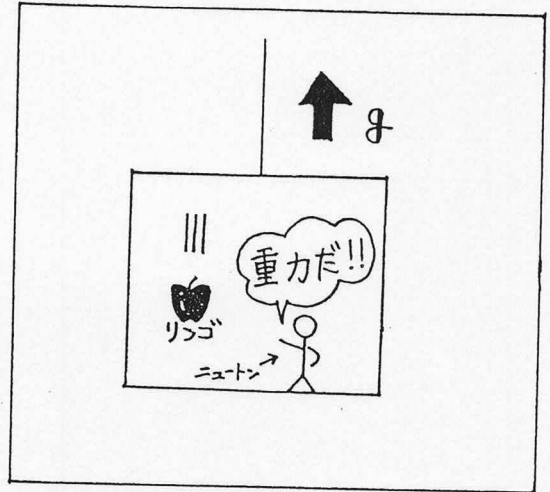


Fig.1.2 箱の中の人

Chapter 2

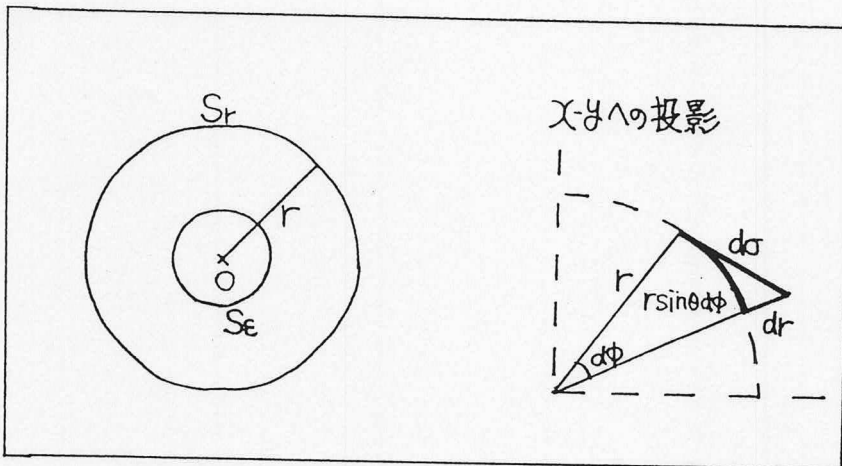


Fig.2.1 等方な空間

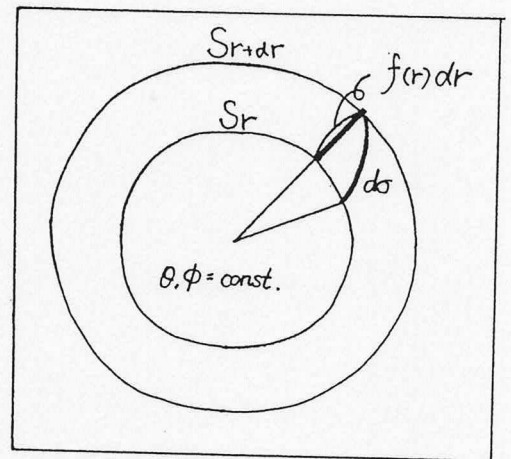


Fig.2.2 拡張

Fig.2.3 Matter-Dominant Stage

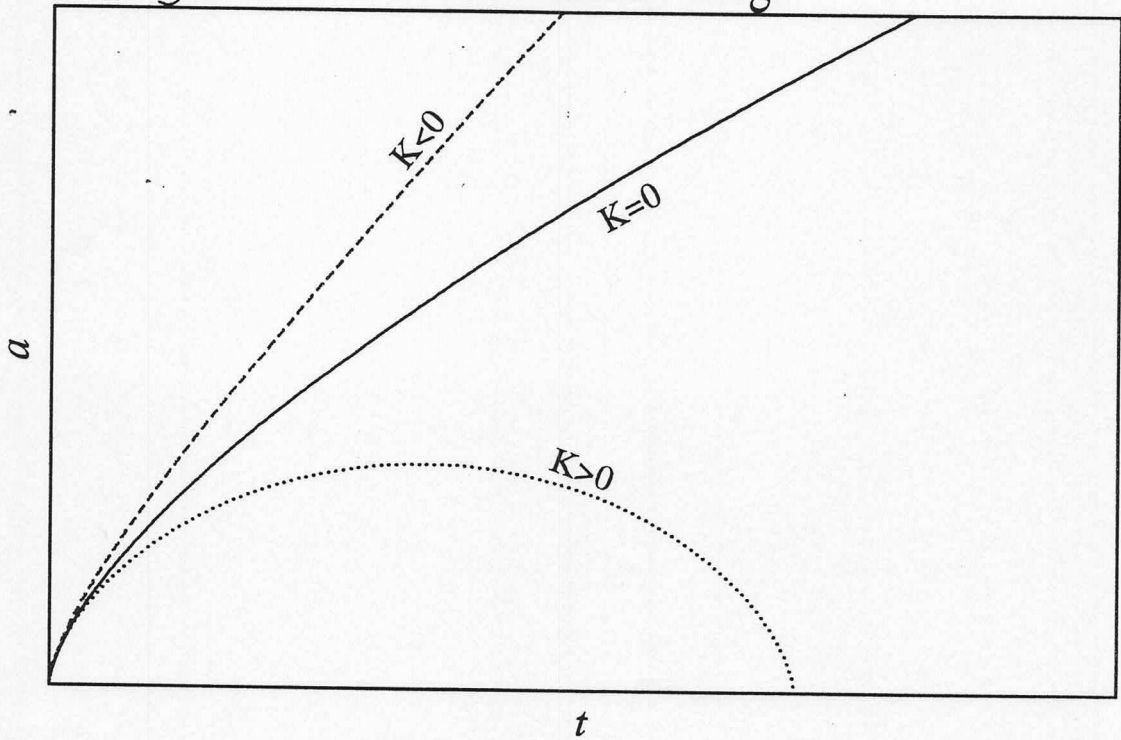
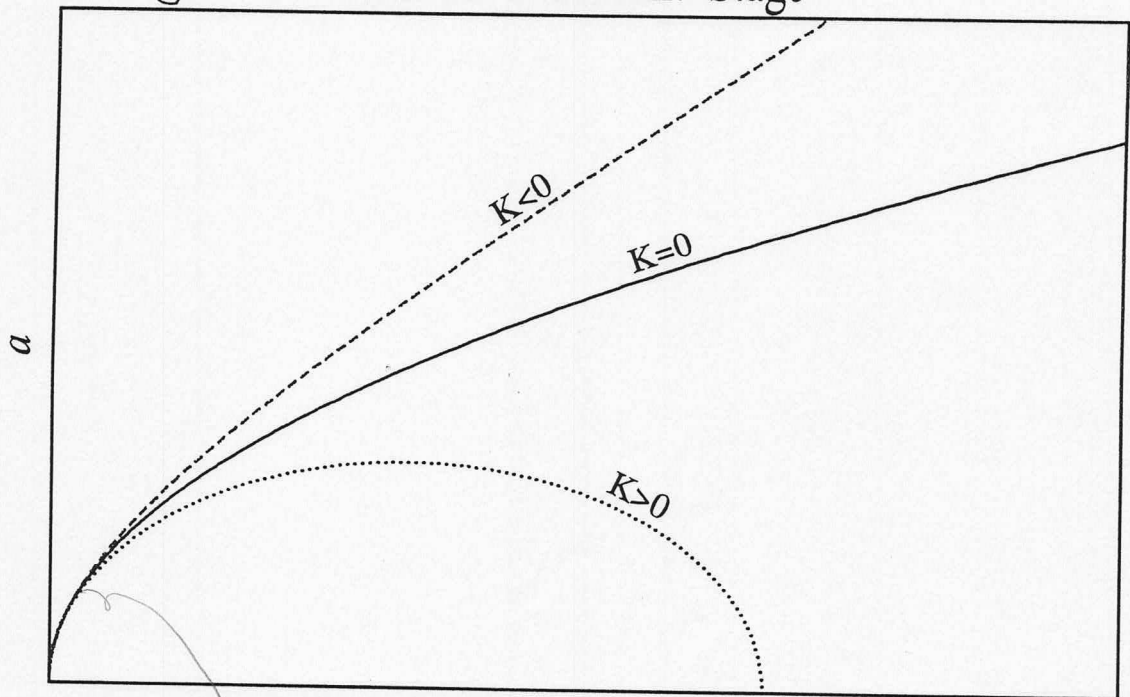


Fig.2.4 Radiation-Dominant Stage



かつて熱かた時代には
 曲率は関係なかった。

Fig.2.5 Cosmic Ages

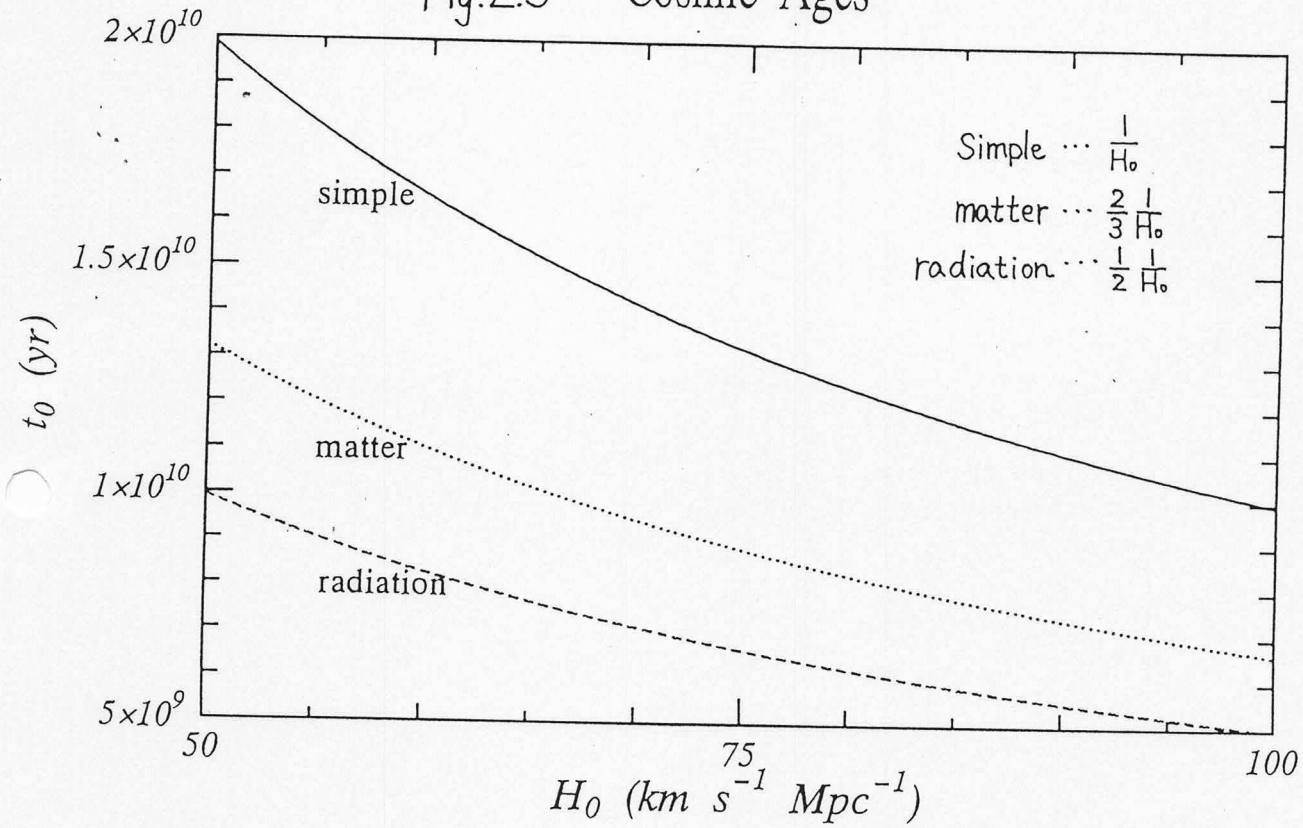


Table.2.1

階層構造と特徴的なスケール

	明るさ	質量	広がり	平均間隔	$\rho/\bar{\rho}$
銀河	$10^{10} L_{\odot}$	$10^{12} M_{\odot}$	$100 h^{-1} \text{kpc}$	$3 h^{-1} \text{Mpc}$	$\sim 10^5$
銀河団	$10^{12} L_{\odot}$	$10^{14} M_{\odot}$	$14 h^{-1} \text{Mpc}$	$25 h^{-1} \text{Mpc}$	$2 \sim 40$
大構造 { 超銀河団 ボイド	$10^{13} L_{\odot}$	$10^{15} M_{\odot}$	$50 h^{-1} \text{Mpc}$	$50 h^{-1} \text{Mpc}$	~ 2
			$25 h^{-1} \text{Mpc}$		
超大構造?		$10^{16} M_{\odot}$	$100 h^{-1} \text{Mpc}$	$100 h^{-1} \text{Mpc}$	

Chapter 3

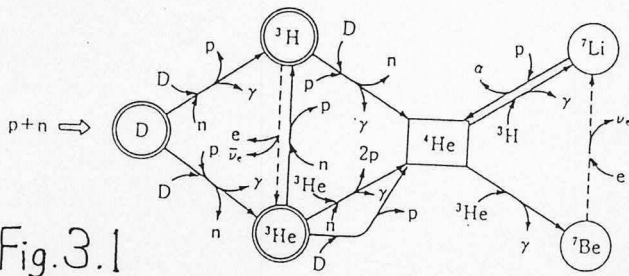


Fig.3.1

宇宙初期における中心的な合成反応

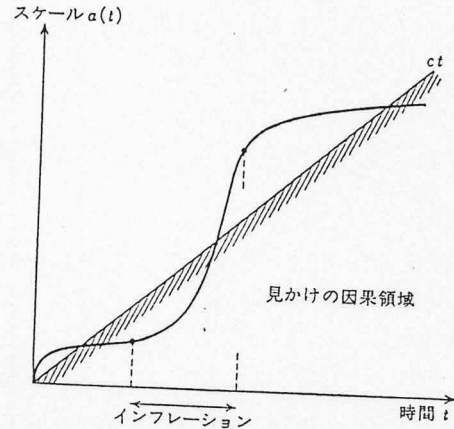


Fig.3.4

インフレーションによるサイズ変化

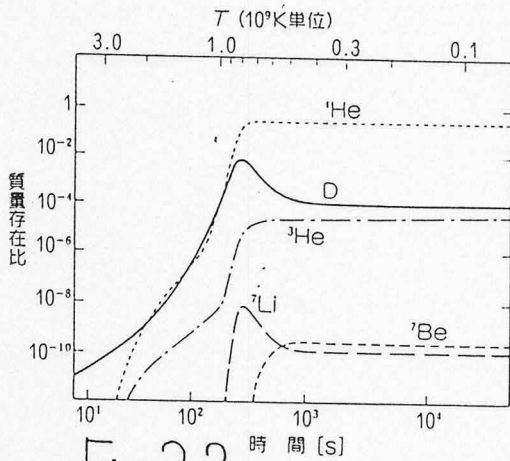


Fig.3.2

元素合成の進行

(Ann. Rev. Astron. Astrophys. 23(1985), p.325)

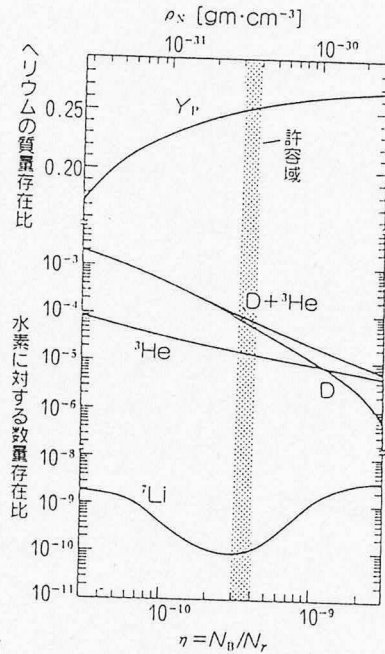
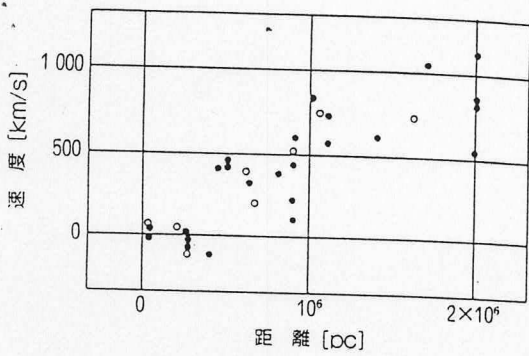


Fig.3.3

生成される元素量とバリオン・光子比の関係 (Prog. Theor. Phys. 80(1988), p.474に基づいて作成)

Appendix B



あなたはこのデータを直線でフィットする勇気があるだろうか？

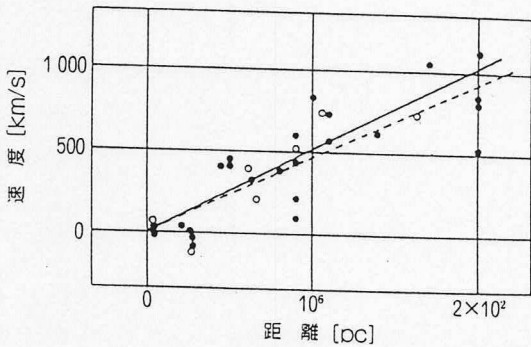


Fig. B.1 ハッブルの観測データと彼が引いた直線

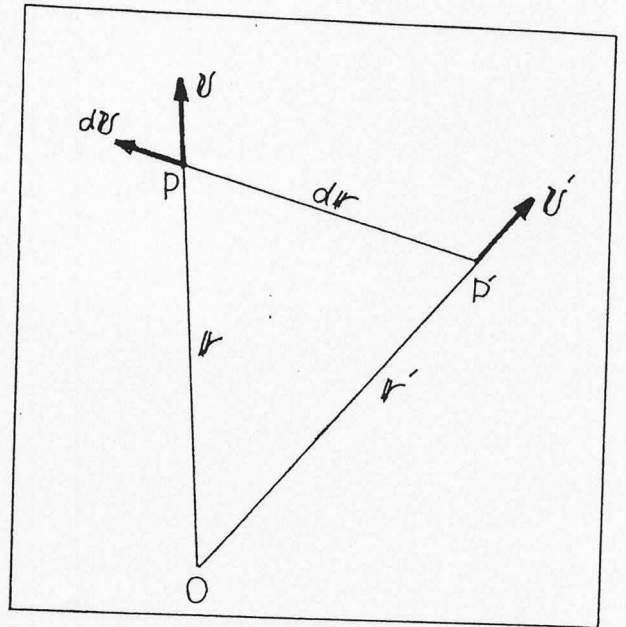
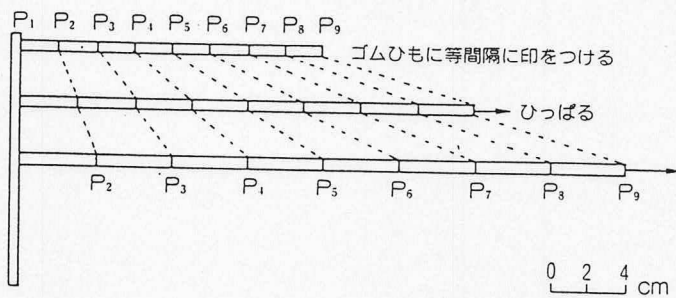


Fig. B.3 Hubble's law



P_2 が2cm動く間に P_3 は4cm、 P_4 は6cm、 P_9 は16cm動く。
つまり P_1 から見て各点が遠ざかる速さは、はじめの P_1 との距離に比例していることがわかる。

Fig. B.2 膨張宇宙を再現する実験

Appendix C

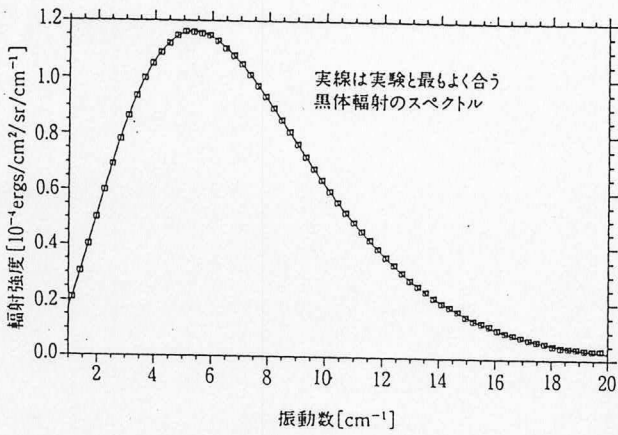


Fig. C.1

宇宙マイクロ波背景輻射のスペクトル *by COBE*

Appendix D

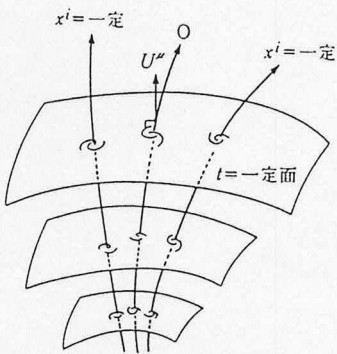


Fig. D.1

ロバートソン-ウォーカー時空の座標