修士論文

宇宙背景放射

東北大学大学院理学研究科天文学専攻

小松 英一郎

平成10年

目 次

第 1 章 Introduction **3**

1 The Cosmic Microwave Background 3

1.1 35 years ago 3

1.2 spectrum measurements 4

1.3 fluctuation measurements 5

1.4 25 years after CMB discovery: COBE's discovery 6

1.4.1 COBE detectors 6

1.4.2 FIRAS results: almost perfect black-body 7

1.4.3 DMR results: discovery of fluctuations 7

1.5 after COBE 9

1.5.1 seeking first Doppler Peak !! 9

1.5.2 toward much smaller scales: another side of CMB 12

1.6 beyond COBE 14

1.6.1 MAP 15

1.6.2 PLANCK 15

1.7 toward polarization measurements 18

2 The Sunyaev-Zel'dovich Effect 19

2.1 30 years ago 19

2.2 "first" detection of the submillimeter SZ effect 19

第 2 章 Photon Transport Equations **23**

1 Before Multipole Expansion 24

1.1 gravitational sources: Sachs-Wolfe effect 24

1.2 scattering sources: temperature & polarization 25

2 After Multipole Expansion 26
2.1 parity: electric & magnetic modes 26
2.2 left hand side of equations: streaming 27
2.3 right hand side of equations: source functions 28
2.4 complete set of photon transport equations 29
3 Hierarchical Structure of Transport Equations 31
3.1 scalar mode hierarchy 31
3.2 vector mode hierarchy 32
3.3 tensor mode hierarchy 33
4 Transport Equations of Other Fluids 33
4.1 baryon transport 33
4.2 Cold Dark Matter transport 34
4.3 massless neutrinos & relativistic particles transport 35

第 3 章 Phenomenology of CMB **36**

1 Superhorizon Scale: Sachs-Wolfe Effect 36
1.1 entropic perturbarion 38
1.2 case 1: adiabatic initial condition 39
1.3 case 2: isocurvature initial condition 42
2 Subhorizon Scale: Tight Coupling 43
2.1 0th order: perfect coupling 43
2.2 1th order: acoustic oscillation & frame dragging 44
2.3 2nd order: diffusion damping 46
3 Subhorizon Scale: Solutions 49
3.1 acoustic oscillation 49
3.2 frame dragging 50
3.3 diffusion damping 51
4 Acoustic Oscillation: Qualitative Pictures 52
4.1 acoustic oscillation 52
4.1.1 adiabatic initial condition 54
4.1.2 isocurvature initial condition 56
4.2 diffusion damping 56

5 Free Streaming & Projection 57
5.1 angular power spectrum & cosmic variance 57
5.2 free streaming solutions: from qualitative point-of-view 60
5.3 free streaming solutions: complete set & implications 65
5.3.1 scattering origins 65
5.3.2 gravitational origins 72
5.4 curvature effect: shifting Doppler-Peaks 76
6 Small Scale Effects 79
6.1 small angle approximation 79
6.2 lensing effect 81
6.3 normalization, transfer function, growth factor & non-linear effect . 82
7 Polarization 85
7.1 integral solutions 85
7.2 reionization 87

第 4 章 Observations **90**
1 Window Function 90
1.1 (1) finite beam-size 91
1.2 (2) finite field-of-view: scan strategy 93
1.3 worked examples 96
1.4 (3) finite samping, (4) finite noise-level 98
2 Error Estimation 98
3 Foregrounds 100

第 5 章 The Sunyaev-Zel'dovich Effect **101**
1 Spectral Distortion 101
2 Submillimeter Detection of the SZ Effect 102
3 Fluctuation of the SZ Effect 104

第 6 章 The Inflationary Scenario **108**
1 Inflationary Expansion 108
1.1 scalar field 108

2 Quantum Origin of Perturbations 110
2.1 density perturbation (scalar mode) 111
2.2 gravitational wave (tensor mode) 112
2.3 quantization 112
2.4 power spectrum calculation & CMB 116
3 Classicalization 117
4 Chaotic Inflationary Scenario 120
4.1 mass term: $V(\phi) = m\phi^2/2$ 121
4.2 self interaction: $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$ 121

第 7 章 Nonminimal Coupling Theory 122
1 Original (Jordan) Frame Analysis 123
1.1 background equations 123
1.2 chaotic inflation: $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$ 124
2 Conformal (Einstein) Frame Analysis 125
2.1 conformal transformation 125
2.2 background equations 127
3 Transformations of Scalar Perturbations 128
3.1 lapse function: h_{00} 128
3.2 shift vector: h_{0i} 129
3.3 spatial metric: h_{ij} 129
3.4 geometrical quantities 130
3.5 gauge invariants 130
4 Scalar Perturbation 131
5 Tensor Perturbation 132
6 Tensor/Scalar Ratio 132
7 Spectral Indices 133
7.1 conformal transformation 133
7.2 calculations 134

付 録 A The ADM Formalism 146
1 Metric 146

2 Geometrical Quantities . . . 148
2.1 normal vector & projection tensor . . . 148
2.2 rotation, shear, expansion & acceleration . . . 149
2.3 extrinsic curvature . . . 150
3 Linear Perturbations . . . 151
3.1 metric perturbations . . . 151
3.2 extrinsic curvature, shear & expansion . . . 152
3.3 acceleration . . . 153

付 録B Orthonormal Tetrad Representation 154
1 Tetrad . . . 154
2 Geometrical Quantities . . . 155
2.1 general expressions . . . 155
2.2 perturbations . . . 156

付 録C The Einstein Equations 158
1 Riemann Tensor . . . 158
2 Einstein tensor . . . 160
2.1 general expressions . . . 160
2.2 background . . . 161
2.3 perturbations . . . 161
3 Stress-Energy Tensor . . . 162
4 Einstein equations . . . 164
4.1 background equations . . . 164
4.2 perturbed equations . . . 165

付 録D Gauge 166
1 Gauge Transformation . . . 166
1.1 Lie derivative . . . 167
1.2 gauge transformation: metric perturbations . . . 169
1.3 gauge transformation: stress-energy perturbations . . . 169
1.4 gauge invariance . . . 170

2 Family of Perturbations 170
2.1 scalar mode 171
2.2 vector mode 174
2.3 tensor mode 176

付 録E Gauge Invariant Perturbations 177
1 Equations of Motion 177
1.1 continuity equation 177
1.2 Euler equation 178
2 Scalar-Mode Equations 179
2.1 Poisson equation 179
2.2 dynamical equation 180
2.3 momentum constraint 181
2.4 continuity equation 181
2.5 Euler equation 182
3 Vector-Mode Equations 183
3.1 Poisson equation 183
3.2 dynamical equation 184
3.3 Euler equation 184
4 Tensor-Mode Equations 185
5 Summary of Gauge Invariants 185
5.1 scalar mode 185
5.2 vector mode 186

付 録F The Boltzmann Transport Equation 187
1 Distribution Function 187
1.1 invariant volume element: coordinate space 188
1.2 invariant volume element: momentum space 189
1.3 Boltzmann equation: coordinate representation 190
1.4 Boltzmann equation: tetrad representation 190
2 Temperature Fluctuation 191
2.1 transport equation: coordinate representation 191

2.2 transport equation: tetrad representation . . . 193
3 Sachs-Wolfe Effect & Momentum Transformation . . . 193
3.1 photon energy & observer . . . 193
3.2 observer 1: normal vector . . . 194
3.3 observer 2: realistic observer . . . 196
3.4 any observers: momentum space gauge transformation . . . 197
3.5 Summary of SW effect . . . 198

付 録 G Scattering & Polarization **200**
1 Collision Integral . . . 200
1.1 invariance of collision integral . . . 201
1.2 cross section (electron rest-frame) . . . 201
2 Polarization . . . 204
2.1 Stokes parameters . . . 204
2.2 scattering matrix: $\mathbf{S}(\beta)$ . . . 205
2.3 phase matrix: $\mathbf{P}(\theta, \phi; \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ . . . 207
3 Energy Transfer . . . 208

付 録 H Multipole Expansion **211**
1 Mode Function in Flat Space . . . 211
2 Mode Function in Curved Space . . . 212
3 Relations between Mode Functions: $Q^{(m)}$ & G^m_ℓ . . . 212

付 録 I Hyper Geometrical Functions **213**
1 Legendre Polynominals . . . 213
1.1 Legendre function: $P_\ell(x)$ . . . 213
1.2 generalized Legendre function: $P^m_\ell(x)$ . . . 214
2 Spin Harmonics: ${}_sY^m_\ell(\theta, \phi)$ . . . 214
2.1 spin-0 (spherical harmonics): $Y^m_\ell(\theta, \phi)$ . . . 217
2.2 spin-2: ${}_{\pm 2}Y^m_\ell(\theta, \phi)$ . . . 218
3 Bessel Function: $J_\ell(x)$ . . . 219
4 Spherical Bessel Function: $j_\ell(x)$ . . . 219

付 録J Correspondences **221**
1 Metric Perturbations . . . 221
2 Gauge Invariants . . . 222
3 Temperature Fluctuations . . . 222

付 録K Physical Review D 58, 023004 (1998) **223**
1 Introduction . . . 1
2 Background Inflationary Solutions . . . 2
2.1 Chaotic Inflation by a self coupling . . . 3
2.2 Chaotic Inflation by a mass term . . . 5
3 The Spectrum of GWs generated during the Inflationary Expansion . . . 6
3.1 Radiative Solutions of Metric Perturbations . . . 6
3.2 The Spectrum of GWs . . . 7
4 Comparison With Observations . . . 11
5 Conclusions . . . 14

付 録L Physical Review D59, 064029 (1999) **19**
1 Introduction . . . 1
2 Background inflationary solutions . . . 3
2.1 Jordan frame solutions . . . 3
2.2 Einstein frame solutions . . . 4
3 Scalar perturbation . . . 6
4 Tensor perturbation . . . 7
5 Constraints from the cosmic microwave background . . . 8
6 Spectral Indices . . . 9
6.1 Scalar perturbation . . . 9
6.2 Tensor perturbation . . . 12
7 Conclusions . . . 12

付 録M Astrophysical Journal, 516, L1 (1999) **17**
1 Introduction . . . 1

2 Observation of the Sunyaev – Zel'dovich effect toward RXJ 1347-1145 at cm, mm and submm bands 2
2.1 the target cluster RXJ 1347-1145 2
2.2 21 and 43 GHz at Nobeyama 45-m telescope 2
2.3 350 GHz at JCMT/SCUBA 4
3 Discussion 6

Preface

本修士論文には、大きく分けて 2 つの目的がある。ひとつは (当然であるが) 私が博士課程前期 1 年次から手がけてきたオリジナルな研究の成果をまとめることである。そしてもうひとつは — 本論文のほとんどのページを割いているが — 宇宙背景放射 (CMB) の温度異方性及び偏光の基礎理論から観測との比較の方法、観測の現在/将来計画に至るまでを包括的にまとめあげることである。

博士課程前期 1 年の始めより、二間瀬敏史 教授 (東北大) の指導のもと、時空との非最小結合を持つスカラー場の起こすインフレーションによって生成された重力波のゆらぎとそれによる CMB の温度ゆらぎを求め、観測と比較する研究を行なってきた (Komatsu & Futamase 1998,1999)。同時に、須藤靖 助教授 (東大) のリーダーシップのもと進行していたスニヤエフ – ゼルドヴィッチ効果のサブミリ帯世界初検出をめざす計画グループに、服部誠 助手 (東北大) から声をかけていただいて参加し、実際の観測からデータ解析までを手がけ、北山哲さん (東大) による理論モデルとの統計解析を経て無事これを検出した (Komatsu, Kitayama, Suto, Hattori, Kawabe, Matsuo, Schindler & Yoshikawa 1999)。

私の研究における基本的なモチベーションは、CMB を用いて宇宙論/初期宇宙理論/重力理論までを包括的に検証し、プランク時間以降から現在までのシナリオを CMB の観測を基本にして構築することにある。そのため、学部 4 年時より CMB 全般について二間瀬教授のもとで学び、幸運にも前述のように理論/観測両面でオリジナルな業績をおさめることができた。一方、現在東北大学を中心とするグループにより、CMB 異方性の測定を目指す観測プロジェクトが進行中である。それを受け、今後東北大学宇宙論グループにおいて CMB の研究がさかんにおこなわれてゆくであろうことを鑑み、私がこれまで CMB について学び、研究してきた内容をここでまとめあげ、自身の今後の研究に生かすことはもちろんのこと、宇宙論グループの CMB の研究レベルにも貢献できればと考え、今回の修士論文とした。内容は、Bond (1996) のレクチャーをベースとし、温度異方性の理論を Hu (1995; Ph.D. thesis)、偏光の理論を Zaldarriaga (1998; Ph.D. thesis), Hu & White (1997b)

の手法にのっとってまとめている。また、Bardeen (1980), Kodama & Sasaki (1984) のフレームワークにもとづく宇宙論的摂動論のゲージ不変形式を付録としてまとめておいた。

本修士論文の構成は、以下の通りである。

Chapter 1 では宇宙背景放射の歴史的背景と最近の理論/観測面での進展状況を紹介し、本論文の内容を概観的にまとめる。Chapter 2 では Hu & White (1997b) の定式化にのっとって CMB の温度ゆらぎと偏光モードの基礎的輸送方程式を導く。Chapter 3 では、Hu (1995) と同様の方針で CMB 温度ゆらぎの物理を現象論的に理解し、Zaldarriaga (1998), Hu & White (1997b) によって偏光の物理を理解する。Chapter 4 では観測と理論との比較に必要な事項をまとめる。Chapter 5 ではスニヤエフ – ゼルドヴィッチ効果の銀河団中における観測と、CMB ゆらぎへの寄与について議論する。Chapter 6 よりインフレーション理論におけるゆらぎの生成理論を概観した後、ゆらぎの古典化に関する新しいアプローチを行なう。Chapter 7 において非最小結合理論によるインフレーション理論の是非を CMB の観測から議論する。

Appendix A では Arnowitt, Deser & Misner (1962) による、いわゆる ADM 形式にもとづく一般相対論の定式化を行なう。Appendix B においてテトラード表示という、数学的、物理的取扱いを簡便にする基底の取り方を導入する。Appendix C でアインシュタイン方程式を ADM 形式について線形オーダーまで書き下す。Appendix D でゆらぎのスカラー/ベクター/テンサーモードの分割とゲージ変換性をまとめる。Appendix E ではゲージ不変形式による摂動方程式を書き下す。Appendix F では相対論的運動論によるボルツマン方程式によって光子の輸送方程式の一般形式を導く。Appendix G では散乱と偏光の理論を展開する。Appendix H において数学的手法として多重極展開を定義する。Appendix I には頻繁に使われる数々の特殊関数の基本性質をまとめる。Appendix J に他の文献との比較を容易にするための対応表をつけておく。

Appendix K に Physical Review D 58, 023004 (1998)、Appendix L に Physical Review D 59, 064029 (1999)、Appendix M に Astrophysical Journal, 516, L1 (1999) に掲載された論文をそれぞれ付与しておく。

As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain;
and as far as they are certain, they do not refer to reality.

— *Albert Einstein*

第1章　Introduction

1　The Cosmic Microwave Background

1.1　35 years ago . . .

今から 35 年前の 1964 年。当時すでに Gamow のビッグバン宇宙論 (Gamow 1946) によってその存在が予言されていた「宇宙背景放射 (CMB)」(Alpher & Herman 1949) を何とかして検出しようと、Princeton の Robert H. Dicke を中心とするグループが、勢力的に実験/観測を行なっていた。実はこの Dicke という人物。電波観測において「ディッキースイッチング (Dicke switching)」という、空のノイズを有効に減らす事のできる手法をあみだす一方、重力の理論研究において、アインシュタイン重力の代替理論として今なお重要な地位を占める「ブランズ – ディッキー (BD) 重力理論」(Brans & Dicke 1961; Dicke 1962) を提唱したという、まさに理論/観測/実験のオールラウンドプレーヤーであった* 。彼のコンセプトは「実験」である。そもそも、BD 理論も「実験で検証可能な」代替理論として提唱されたものであった (Will 1993)。そんな彼が、ビッグバン理論の直接的な証拠である CMB を検出するのにやっきにやったのも、確かにうなづける。

しかし、Dicke は幸運を味方につけることはできなかった。時を同じくして、ベル研究所の Penzias と Wilson は空へホーンアンテナを向けていた。CMB を検出するため？ ではなく、検出器のノイズレベルを測るためである。ところが、アンテナを空のどの方向へ向けても期待される以上のノイズが入ってくるではないか。もし彼らが Dicke であれば、即座に CMB の検出であると結論を下したかもしれない。しかし彼らは CMB の存在を知らなかった。それゆえ、まずノイズ超過の原因を他に求めたのである。実は彼ら以前にもノイズ超

* Dicke 教授はおととしの 1997 年 3 月 4 日、80 歳で亡くなったそうである。私が BD 理論に代表されるスカラー – テンサー重力理論の研究をはじめたのはその後まもなくである。偶然にも私は 1 年後に電波観測の機会に恵まれることとなった。ディッキー – スイッチングがあの Dicke 教授のものであったことを知ったのはその時である。理論/実験/観測。この 3 本の柱を見事に両立させた研究スタイルに、私は非常に影響を受けた。

過は検出されていたのだが、地表からの放射などに解釈されてきたのだった。同様に彼らはとにかく徹底的に「系統的エラー (systematic error)」を探し出した。しかし、考え得るエラーを探り尽くしてもなお、波長 $\lambda = 7.35$ cm (4 GHz) に $\Delta T = 3.5 \pm 1.0$K (Penzias & Wilson 1965) が残されたままであった。そして ...。とうとう彼らは、Princeton に電話をかけたのである。Penzias からの電話を受けた Dicke は、即座にそれが CMB であることを確信したのだろう。電話を切った後、彼は皆にこう言ったそうである。"Well boys, we've been scooped !!"

1.2 spectrum measurements

Penzias & Wilson の発見により、ビッグバン宇宙論は標準理論の地位を固めたと言っても過言ではない。その後、ビッグバン理論を礎として宇宙論は発展してゆくわけであるが、CMB の観測はその後、スペクトルの測定の時代へと入っていった。つまり、全波長領域で正確な黒体放射をしているのか？ということである。もし宇宙の初期や脱結合後に光子にエネルギー輸送が起これば、CMB のスペクトルは黒体放射からずれてしまう。従って CMB が完全な黒体か否かを観測することは、宇宙の熱史を知ることと同等なのである。

地上観測による電波観測ではセンチ波の領域は空が透明であり、観測は容易である。一方、ミリ波からサブミリ波へ移ると水蒸気による吸収が激しくなってゆき、地上観測はどんどん困難となる。そんな事情もあり、いわゆるレイリー – ジーンズ領域 ($\nu \ll 100$ GHz) の測定は良くなされ、ほぼビッグバンの予言するところである 2.7K の黒体であることが確かめられていた。ミリ波でも測定が進み、同様の結果が得られていた。しかし、サブミリ帯にあたるウィーン領域はまともな測定がなされないまま残された領域であった。黒体放射であることを完全に確認するには、どうしてもレイリー – ジーンズ領域とウィーン領域の間のピークを検出しなければならない。2.7K の黒体放射のピークはウィーンの変位則 $\lambda_{max}T = 5.099$ mm $\cdot$ K より、波長約 2 mm である。サブミリの観測は避けられない。

地上観測が困難であるため、登場するのが気球、あるいはロケットである。名古屋大学の松本敏雄を中心とする名古屋と Berkeley のグループは、CMB のロケット観測を計画していた。観測波長帯は 102 – 1160 μm までの 6 バンドをカバーし、ピークからウィーン領域にかけて広い波長帯を観測できる。その結果は、思いもよらず衝撃的なものであった。もっとも長波長のバンドを除き、短波長側へかけて全ての観測点が CMB の黒体放射よりも有意に高かったのだ (Matsumoto et al. 1988)。うち、最も短波長側の 3 バンドに関して

は我々の銀河系からのダスト放射で説明できる。しかし、残るバンドが説明できない。一体この波長帯に何が存在するのか？ CMB に何が起こっているのか？

1.3 fluctuation measurements

CMB 観測のもう 1 本の柱は、CMB の「ゆらぎ」の観測である。というのも、我々の宇宙には銀河を始めとし、銀河団、大規模構造といった非一様な構造が存在している。そのような構造は、初期に存在していた密度ゆらぎの「種」がゆらぎの線形理論に従って成長して形成されたものだと考えられるため、ビッグバン宇宙論の枠組みでそのような構造を作ろうと思えば最終散乱面 (Last Scattering Surface; LSS) での CMB の温度に「種」である非一様性が存在していなければならないことになる。

CMB の一様等方なシグナルを検出したことがビッグバン宇宙論の 0 次だとすれば、ゆらぎの検出はビッグバン宇宙論を 1 次のオーダーまで検証できたことを意味する。しかし期待されるゆらぎの大きさは $\Delta T/T \approx 10^{-5}$ という、当時の地上観測ではほぼ絶望的な数値である。観測しても上限値を与えるのが精いっぱいの観測であるが、それでも各地のグループは熱心に観測を繰り返し、上限値を下げていった (e.g., Readhead et al. 1989)。CMB の検出と同様、中には CMB のゆらぎを検出したと言えなくもない結果もあったろうが、やはり当時の雰囲気は検出に対して保守的だったようである。もちろん現在においても地上観測によるゆらぎの測定は極めて難しく、日々各地のグループによる観測が行なわれている。

CMB の発見以降、ゆらぎに関しては観測的になかなか検出報告がされず小康状態であったが、理論研究は着々と進んでいった。CMB の発見から 2 年後の 1967 年には Sachs & Wolfe によって LSS の重力ポテンシャルのゆらぎが CMB に同程度のゆらぎを生成することが示され、ザクス – ヴォルフェ効果 (Sachs & Wolfe 1967; chapter3) として知られている。その後も線形理論を駆使して光子 – バリオン系のボルツマン方程式を解き (chapter 2)、標準的な宇宙論を基礎とする CMB のゆらぎに関しては定量的にほぼ理解されるようになった (e.g., Peebles 1980, pp.363 §93; Wilson & Silk 1981; Bond & Efstathiou 1987)。あとは検出するだけである。

CMB のスペクトル測定とゆらぎの検出。ブレイク – スルーは同時にやって来た。

1.4 25 years after CMB discovery: COBE's discovery

電波観測の最大の障害が大気であるから、行きつく先はやはり人工衛星による観測である。NASA では、1974 年から CMB 観測専用の人工衛星を打ち上げる計画が持ち上がっていた。その後 1986 年のスペースシャトルチャレンジャー号の不幸な爆発事故もあり計画の実現には最終的に 15 年を要したが、1989 年 11 月 18 日、Vandenberg Air Force Base より宇宙背景放射探査衛星 "COBE"(= COsmic Background Explorer) は、上空 900 km 地点へ無事打ち上げに成功した。

1.4.1 COBE detectors

COBE は、目的の異なる 3 種類の検出器を積んでいた。

(1) **FIRAS** (= Far Infrared Absolute Spectrometer)

文字通り、CMB のスペクトルを測定する検出器である。ピークを含む 波長 $\lambda = 100\ \mu\mathrm{m} - 1.0\ \mathrm{cm}$ ($\nu = 3000 - 30$ GHz) をカバーしている。内部の熱放射を抑えるため、検出器系の環境は 1.5 K まで冷やされている。インプットシグナルはリファレンスとなる黒体と比較され、その差をアウトプットとして得る。

(2) **DMR** (= Differential Microwave Radiometer)

CMB のゆらぎを測定する検出器である。観測波長帯は $\lambda = 3.3,\ 5.7,\ 9.5$ mm ($\nu = 31.5,\ 53,\ 90$ GHz) で、1 つの波長あたりに 2 つのアンテナと、A, B と呼ばれる 2 つのチャネルを持っている。アウトプットは、互いに 60° 離れた 2 つのアンテナから入ってきたシグナルの差であり、2 つのアンテナ間を 100 Hz でスイッチする。ビームサイズは 7° である。

(3) **DIRBE** (= Diffuse Infrared Background Experiment)

FIRAS よりも短波長に波長が合わせてあり、宇宙赤外背景放射 (Cosmic Infrared Background; CIB) をマッピングする検出器である。波長は $\lambda = 1.25 - 240\ \mu\mathrm{m}$ ($\nu = 2.4 \times 10^5 - 1200$ GHz) である。CMB との直接のつながりはないが、この波長領域の地上観測はほとんど不可能であるため、COBE の全天マップは貴重である。

1.4.2 FIRAS results: almost perfect black-body

FIRAS の観測結果の第 1 報は、打ち上げの翌年 1990 年 5 月 10 日の Astrophysical Journal Letters に掲載された (Mather et al. 1990)。"Preliminary" とは言え、結果は一目遼然であった。「観測波長域にわたり 1% の精度で完全な黒体放射、温度は $T = 2.735 \pm 0.06$ K。」この時点で、松本らのグループの結果は否定されることとなった† 。

その後 4 年間の観測データにより、CMB の温度は $T = 2.728 \pm 0.004$ K (95% C.L.) となった (Fixsen et al. 1996)。また、スペクトルの黒体からのズレは電子の逆コンプトン散乱による y パラメター、化学ポテンシャルによる μ パラメターとして定量化されているが、各々に対して 95% C.L. で $|y| < 1.5 \times 10^{-5}$, $|\mu| < 0.9 \times 10^{-4}$ が得られている。すなわち、現在のところ全天で平均的な CMB の黒体放射からのずれは検出されていないのである‡ 。

1.4.3 DMR results: discovery of fluctuations

DMR の結果の第 1 報は FIRAS より 1 年遅れの 1991 年 4 月 10 日であったが、この時点ではまだ CMB に有意なゆらぎは検出されていなかった。たが、我々が CMB の静止系に対して固有速度を持って動いていることを示す双極的な異方性は検出された (Smoot et al. 1991)。もちろん我々は地球は太陽に、太陽系は銀河系中心に、銀河系は局所銀河群の中心に... 対し、それぞれ動いていることを知っているが、CMB による固有運動の測定は、ある意味で「宇宙の絶対静止系」に対する速度を直接測定するものである。Lineweaver et al. (1996) による結果では、双極成分 $D = 3.358 \pm 0.001 \pm 0.0023$ mK、銀径 ℓ、銀緯 b における固有速度の方向は $(\ell, b) = (264°.31 \pm 0°.04 \pm 0°.16, 48°.05 \pm 0°.02 \pm 0°.09)$, 固有速度の大きさは $v = 369.0 \pm 2.5$ km s^{-1} である。

さらに 1 年後の 1992 年 9 月 1 日、とうとう歴史的な発見は報告されることになる。ゆらぎの検出である。実に $\Delta T = 30 \pm 5$ μK という微小なゆらぎを、COBE は見事検出に成功したのだった。この結果が意味するものは、あまりにも大きい。

† 私は偶然、Matsumoto et al. (1988) の共著者である松尾宏 助手 (野辺山) と共同研究を行なう機会を得たのだが、野辺山観測所での観測中ノイズに頭を悩ませる私に、松尾さんはウィスキー (だったかワインだったか) を片手に Matsumoto et al. の結果をふりかえりながら、系統的エラーの恐さを語ってくれた。それから私が、さらに慎重に観測データの解析をやりなおしたのは言うまでもない。

‡ 銀河団中のホットガスのスニヤエフ – ゼルドヴィッチ効果による CMB スペクトルの歪みは検出されている。

- **isotropy: “0th order” Horizon Problem**

  CMB が 10^{-5} の精度で等方であるとはどういうことか。COBE のビームサイズは 7° であるのに対し、LSS のホライズン半径は約 1° である。従って、COBE のビーム同士は LSS で何の因果関係も持たなかった領域を観測しているはずである。にもかかわらず、それらの温度が 10^{-5} のずれしかないというのは極めて不自然であり、これを地平線問題 (horizon problem) と呼ぶ。実は COBE の発見以前にも宇宙の一様等方性が観測的に示唆されており、ビッグバン理論の枠内で解決することのできない地平線問題は悩みの種であった。この問題は、1981 年に佐藤勝彦 (Sato 1981) と A. Guth (Guth 1981) によって独立に提唱された「インフレーション理論 (chapter 6)」によって解決された。これは、宇宙初期に急激な加速膨張 (インフレーション) を許すことにより、現在我々が観測する全てのスケールはインフレーション期にすでに因果関係を持っていたとするものである。

- **anisotropy: “1st order” Horizon Problem**

  「ゆらぎ」という言葉を使ってきたが、COBE の観測した「ゆらぎ」は単なる雑音、ホワイトノイズではなかった。れっきとしたスペクトルを持っていたのである。言い換えれば、COBE の観測しうるスケール 7° から全天にわたってゆらぎに相関が存在する、ということである。地平線問題に戻れば、LSS で何の因果関係も持てなかった領域同士に相関など存在するわけがないのである。前述の等方性に則した地平線問題では、初期条件として温度が一様な宇宙を与えれば (それが不自然なのだが) 説明できなくもない。しかし因果関係のないはずの領域に相関があるとなると、これは完全に矛盾である。もはや不自然とかそういう問題ではない。

- **initial amplitude of fluctuation**

  宇宙の構造形成を考える際、ゆらぎの進化は線形理論によって良く記述できる。例えば $\Omega_0 = 1$ の宇宙において、密度ゆらぎは $\delta \propto a(\tau)$ のように宇宙膨張のスケールファクターに比例して成長する。しかし、我々はその「初めの大きさ」を知らない。COBE は $z \approx 1000$ のゆらぎ、すなわちこの「初めの大きさ」を直接測定したのである。COBE/DMR の観測したゆらぎの大きさは ”COBE normalization” と呼ばれ、宇宙論業界のスタンダードなゆらぎの規格化として使われており、良く使われているのが Bunn & White (1997) である。ところが、COBE のビームサイズは 7° と LSS のホライズンよりも大きいため、銀河だなどの現在の構造の種を直接見ているわけ

ではない。小さいスケールのゆらぎの大きさを知ろうと思えば、遷移関数 (transfer function) と呼ばれる関数を用いて観測された大スケールのゆらぎから推定する他はなく、仮定した宇宙モデルに強く依存してしまう (chapter 3)。

実は COBE の観測したゆらぎはもっと重大な意味を持っている。何度も言うように、COBE のビームサイズは LSS のホライズンよりも大きい。よって COBE のスケールではインフレーション直後の初期条件がその後の物理過程によって何の影響も受けておらず、初期条件を完全に保存しているのである。つまり前述の「初めの大きさ」というのは、LSS よりもさらに以前、インフレーション期 (もしくは別の機構) によって生成された初期条件を指していることになる。この点に注目するならば、COBE の結果を用いて初期宇宙理論に制限を加えることが可能であり、私のモチベーションもそこにあった (chapter 7)。

1.5 after COBE

COBE のゆらぎの発見を受け、各地でゆらぎの検出を試みていたグループは一気に活気づいた。なにしろ、ゆらぎはあることが分かっているのである。検出できないはずはない。既に述べたように COBE 以前にはゆらぎの存在が予言されてはいたものの、上限値ではなくゆらぎの絶対値の検出を主張するには、地上観測のデータは信頼性に乏しかった。しかしもはやゆらぎは検出されたのである。こうなると、その後続々とゆらぎの検出の報告がなされるようになり、各国のグループ[§] はこぞって COBE が観測できなかった小さいスケールのゆらぎの測定に走りだした。

1.5.1 seeking first Doppler Peak !!

LSS でホライズンスケール以下の CMB のゆらぎは、初期条件を失っている。しかし、新たに物質の情報を持っている。ホライズン以下のスケールでは、CMB の光子はバリオンと強くカップルしており、単一の流体としてふるまっている。従ってバリオンが重力不安定性

[§] しかし、悲しいかな日本はその中には入っていない。私の知る限りでは、野辺山の松尾宏助手がミリ波干渉計で観測を試み、最も強い制限として $13'' \times 12''$ のビームで $\Delta T/T < 6 \times 10^{-3}$ を得たもの (松尾、石黒、岡保、田原 1991) と、早稲田大学の大師堂経明教授が自作の干渉システムで観測を試みているのが唯一である。ところで先ほどのエピソードでも紹介した松尾さんだが、おそらく国内では CMB の異方性を本気で検出しようとし、また観測実績もある唯一の電波観測家である。前述のミリ波干渉計での試みを、私は驚きと感動を持って聞いた。松尾さんと共同研究の機会を得る事ができたのは、本当に幸運であった。

に従って収縮しようとしても、光子の持つ放射圧のために押し戻され、結果として振動が始まる。最も圧縮されたところで CMB のゆらぎ ($\Delta T > 0$) の大きさはピークとなり、最も押し戻された点 ($\Delta T < 0$) でもピークを持つ。この振動の様子は、ちょうど光子流体のもつ音速の地平線 (sound horizon) 程度のところに最初の圧縮時のピークとして現れ、「ドップラーピーク (chapter 3)」と呼ばれている。角度にして約 $\theta \approx 1^\circ$ ($\ell \approx \pi/\theta \approx 200$) のスケールが LSS のホライズンに相当することは既に述べた通りであるが、光子流体の音速は光速の $1/\sqrt{3}$ でほぼ光速と同定度であるため、ドップラーピークも 1° 程度のところに現れる (chapter 3)。

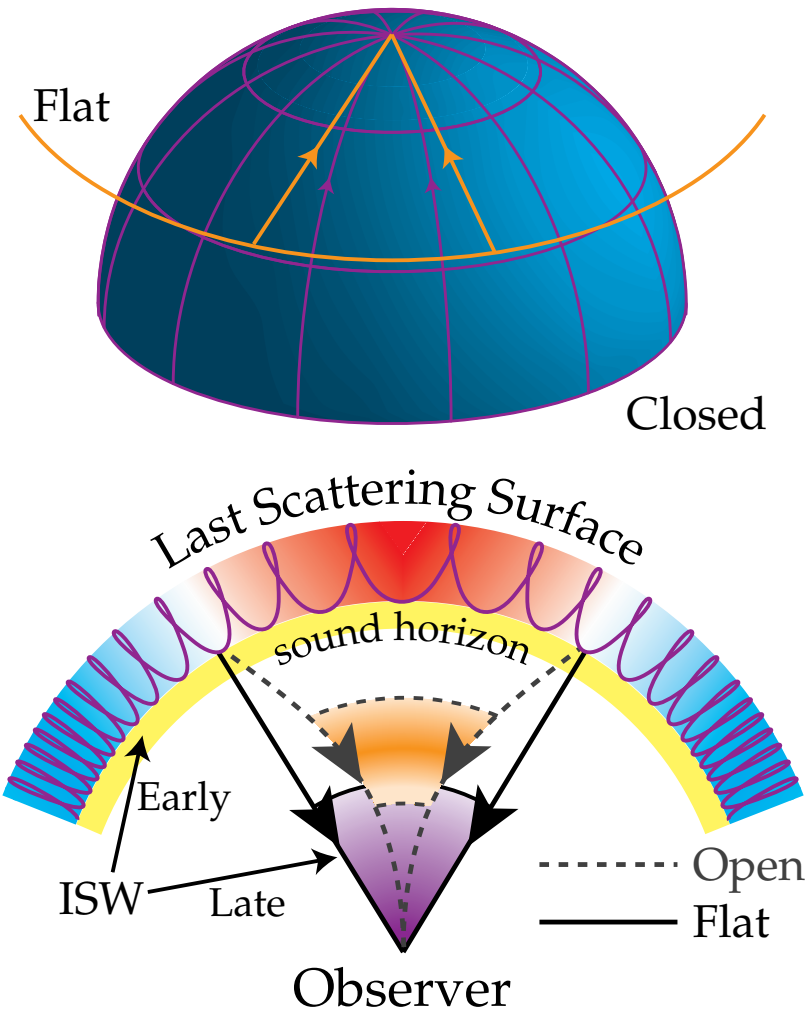
ところが、もし宇宙が平坦でなく開いていたとすると事情が変わって来る。開いた宇宙では光の経路は「直線」[¶] ではなく、2 点から発せられた光は互いに双曲的な経路を通るため、観測される 2 点間の角度は平坦な時空で測られるものよりも小さくなる。逆に、閉じた宇宙では大きな角度として観測する (図 1.1; chapter 3)。ドップラーピークの現れる物理的なスケール (音速の地平線) は分かっているので、実際に我々がどの角度にドップラーピークを検出するかにより、宇宙の幾何学を測定することができるのである (Hu, Sugiyama & Silk 1997)。

このドップラーピークを検出することが COBE 以降の最大の目的と言っていいだろう。まず名乗りを挙げたのが、バルーン観測による検出報告である。バルーンによって高度約 35 km まで上昇すれば、大気の影響を大きく減らすことができる。中でも勢力的かつ系統的な観測を行なっているのが、UC Berkeley, Caltech を中心とする MAX, MAXIMA, BOOMERanG、及び Princeton, NASA, Chicago 等が行なっている MSAM-I, MSAM-II, TOPHAT といった一連のバルーン観測計画である (Smoot 1997, pp.185, for review)。MAX と MSAM-I は既に数回のフライトを終えてゆらぎの検出を報告しているが、まだ精度に乏しく、フライトによって矛盾した結果を与えるなど模索の段階であった。MSAM-II は 1997 年 7 月 1 日、MAXIMA は 1998 年 8 月 1 日に打ち上げられ、現在データ解析中である。また、世界初となる CMB の長期間バルーン実験である BOOMERanG は 1998 年 12 月 29 日の打ち上げから 1999 年 1 月 10 日までの 250 時間 (!) の観測を無事終了し、こちらもデータ解析の途中である。これらの実験はこれまでのものとは感度や視野の上で格段の差があるため、結果が待たれるところである。

最近では Carnegie Mellon の誇る南極の望遠鏡群が興味深い結果を報告している。現在 Python (口径 0.85-m), White Dish (1.4-m), Viper (2-m) という 3 つの望遠鏡があり、う

[¶] もちろん、測地線に沿っているという意味では直線である。

図 1.1: 宇宙の幾何学の違いによる、見込み角の変化。Wayne Hu のホームページ (http://www.sns.ias.edu/~whu/) より引用した。Hu, Sugiyama & Silk (1997) にも同じ図が使われている。上のパネルは閉じた宇宙と平坦な宇宙、下は開いた宇宙と平坦な宇宙の光線の経路の比較である。閉じた宇宙の場合、同じ角度で見込むスケールは平坦な場合に比べて小さくなる。つまり、同じスケールのものであれば大きな角度で見込むことになる。開いた宇宙の場合は逆に、同じスケールのものを観測すると小さな角度で見込むことになる。これらは純粋に幾何学のみによった効果である。



ち Python, White Dish はすでに観測を終えて結果が報告されている (Tucker et al. 1993; Coble et al. 1999)。残る Viper も観測を行なった。結果はまだ出版されていないものの、1998 年 12 月にパリで行なわれた Texas Symposium において Viper チームはドップラーピークの検出を報告した (Science, 283, 21 (1999); 図 1.2)。確かにデータはピークの存在を示しており、ピークの位置より宇宙が平坦であることが示唆されているように見える。実はこれ以前にも、カナダの Saskatoon (SK) telescope による観測によって $\ell \approx 200$ でピークのトップらしきゆらぎが検出されており (Netterfield et al. 1997)、Cambridge の干渉計、"CAT" によって $\ell \approx 500$ で SK よりも相対的に有意なゆらぎの落ちが報告されている (Scott et al. 1996)。しかし今回の Viper の観測は、「同一の観測で」ピークを見出すに至った点で信頼性があり、SK/CAT と合わせるとどうやら宇宙は平坦であるように思える。前述の MAXIMA, BOOMERanG の観測が成功していれば Python/Viper を超えるクオリティのデータが取れていると期待されるので、結果を待ちたいものである。

1.5.2 toward much smaller scales: another side of CMB

ドップラーピーク $\theta \approx 1^\circ$ よりもさらに小さい角度スケールに行くと、プライマリな CMB は減衰してしまう (chapter 3)。その代わりとして、LSS 以降に生成されるセカンダリなゆらぎが卓越してくると考えられている。主な効果としては、

- Rees-Sciama effect

  非線形構造が形成されると重力ポテンシャルが時間変化し、光子は断続的な赤方/青方偏移を受けて温度変化を生じる (図 3.9)。

- Ostriker-Vishniac effect

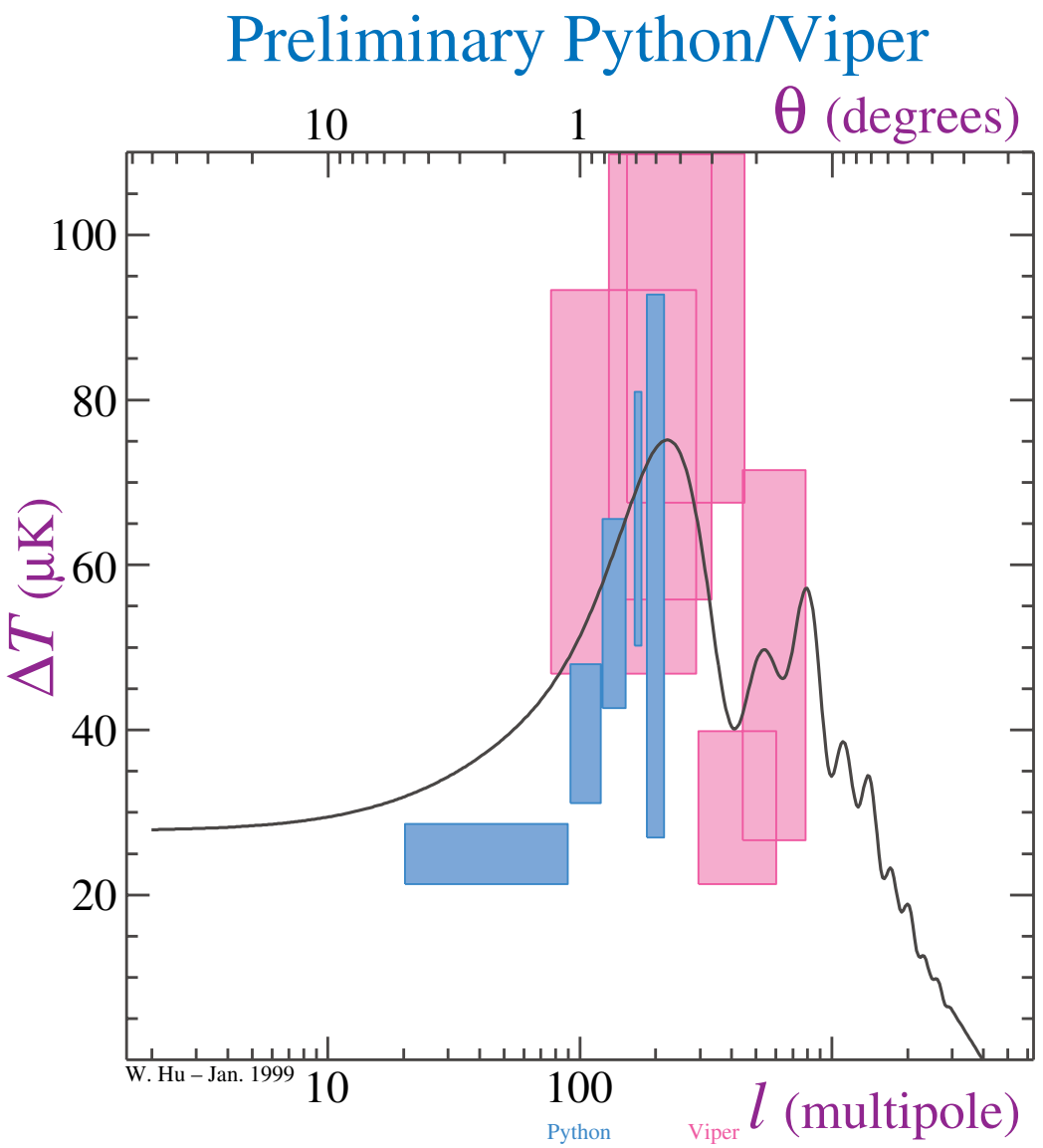
  宇宙が再イオン化すると、再び自由電子によって光子はトムソン散乱を受ける。その際、電子の持つ固有速度によって光子はドップラーシフトを受け、温度変化を生じる (図 3.7)。

- Sunyaev-Zel'dovich (SZ) effect

  銀河団の高温電子ガスによる SZ 効果によって CMB のスペクトルは歪められ、結果として温度変化を生じる (図 5.2)。

- Lensing effect

図 1.2: Viper, Python によるドップラーピークのマージナルな検出。Wayne Hu のホームページ (http://www.sns.ias.edu/~whu/) より引用した。データ点は Science, 283, 21 (1999) の図のものである。ドップラーピークの両側にわたるデータが Viper の観測。縦の幅は 1σ エラーバー、横の幅はウィンドー関数の半値幅である。実線はモデルであり、$\Omega = 1.0$, $\Omega_b h^2 = 0.025$, $h = 0.5$ である。Science 誌は、「宇宙は平坦であった」と報じている。



非一様な宇宙を光が伝播すると、ほぼ確実に重力レンズ効果を受けて経路を変える。これは一種の散乱現象としてとらえることもでき、結果としてゆらぎのスペクトルはわずかにスムーズされる (図 3.12)。

等が挙げられる。これらの効果は全て LSS の物理とは無関係な効果であり、独自の情報を CMB にプリントしている。従って小さな角度スケールの CMB ゆらぎは種々の効果のごった煮であり、それぞれを分離することは極めて難しい。しかし SZ 効果だけは波長依存性を持っているため、多波長観測によって分離が可能である (Hobson et al. 1998)。この特徴を生かし、SZ ゆらぎによって銀河団スケールのゆらぎの大きさを決められる可能性がある (chapter 5)。

現在の観測では、CAT ($\ell \approx 500$) よりも小スケールのゆらぎを検出したという公式な例はなく、もっぱら上限値が得られているのみである (e.g., Subrahmanyan et al. 1998)。ところが、非公式には Caltech の "SuZIE" が 2 領域において $\ell \approx 2300$ に温度ゆらぎ $\Delta T = 14 \pm 7$, 24 ± 6 μK を検出したと報告している (SuZIE ホームページ: http://astro.caltech.edu/ lgg/suzie/suzie.html)。有意性は低いが、(おそらくプライマリ以外の)「何か」が検出されたとすれば、極めて驚きである。このゆらぎの正体を明らかにするためにはもはや単一の波長で観測しているだけではダメで、多波長の観測によって何の寄与によるものかをつきとめねばならない。

1.6 beyond COBE

やはり、最後には衛星の御登場となる。COBE よりも分解能を上げることにより、1st ドップラーピークはおろか、2nd, 3rd までを高精度で測定し、Ω_0, Ω_b, λ_0, h... と、あらゆる宇宙論パラメターを決定しようという計画である。現在打ち上げが予定されている衛星は、NASA の MAP(= Microwave Anisotropy Probe)、ESA の Planck である。特に、MAP は 2000 年 9 月の打ち上げが決定しており、今や打ち上げまで秒読み段階である[‖]。一方の Planck は、一応打ち上げが 2007 年となっているものの、予算上の都合によって計画が伸び伸びになっており[**]、挙げ句の果てには ESA が計画しているもう一つの宇宙望遠鏡: FIRST (= Far Infrared Submillimeter Telescope) と抱き合わせて打ち上げる案まで持ち上がっている始末である。

[‖] すなわち、ドップラーピークのみを狙った CMB 地上観測の寿命がもう秒読みということになろう。

[**] 私が知っているだけでもすでに 4 年伸びている。本当に上がるのだろうか。

1.6.1 MAP

MAP は HEMT 受信器によって 5 バンドの観測を行う。基本性能は以下の通りである:

バンド名	K	Ka	Q	V	W
周波数 (GHz)	22	30	40	60	90
波長 (mm)	13.6	10.0	7.5	5.0	3.3
分解能 (FWHM, arcmin)	56	41	28	21	13
ΔT (μK)	26	32	27	35	35

バンド数が多ければ多いほど CMB 以外の成分を確実に取り除けるため有利である。MAP は 27ヵ月間のオペレーションが予定されている (うち、3ヵ月間は観測点までの移動に使われる) が、ΔT は 1 年間の観測で達成される 1 ピクセル ($18' \times 18'$) あたりのノイズレベルである。

着目すべきは分解能である。というのも、どれだけ小スケール (大きな ℓ) まで観測できるかは、直接宇宙論パラメターの決定精度に響くからである。極端なことを言えば、ファーストドップラーピークしか観測できなかった場合、宇宙の曲率 ($\Omega_0 + \lambda_0$) 以外の情報はほとんど手に入らない。図 1.3 に MAP のノイズレベルを示す。もし宇宙が平坦であれば (それはもうすでに分かりかけているが)、3rd ピークまでは非常に良く決められることが分かる。3rd ピークまで測定できれば $\Omega_0 + \lambda_0$, $\Omega_b h^2$, $\Omega_0 h^2$ のセットを良く決めることができる (chapter 3)。

1.6.2 PLANCK

Planck の検出器は低周波検出器 (LFI = Low Frequency Instrument) と高周波検出器 (HFI = High Frequency Instrument) に分かれている。Planck のオペレーションは 14ヵ月であり、その間に全天を 2 回掃く予定である。

- **LFI**

  LFI は MAP 同様 HEMT 受信器である。観測周波数は 4 バンドであるが、うち 3 つ (31.5, 53, 90 GHz) は COBE/DMR のバンドと全く同じであり、Planck のマップと COBE のマップを直接比較するのに用いられる。

周波数 (GHz)	31.5	53	90	125
波長 (mm)	9.5	5.7	3.3	2.4
分解能 (FWHM, arcmin)	30	18	12	12
ΔT (μK)	20.8	18.9	31.9	64.5
ΔI_ν (mJy)	37.8	35.1	76.1	297.6

ΔT, ΔI_ν はそれぞれ 14ヵ月の観測で得られるピクセルあたりの温度及びフラックスのノイズレベルである。ただし、1 Jy $= 10^{-23}$ erg s^{-1} cm^{-2} Hz^{-1}。

- **HFI**

  HFI にはボロメータが使われており、観測周波数は 5 バンドである。高周波なので分解能が良く、CMB ゆらぎの観測は HFI がメインとなる。

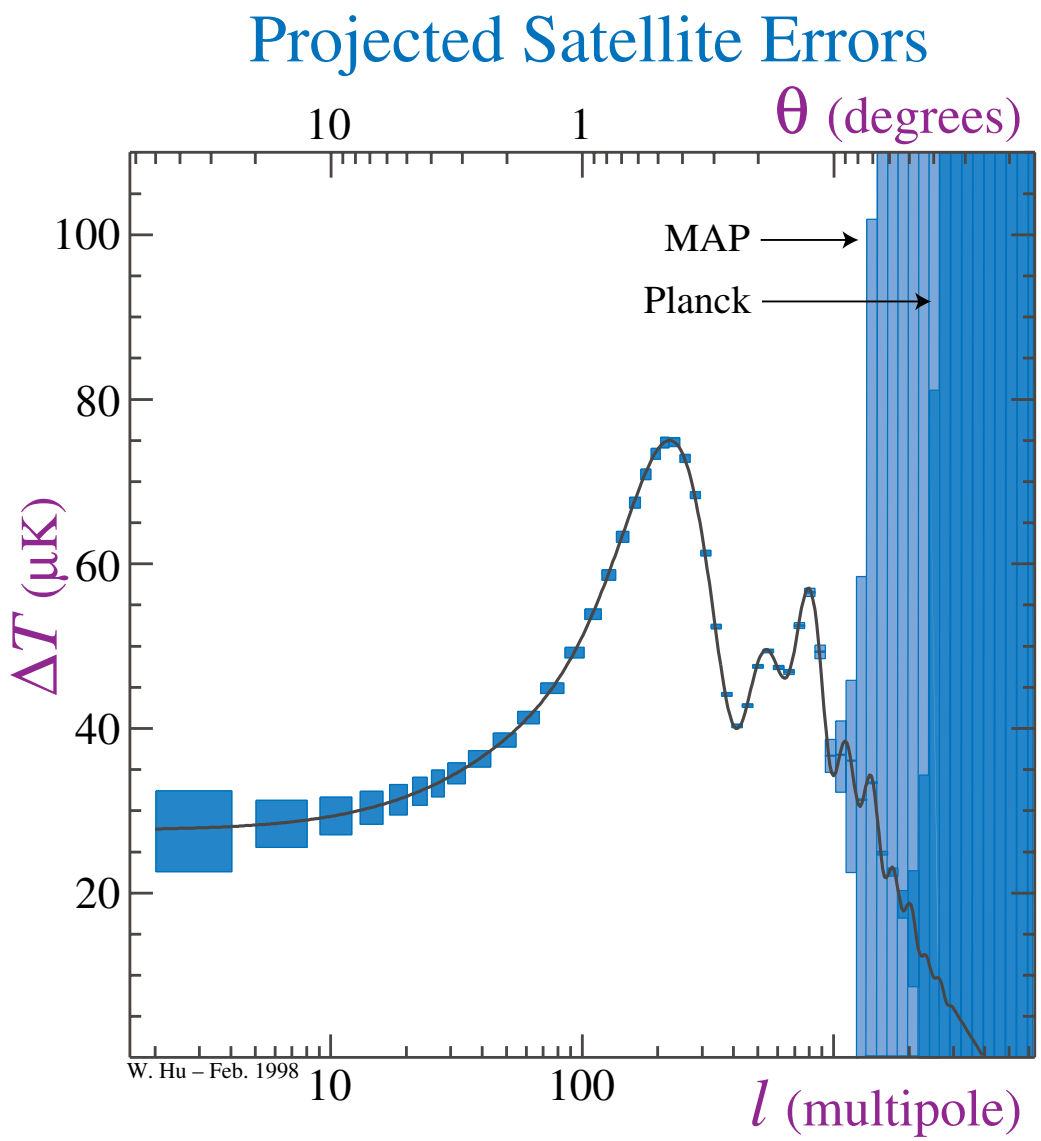
周波数 (GHz)	150	217	353	545	857
波長 (mm)	2.0	1.38	0.85	0.55	0.35
分解能 (FWHM, arcmin)	10.29	7.11	4.37	4.37	4.37
ΔT (μK)	3.3	5.5	33.0	209	11365
ΔI_ν (mJy)	11.3	11.4	15.8	19.3	26.4

高周波側で ΔT が急激に上がっているが、このような高周波はウィーン領域であり、少し温度が変わっただけでも輝度が大きく変わるため、「温度」によってあらわすのはあまり適当ではない。150, 217, 353 GHz はフラックスで測ったスニヤエフ – ゼルドヴィッチ (SZ) 効果がそれぞれ負で極大、ゼロ、正で極大となる周波数であり、SZ を観測するのにはベストな周波数である (図 5.1)。

図 1.3 に Planck のノイズレベルを示す。やはり重要なのは分解能である。$\ell \approx 2000$ まで測定が可能であるから、重力レンズ効果によるスムージングや高次のドップラーピークの詳細な変化によって、宇宙論パラメターの決定精度は MAP よりも格段に向上し、中には 1 オーダー良く決まるものもある。Planck が打ち上げられて観測が行なわれれば、ほとんどの宇宙パラメターが 10% 以下の精度で求められる (Bond, Efstathiou & Tegmark 1997)。

あと Planck に残された問題は、どうやって打ち上げるかだけである (が、それが一番本質的である)。

図 1.3: MAP,Planckの観測によるノイズレベルと、CMBのパワースペクトルの比較。Wayne Hu のホームページ (http://www.sns.ias.edu/~whu/) より引用した。ℓ が小さいところでのエラーの増加は、ℓ が小さいほどサンプル数が少なくなっていくことによるコスミック – ヴァリアンスである。ドップラーピークを含む中盤の ℓ では非常に良くスペクトルを測定できるが、ビームサイズに対応する ℓ 以降は指数関数的にエラーが増大する。



1.7 toward polarization measurements

CMB は直線偏光していることが理論的に予言されているが、未だ検出報告はない。それは期待される偏光度が 10^{-6} と非常に小さいためである。しかし偏光の測定からは、温度ゆらぎから得ることのできない重要な情報を引き出すことができる (e.g., Hu & White 1997a; Zaldarriaga 1998; Crittenden, Davis & Steinhardt 1993)。

- **tensor-scalar ratio**

  温度ゆらぎの観測では、密度ゆらぎに起因するスカラーモードと重力波に起因するテンサーモードの寄与の和が観測されるため、両者を分離することはできない。一方偏光の観測では、スカラーモードとテンサーモードを分離することが可能である。偏光にはパリティの異なる互いに独立なモード (E, B モード) が存在するが、スカラーモードが E モードしか生成しないのに対し、テンサーモードは B モードも生成する。従って E, B モードを独立に測定することによって両者を分離でき、テンサーモードとスカラーモードのパワー比を測定できるのである (chapter 3)。この比は初期ゆらぎを生成するメカニズムによって決められているはずであり、インフレーション理論はモデルによって異なる比を予言する (chapter 6)。すなわち偏光度の測定は、温度ゆらぎよりもさらに直接的な初期宇宙理論の検証となるのである。

- **reionization history**

  また偏光のスペクトルは、宇宙の再イオン化のヒストリーに非常に敏感に依存している。宇宙がある赤方偏移 z_{ion} で再イオン化したとすると、z_{ion} に新たな LSS ができることになる。そこで CMB は再び電子による散乱を受け、偏光が生成されるのである。スペクトルの上では、現在付近で起こる効果のため見込む角スケールは大きくなり、$\ell < 50$ 程度のところに顕著なハンプができる。

  温度ゆらぎのスペクトルではあまり早期 ($z_{ion} > 100$) に再イオン化が起こればドップラーピークが消されてしまうが、比較的近傍で再イオン化が起こった場合、再イオン化の寄与を識別することは困難である (図 3.6)。しかし偏光の測定では、イオン化が起こると本来ほぼゼロである $\ell < 10$ の偏光が生成されるため、より再イオン化の寄与に敏感なのである。

しかし問題は偏光度が非常に小さいことである。偏光を生成するソースは LSS における電子のまわりの 4 重極の温度異方性パターン Θ_2 のみである。しかし LSS では光子と電子

のカップリングが強いため Θ_2 はダンプさせられ、結果生成される偏光度はオーダーとして 10^{-6}、つまり $10^{-4}\%$ である[††] 。MAP の感度では偏光の存在をキャッチすることはできても、正確な測定には至らない (図 1.4)。しかし Planck であれば充分な感度で測定可能である (図 1.5)。

2 The Sunyaev-Zel'dovich Effect

2.1 30 years ago ...

Penzias & Wilson の CMB 発見から 5 年後の 1969 年。旧ソ連の Zel'dovich と Sunyaev は、高温の電子による逆コンプトン散乱によって電子のエネルギーが光子に輸送され、CMB の黒体放射スペクトルが歪められる可能性を議論した (Zel'dovich & Sunyaev 1969)。一方 X 線観測より、銀河団中には高温 ($T_e \sim 10^8$ K) の電子ガスが存在していることが知られていたため、銀河団中における CMB の黒体スペクトルの歪みの観測可能性が示唆された (Sunyaev & Zel'dovich 1972)。これはスニヤエフ – ゼルドヴィッチ (SZ) 効果と呼ばれ、観測可能な CMB のスペクトル変形として、最も重要な効果である。その後、かみのけ座銀河団 (Coma cluster) において SZ 効果による CMB の輝度減少の検出が報告された (Pariiskii 1973) が、信頼のおける測定がなされるようになったのは 1980 年代半ば頃からである。

SZ 効果の最たる特徴は、その波長依存性である。相対論的な補正を無視すれば、$\nu = 217$ GHz において SZ 効果はゼロであり、それよりも低周波 (レイリー – ジーンズ領域) では CMB の輝度が減少 $\Delta I_\nu < 0$ し、逆にウィーン領域では上昇 $\Delta I_\nu > 0$ する (図 5.1)。

2.2 "first" detection of the submillimeter SZ effect

典型的な銀河団においては、レイリージーンズ領域での温度変化が $\Delta T_{SZ} \approx 0.2$ mK 程度である。CMB の温度ゆらぎ $\Delta T \approx 30\ \mu\mathrm{K} = 0.03$ mK に比べれば 1 オーダー大きいとはいえ、困難な観測であることは確かである。従って、電波観測において観測が最も容易なセンチ波による観測が行なわれ、レイリー – ジーンズ領域における SZ の輝度減少は多くのクラスターで検出されてきた (e.g., Jones et al. 1993)。しかし、輝度上昇はサブミリである。CMB の黒体スペクトルの測定の時と同様、またしてもサブミリの壁 (要するに大気

[††] よく、CMB に生成される偏光は温度ゆらぎの 10% という記述を目にするが、これは誤解を招く表現である。「偏光度」はあくまでも $10^{-4}\%$ である。

図 1.4: MAP による偏光への感度。再イオン化した宇宙における、E モードの偏光度スペクトルがプロットされている。Wayne Hu のホームページ (http://www.sns.ias.edu/~whu/) より引用した。縦軸が log スケールであることに留意する。小角度スケール $\ell \approx 1000$ へゆくほど偏光度が大きいのは、LSS において小スケールでは光子と電子のカップリングが完全ではなくなり、偏光のソースとなる電子のまわりの温度 4 重極パターン Θ_2 が生成されるからである。一方、対応する温度ゆらぎがダンプしているのは、電子から見たモノポール Θ_0 がカップリングが弱くなることによって拡散減衰を受けるからである。偏光であっても、さらに小スケールではソースが拡散減衰を受けてダンプするため、同様にダンプする。$\ell < 10$ の偏光の増加は、宇宙の再イオン化によって現在近くで再び光子が電子に散乱され、新たな偏光が生成されることによる。ℓ が小さいところでのエラーの増加は、ℓ が小さいほどサンプル数が少なくなっていくことによるコスミック – ヴァリアンスである。MAP の感度では偏光の正確な測定には至らないが、宇宙の再イオン化による寄与は検出できる可能性がある。

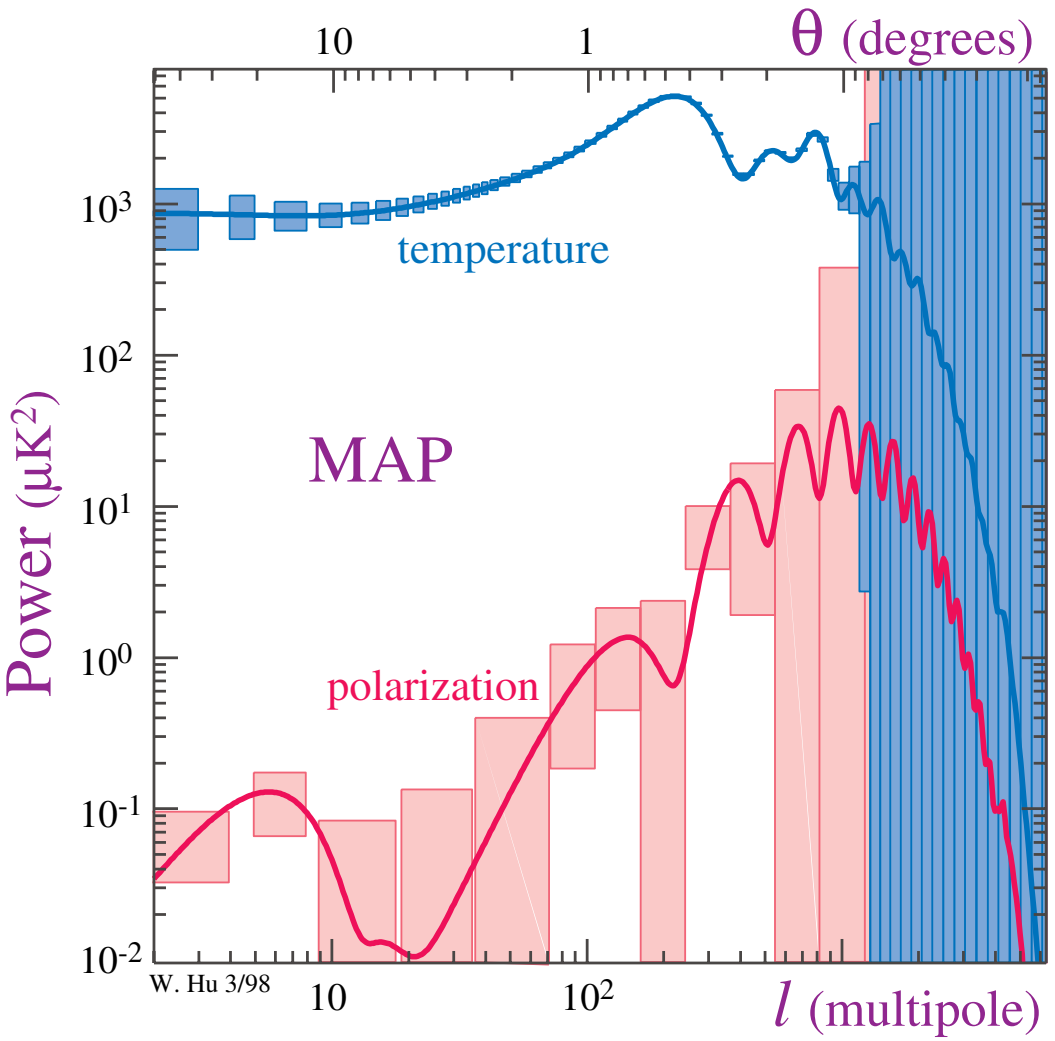
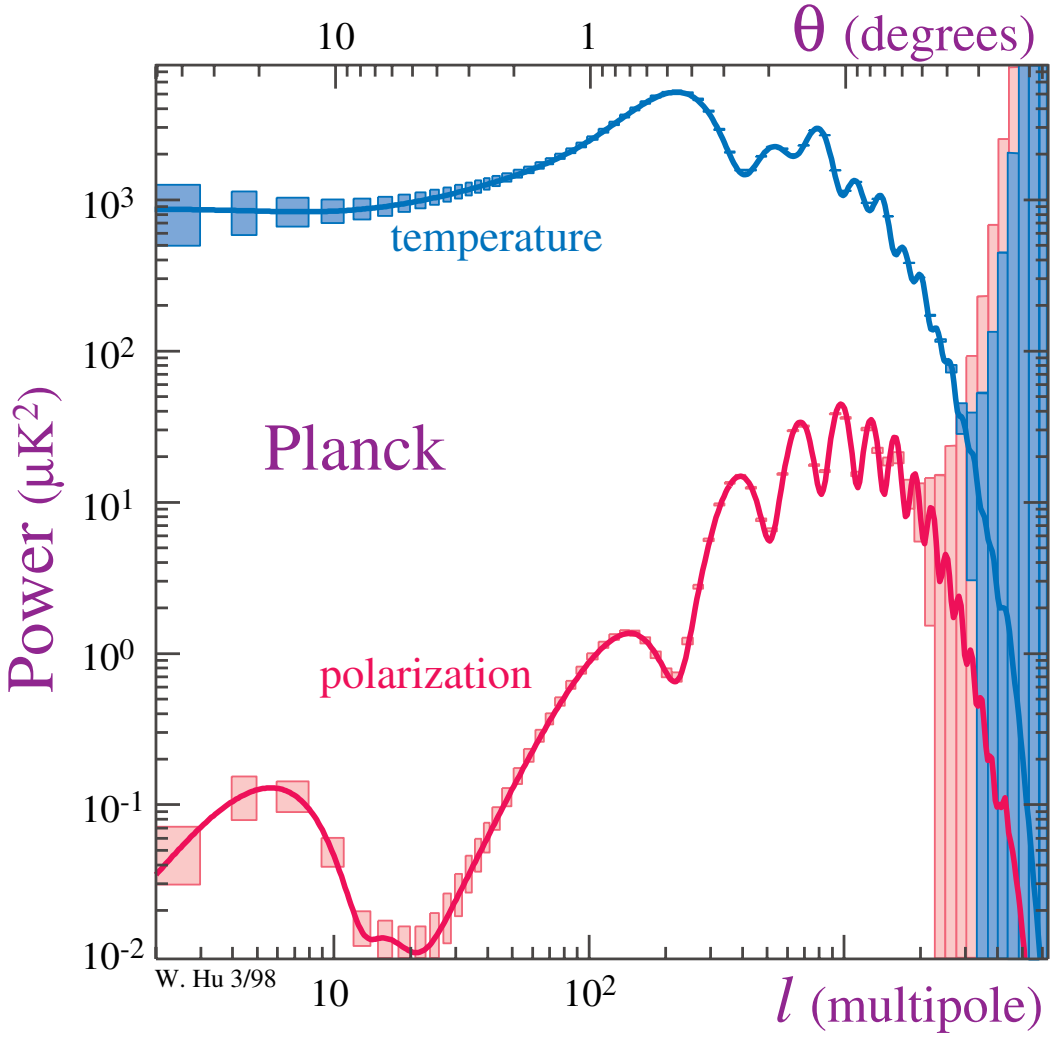


図 1.5: Planck による偏光への感度。Wayne Hu のホームページ (http://www.sns.ias.edu/~whu/) より引用した。Planck の感度は劇的である。これだけの精度で観測できれば、再イオン化のヒストリーのみならず、重力波によるテンサーモードの寄与をスカラーモードとは独立に測定可能となる。また、スペクトルの詳細は温度ゆらぎと同様に様々な宇宙パラメターに依存しており、温度ゆらぎと偏光の情報を組み合わせることによってさらにパラメターの決定精度を上げることができる。



の壁) が立ちふさがるのだった。

それでもいくつか検出報告はなされていた (Andreani et al. 1996, 1999; Holzapfel et al. 1997; Lamarre et al. 1998)。これらは全てビームサイズがクラスターサイズと同程度である。ところがクラスターのフィールドには、必ずと言っていいほどサブミリソースが存在していることが分かってきている (Smail, Ivison & Blain 1997; Smail et al. 1998; Hughes et al. 1998; Barger et al. 1998)。つまりこれまでの検出例では、受けたシグナルが SZ のものであるのか、それとも他のサブミリソースのものであるかを判断できない。そこで高分解のマッピング観測が不可欠となるのである。

私は 1998 年の 2 月末、東北大学の服部 誠助手に声をかけられて東京大学の須藤 靖助教授をリーダーとするサブミリ SZ の検出プロジェクトに加わった[‡‡] 。ターゲットクラスターは、RXJ1347-1145 である。これは全天で最も明るい X 線銀河団であり (Schindler 1995; Schindler, Hattori, Neumann & Böhringer 1997) 、SZ を検出するのには最も適していた。まず野辺山宇宙電波観測所にて 21, 43, 150GHz のバンドでレイリージーンズ側の SZ を測定し、本番はハワイ島の JCMT で 350GHz の観測を行なった。天候に恵まれず予想以上のノイズレベルに苦しんだが、マッピング観測の利点を存分に生かすことで、無事 SZ の輝度上昇の検出にこぎつけたのである (Komatsu et al. 1999; Appendix M)。マッピング観測の利点というのは、前述のように SZ 以外のサブミリソースを同定して除けることもあるが、何といってもラディアルプロファイルを描く事ができる点である。これにはもちろんクラスターが球対称であるという仮定が必要だが、我々が今トライしようとしている問題は SZ による輝度上昇が「あるのかないのか」であり、0 次近似の球対称の仮定は妥当であると思われた。ノイズレベルはクラスター中心で期待される最大の SZ と同程度 (8 mJy/beam) であり、1 ピクセルあたりのシグナルはおそらく 0.5σ にも満たないであろう酷いものであったが、ラディアルプロファイルを描いてみると見事に中心へ向かってシグナルが受かっていたのである (Appendix M の Fig.3)。しかもそのプロファイルは、X 線の観測から期待される SZ のプロファイルと一致していた (Appendix M の Table.1, Fig.4)。

Zel'dovich & Sunyaev の予言から実に 30 年。とうとう SZ 効果は両目が開いたのである。

[‡‡] とはいえ、観測など全くのド素人である。それでも、学部 4 年の終わり頃からすでに魅せられていた CMB を、自分で検出するチャンスをもらえたのである。二つ返事で参加し、その日から (しかしすでに深夜であった) とにかく電波観測の基礎を勉強することになった。4 年次に二間瀬教授に Partridge (1995) の教科書を読むようすすめられて読破していたことが、この時非常に役に立った (正直、4 年次には観測を自分でやるとは夢にも思わなかったので、観測の章は苦痛だった)。

第2章　Photon Transport Equations

基礎方程式である、偏光を含めた光子の輸送方程式を多重極展開して書き下す。光子の伝播は一般相対論的なボルツマン方程式によって記述される (Appendix F)。温度ゆらぎ $\Theta \equiv \Delta T/T$、ストークスパラメター Q, U, V を定義すれば、輸送方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \Theta \\ Q+iU \\ Q-iU \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_C^{\Theta} \\ \mathcal{G}_C^{Q+iU} \\ \mathcal{G}_C^{Q-iU} \\ \mathcal{G}_C^{V} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

と形式的に書き下せる。τ は共形時間 (conformal time) * で、一様等方膨張のスケールファクター $\bar{a}$ を用いて物理的な時間 t と $d\tau = dt/\bar{a}$ という関係で結ばれている。バーのついている量は、摂動を含まない量である。Q, U は直線偏光を記述するストークスパラメターであり、座標系の反時計まわり (右ねじ) 回転 ϕ に対し、$(Q \pm iU)' = e^{\mp 2i\phi}(Q \pm iU)$ のように変換される。従って、$Q \pm iU$ はスピン 2 を持つ場である。V は円偏光を記述しており回転不変、温度ゆらぎ Θ も回転不変である。$\mathcal{G}$ はソース関数であり、

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_C + \mathcal{G}_{SW} + \mathcal{G}_{bend} + \mathcal{G}_{others}$$

と分けたとき

- $\mathcal{G}_C$: コンプトン散乱による電子との相互作用
- $\mathcal{G}_{SW}$: 重力赤方偏移 (ザクス – ヴォルフェ効果 (Sachs & Wolfe 1967))
- $\mathcal{G}_{bend}$: 重力レンズ効果などによる光子の経路変化
- $\mathcal{G}_{others}$: 制動放射 (bremsstrahlung), シンクロトロン (synchrotron) 放射, ダスト (dust) 放射 など、フォアグラウンドのソース。

などを記述する。$\mathcal{G}_{others}$ はプライマリな CMB とは関係ないのでここでは考えない。

* chapter 6 までは、一貫して共形時間によって議論をすすめる。従って対応する全ての Appendix において $\bar{N} = \bar{a}$ ととる。N はラプス関数である。

1 Before Multipole Expansion

(2.1) を、各々の成分に分けて

$$\dot{\Theta} + \bar{\gamma}^k \frac{\partial \Theta}{\partial x^k} = \mathcal{G}_{SW} + \mathcal{G}_C^{\Theta}, \tag{2.2}$$

$$(Q \pm iU)^{\cdot} + \bar{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k}(Q \pm iU) = \mathcal{G}_C^{Q \pm iU}, \tag{2.3}$$

$$\dot{V} + \bar{\gamma}^k \frac{\partial V}{\partial x^k} = \mathcal{G}_C^{V} \tag{2.4}$$

と書き下す。$\bar{\gamma}^k$ は非摂動次の光子の伝播方向をあらわす方向余弦であり、$\delta_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l = 1$ である。ドットは τ に関する偏微分 $(= \partial/\partial\tau)$ である。

1.1 gravitational sources: Sachs-Wolfe effect

まず、重力赤方偏移によるソース関数を具体的に書き下してゆく。詳細は Appendix F に譲るが、$\mathcal{G}_{SW}$ はメトリックの線形摂動 $h_{\mu\nu} \ll 1$:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \bar{a}^2(-1 + h_{00})d\tau^2 + 2\bar{a}^2 h_{0i} d\tau dx^i + \bar{a}^2(\gamma_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \tag{2.5}$$

を用いて

$$\mathcal{G}_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k + \frac{1}{2}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{2.6}$$

ただし、観測者として流体素片と共に運動する観測者を採用した (F.64)。これは現実の我々に対応するものであり、観測量を計算する際にはこれ以外の選択は許されない。γ_{ij} は、無摂動次の宇宙膨張を抜いた 3 元空間メトリックテンサーである。縦のバーは 3 次元共変微分をあらわす。Appendix D に従い、摂動をスカラー, ベクター, テンサーモード :

$$h_{00}^{(S)} = -2AQ^{(0)}, \tag{2.7}$$

$$h_{0i}^{(S)} = -B^{(0)}Q_i^{(0)}, \tag{2.8}$$

$$h_{ij}^{(S)} = 2H_L Q^{(0)}\gamma_{ij} + 2H_T^{(0)}Q_{ij}^{(0)}, \tag{2.9}$$

$$h_{0i}^{(V)} = -B^{(1)}Q_i^{(1)}, \tag{2.10}$$

$$h_{ij}^{(V)} = 2H_T^{(1)}Q_{ij}^{(1)}, \tag{2.11}$$

$$h_{ij}^{(T)} = 2H_T^{(2)}Q_{ij}^{(2)} \tag{2.12}$$

に分ける。物理的にはスカラーモードは密度ゆらぎ、ベクターモードは渦、テンサーモードは重力波である。それぞれについて $\mathcal{G}_{SW}$ を書き下せば、

$$\mathcal{G}_{SW}^{(0)} = -\dot{H}_L Q^{(0)} + \left(kA + \dot{B}^{(0)}\right) Q_k^{(0)} \bar{\gamma}^k - \dot{H}_T^{(0)} Q_{kl}^{(0)} \bar{\gamma}^k \bar{\gamma}^l, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{G}_{SW}^{(1)} = \dot{B}^{(1)} Q_k^{(1)} \bar{\gamma}^k - \dot{H}_T^{(1)} Q_{kl}^{(1)} \bar{\gamma}^k \bar{\gamma}^l, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{G}_{SW}^{(2)} = -\dot{H}_T^{(2)} Q_{kl}^{(2)} \bar{\gamma}^k \bar{\gamma}^l. \tag{2.15}$$

$Q^{(m)}$ はラプラシアンの固有関数である。

1.2 scattering sources: temperature & polarization

次に、光子と電子のコンプトン散乱によるソース関数を求める。ただし、コンプトン散乱によるソースはエネルギー輸送が起こらない完全弾性散乱のオーダー、つまりトムソン散乱の極限をとる。Appendix G より

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_C^{\Theta} = & -\dot{\tau}_c \Theta + \dot{\tau}_c \int d\tilde{\Omega} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tilde{Y}_0^0 \ \tilde{\Theta} \\
& + \dot{\tau}_c \gamma_k v_b^k \\
& + \dot{\tau}_c \int d\tilde{\Omega} \sum_m \frac{1}{10} \Big[\tilde{Y}_2^{m*} Y_2^m \ \tilde{\Theta} \\
& \qquad - \sqrt{\frac{3}{2}} \ {}_2\tilde{Y}_2^{m*} Y_2^m \left(\tilde{Q} + i\tilde{U}\right) \\
& \qquad - \sqrt{\frac{3}{2}} \ {}_{-2}\tilde{Y}_2^{m*} Y_2^m \left(\tilde{Q} - i\tilde{U}\right) \Big],
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_C^{Q \pm iU} = & -\dot{\tau}_c (Q \pm iU) \\
& + \dot{\tau}_c \int d\tilde{\Omega} \sum_m \frac{1}{10} \Big[-\sqrt{6} \ \tilde{Y}_2^{m*} {}_{\pm 2}Y_2^m \ \tilde{\Theta} \\
& \qquad + 3 \ {}_2\tilde{Y}_2^{m*} {}_{\pm 2}Y_2^m \left(\tilde{Q} + i\tilde{U}\right) \\
& \qquad + 3 \ {}_{-2}\tilde{Y}_2^{m*} {}_{\pm 2}Y_2^m \left(\tilde{Q} - i\tilde{U}\right) \Big],
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_C^V = & -\dot{\tau}_c V \\
& + \dot{\tau}_c \int d\tilde{\Omega} \sum_m \frac{1}{2} \tilde{Y}_1^{m*} Y_1^m \ \tilde{V}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Y_l^m は球面調和関数、${}_{\pm 2}Y_l^m$ はスピン ± 2 の調和関数 (Appendix I)、τ_c はトムソン散乱の光学的深さ (optical depth)、v_b はバリオンの集団運動速度 (bulk velocity) である。チルダー

のついた量は散乱前の座標 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ で定義される量である。$Q \pm iU$ は回転に対してスピン 2 の変換性を持つので ${}_{\pm 2}Y_l^m$ で記述されるのである。

2 After Multipole Expansion

次のステップは電子の散乱過程を「電子から見た」温度パターンや偏光のパターンとして記述するため、電子の天球座標 (θ, ϕ) に関する多重極展開を行なうことである。Appendix H に従って (Θ, Q, U, V) を展開すれば、

$$\Theta(\tau, x^i, \gamma^i) = \sum_{\ell,m} \Theta_\ell^{(m)}\ {}_0G_\ell^m(x^i, \gamma^i), \tag{2.19}$$

$$(Q \pm iU)(\tau, x^i, \gamma^i) = \sum_{\ell,m} \left(E_\ell^{(m)} \pm iB_\ell^{(m)}\right)\ {}_{\pm 2}G_\ell^m(x^i, \gamma^i), \tag{2.20}$$

$$V(\tau, x^i, \gamma^i) = \sum_{\ell,m} V_\ell^{(m)}\ {}_0G_\ell^m(x^i, \gamma^i). \tag{2.21}$$

$m = 0, 1, 2$ はそれぞれスカラー, ベクター, テンサーモードに対応している。これまでは空間の曲率に対して何の制限もしていなかったが、議論を簡単化するためにこれより平坦な時空 $(\kappa = 0)$ を考える。ただし、任意の曲率 $\kappa \neq 0$ を持つケースには Appendix H によって一般化可能である。モード関数 ${}_sG_\ell^m$ の具体的な形は (H.3):

$${}_sG_\ell^m = (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, {}_sY_\ell^m(\gamma^i) \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}). \tag{2.22}$$

$Q \pm iU$ を $E_\ell^{(m)}$, $B_\ell^{(m)}$ で展開したのには、もちろん訳がある。Appendix I でも触れているが、スピン 2 の調和関数 ${}_2Y_\ell^m$ は $(-1)^\ell$, $(-1)^{\ell+1}$ と異なるパリティを持つモードを持っている。そこでパリティの異なるモードを E モード (electric mode)、B モード (magnetic mode) として定義したのである。このパリティ変換性は、以下のようにして調べることができる。

2.1 parity: electric & magnetic modes

$Q + iU$ にスピン下降オペレータ $\bar{\eth}$ を 2 つかけ、スピン 0、すなわち回転不変な場を作る (I.16) – (I.20):

$$\bar{\eth}^2(Q + iU)(\gamma^i) = \sum (E + iB)_\ell^{(m)} \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\right]^{1/2} \bar{\eth}^2 \eth^2\, {}_0G_\ell^m,$$

$$= \sum (E+iB)_\ell^{(m)} \left[\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\right]^{1/2} {}_0G_\ell^m. \tag{2.23}$$

同様に $Q-iU$ にスピン上昇オペレータ $\eth$ をかけ、

$$\eth^2(Q-iU)(\gamma^i) = \sum (E-iB)_\ell^{(m)} \left[\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\right]^{1/2} {}_0G_\ell^m. \tag{2.24}$$

従って、E, B モードの表現として

$$E(\gamma^i) \equiv \frac{1}{2}\left[\bar{\eth}^2(Q+iU)+\eth^2(Q-iU)\right](\gamma^i) = \sum E_\ell^{(m)} \left[\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\right]^{1/2} {}_0G_\ell^m, \tag{2.25}$$

$$B(\gamma^i) \equiv -\frac{i}{2}\left[\bar{\eth}^2(Q+iU)-\eth^2(Q-iU)\right](\gamma^i) = \sum B_\ell^{(m)} \left[\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\right]^{1/2} {}_0G_\ell^m \tag{2.26}$$

を得る。一方、パリティ変換によって

$$\bar{\eth}^2(Q+iU) \rightarrow \eth^2(Q-iU), \tag{2.27}$$

$$\eth^2(Q-iU) \rightarrow \bar{\eth}^2(Q+iU). \tag{2.28}$$

従って $E \rightarrow E$, $B \rightarrow -B$ であり、E, B モードはお互いに異なるパリティを持つことになる。

2.2 left hand side of equations: streaming

ボルツマン方程式の左辺は、右辺のソースがない場合に偏光を含む放射場がどのように伝播 (ストリーム) するかを記述している。方程式は、$\gamma^i\,({}_sG_\ell^m)_{|i}$ の漸化式: (H.4) を用いて直接展開できる。一般論としてスピン s を持つ関数 ${}_sF$ に関するボルツマン方程式を展開すれば

$$\frac{d}{d\tau}{}_sF_\ell^{(m)} = {}_s\dot{F}_\ell^{(m)} + k\left[\frac{{}_sc_{\ell+1}^m}{2\ell+3}{}_sF_{\ell+1}^{(m)} - \frac{{}_sc_\ell^m}{2\ell-1}{}_sF_{\ell-1}^{(m)} - i\frac{ms}{\ell(\ell+1)}{}_sF_\ell^{(m)}\right], \tag{2.29}$$

$${}_sc_\ell^m = \sqrt{\frac{(\ell^2-m^2)(\ell^2-s^2)}{\ell^2}}. \tag{2.30}$$

従って、

$$\frac{d}{d\tau}\Theta_\ell^{(m)} = \dot{\Theta}_\ell^{(m)} + k\left[\frac{{}_0c_{\ell+1}^m}{2\ell+3}\Theta_{\ell+1}^{(m)} - \frac{{}_0c_\ell^m}{2\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{(m)}\right], \tag{2.31}$$

$$\frac{d}{d\tau}(E \pm iB)_\ell^{(m)} = (E \pm iB)_\ell^{\cdot\,(m)} + k\left[\frac{{}_2C_{\ell+1}^m}{2\ell+3}(E \pm iB)_{\ell+1}^{(m)} - \frac{{}_2C_\ell^m}{2\ell-1}(E \pm iB)_{\ell-1}^{(m)}\right. \tag{2.32}$$

$$\left. \mp i\frac{2m}{\ell(\ell+1)}(E \pm iB)_\ell^{(m)}\right], \tag{2.33}$$

$$\frac{d}{d\tau}V_\ell^{(m)} = \dot{V}_\ell^{(m)} + k\left[\frac{{}_0C_{\ell+1}^m}{2\ell+3}V_{\ell+1}^{(m)} - \frac{{}_0C_\ell^m}{2\ell-1}V_{\ell-1}^{(m)}\right]. \tag{2.34}$$

$(E \pm iB)_\ell^{(m)}$ の実部と虚部をとれば、E タイプと B タイプそれぞれについて

$$\frac{d}{d\tau}E_\ell^{(m)} = \dot{E}_\ell^{(m)} + k\left[\frac{{}_2C_{\ell+1}^m}{2\ell+3}E_{\ell+1}^{(m)} - \frac{{}_2C_\ell^m}{2\ell-1}E_{\ell-1}^{(m)} + \frac{2m}{\ell(\ell+1)}B_\ell^{(m)}\right], \tag{2.35}$$

$$\frac{d}{d\tau}B_\ell^{(m)} = \dot{B}_\ell^{(m)} + k\left[\frac{{}_2C_{\ell+1}^m}{2\ell+3}B_{\ell+1}^{(m)} - \frac{{}_2C_\ell^m}{2\ell-1}B_{\ell-1}^{(m)} - \frac{2m}{\ell(\ell+1)}E_\ell^{(m)}\right]. \tag{2.36}$$

ストリームの基本的な役割は、パワーを小さい ℓ から大きい ℓ へ移すことである。つまり、最終散乱面の電子から見て 4 重極のパターンであっても「遠方」の我々から見ればもっと高次極のパターンとして観測される事をあらわしている。

(2.35), (2.36) において最も重要なのは、$m \neq 0$ の時に最後の項を通じて E, B モードがカップリングしていることである。ベクター, テンサーモードに限り、散乱で B モードが生成されなくてもフリーストリームによって B モードが生成される。逆にスカラーモードの B モードは存在しない。この特性を使えば、偏光の観測によってゆらぎのモードを分離できるのである。つまり重力波の寄与は密度ゆらぎの寄与の何割か、というような事が温度ゆらぎだけでは全く決められないため、偏光の情報を欠かす事ができないのである。

一方、Θ, V は独立にストリームするので、初期に V モードが存在しなければその後決してフリーストリームで生成されることはない。

2.3 right hand side of equations: source functions

右辺のソース関数は機械的に求められる。

- ザクス – ヴォルフェ
  (H.11) – (H.16) より

$$\mathcal{G}_{SW\ell}^{(0)} = -\dot{H}_L\delta_{\ell 0} + \left(kA + \dot{B}^{(0)}\right)\delta_{\ell 1} - \frac{2}{3}\dot{H}_T^{(0)}\delta_{\ell 2}, \tag{2.37}$$

$$\mathcal{G}^{(1)}_{SW\ell} = \dot{B}^{(1)}\delta_{\ell 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{H}^{(1)}_T\delta_{\ell 2}, \tag{2.38}$$

$$\mathcal{G}^{(2)}_{SW\ell} = -\dot{H}^{(2)}_T\delta_{\ell 2}. \tag{2.39}$$

- トムソン散乱

  モード関数と調和関数の直交性を用いれば、

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{\Theta(m)}_{C\,\ell} &= -\dot{\tau}_c\left(\Theta^{(m)}_\ell - \delta_{\ell 0}\ \Theta^{(0)}_0 - \delta_{\ell 1}\ v^{(m)}_b\right)\\ &\quad +\delta_{\ell 2}\ \frac{1}{10}\dot{\tau}_c\left(\Theta^{(m)}_2 - \sqrt{6}E^{(m)}_2\right),\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\mathcal{G}^{E\pm iB(m)}_{C\ \ \ \

- $\ell = 1$

$$S_1^{(0)} = \dot{\tau}_c v_b^{(0)} + \left(kA + \dot{B}^{(0)}\right), \tag{2.50}$$
$$S_1^{(1)} = \dot{\tau}_c v_b^{(1)} + \dot{B}^{(1)}, \tag{2.51}$$

- $\ell = 2$

$$S_2^{(0)} = \dot{\tau}_c P_2^{(0)} - \frac{2}{3}\dot{H}_T^{(0)}, \tag{2.52}$$
$$S_2^{(1)} = \dot{\tau}_c P_2^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{H}_T^{(1)}, \tag{2.53}$$
$$S_2^{(2)} = \dot{\tau}_c P_2^{(2)} - \dot{H}_T^{(2)}. \tag{2.54}$$

$P_2^{(m)}$ はトムソン散乱の異方性と偏光によって生成される 4 重極パターンであり

$$P_2^{(m)} \equiv \frac{1}{10}\left(\Theta_2^{(m)} - \sqrt{6}E_2^{(m)}\right). \tag{2.55}$$

トムソン散乱によって生成される唯一の偏光モードである E モードのソースは、$P_2^{(m)}$ のみである (2.46)。つまり、電子から見て温度に 4 重極パターンの異方性があるときのみ、偏光が生成されるのである。生成された偏光は今度は自身が $P_2^{(m)}$ のソースとなり、温度の 4 重極モーメントにフィードバックされる。このように、温度と偏光は 4 重極モーメント $(\ell = 2)$ を通してのみカップルしている。

ゆらぎの波長に比べて光子の平均自由行程 (mean free path) が十分短い時 $(\dot{\tau}_c/k \gg 1)$、$\ell = 2$ の式は

$$\dot{\Theta}_2^{(m)} = k\frac{{}^0C_2^m}{3}\Theta_1^{(m)} - \dot{\tau}_c\left(\frac{9}{10}\Theta_2^{(m)} - \frac{\sqrt{6}}{10}E_2^{(m)}\right), \tag{2.56}$$
$$\dot{E}_2^{(m)} = -\dot{\tau}_c\left(\frac{2}{5}E_2^{(m)} + \frac{\sqrt{6}}{10}\Theta_2^{(m)}\right) \tag{2.57}$$

と近似できる。$\Theta_2^{(m)}$ によりまず $E_2^{(m)}$ が生成され、(2.57) より

$$E_2^{(m)} = -\frac{\sqrt{6}}{4}\Theta_2^{(m)}. \tag{2.58}$$

そして $\Theta_2^{(m)}$ にフィードバックされ、

$$\dot{\Theta}_2^{(m)} = k\frac{{}^0C_2^m}{3}\Theta_1^{(m)} - \dot{\tau}_c f_2 \Theta_2^{(m)}. \tag{2.59}$$

f_2 は偏光を含める場合と含めない場合 ($E_\ell^{(m)} = 0$) を記述するファクターであり

$$f_2 = \begin{cases} 3/4 & \text{(with polarization)}, \\ 9/10 & \text{(without polarization)}. \end{cases} \tag{2.60}$$

もちろん今は前者である。

3 Hierarchical Structure of Transport Equations

前節で一般形として書き下したボルツマン方程式が、全ての出発点である。これより具体的に方程式を解いてゆく。多重極展開した方程式系は、無限次元の階層方程式 (hierarchy) をなす。そのうち $\ell = 0 - 2$ にはソースによる特徴的な項があるので、全て書き下す。また、ボルツマン方程式とストレス – エネルギーテンサーの発散によって導いた運動方程式 (Appendix E) とは基本的に同じものであるので、その比較を行った後ゲージ不変な輸送方程式を導く。

3.1 scalar mode hierarchy

$$\dot{\Theta}_0^{(0)} = -\frac{k}{3}\Theta_1^{(0)} - \dot{H}_L, \tag{2.61}$$

$$\dot{\Theta}_1^{(0)} = k\left(\Theta_0^{(0)} + A - \frac{2}{5}\Theta_2^{(0)}\right) - \dot{\tau}_c\left(\Theta_1^{(0)} - v_b^{(0)}\right) + \dot{B}^{(0)}, \tag{2.62}$$

$$\dot{\Theta}_2^{(0)} = k\left(\frac{2}{3}\Theta_1^{(0)} - \frac{3}{7}\Theta_3^{(0)}\right) - \dot{\tau}_c\left(\frac{9}{10}\Theta_2^{(0)} + \frac{\sqrt{6}}{10}E_2^{(0)}\right) - \frac{2}{3}\dot{H}_T^{(0)}, \tag{2.63}$$

$$\dot{\Theta}_\ell^{(0)} = k\left(\frac{\ell}{2\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{(0)} - \frac{\ell+1}{2\ell+3}\Theta_{\ell+1}^{(0)}\right) - \dot{\tau}_c\Theta_\ell^{(0)} \qquad (\ell \geq 3). \tag{2.64}$$

(2.61) は連続の式 (E.19):

$$\frac{1}{4}\dot{\delta}_\gamma = -\frac{k}{3}v_\gamma^{(0)} - \dot{H}_L \tag{2.65}$$

と等価な式である。ただし、$\delta_\gamma \equiv \delta\rho_\gamma/\bar{\rho}_\gamma$ である。同様に (2.62) はオイラーの式 (E.28):

$$\dot{v}_\gamma^{(0)} = k\left(\frac{1}{4}\delta_\gamma + A - \frac{1}{6}\pi_\gamma^{(0)}\right) + \dot{B}^{(0)} \tag{2.66}$$

と等価である。$\pi_\gamma^{(0)}$ は光子の非等方ストレスである。これらの比較により、$\Theta_\ell^{(0)}$ とストレス – エネルギーテンサー との対応がつき、

$$\Theta_0^{(0)} = \frac{1}{4}\delta_\gamma, \tag{2.67}$$

$$\Theta_1^{(0)} = v_\gamma^{(0)}, \tag{2.68}$$

$$\Theta_2^{(0)} = \frac{5}{12}\pi_\gamma^{(0)}. \tag{2.69}$$

ところで (2.66) にはボルツマン方程式 (2.62) に存在する $\dot{\tau}_c(\Theta_1^{(0)} - v_b^{(0)})$ の項がないが、これは (2.66) が全体の収支を記述する方程式であり、個々の組成どうしのエネルギーのやりとりまで記述していないからである。一方、ボルツマン方程式では $\mathcal{G}_C$ によって電子を通じた光子とバリオンの相互作用を記述しているのである。

対応がついたので、(2.61), (2.62) を (E.25), (E.32) のようにゲージ不変に書くことができる。ここで、2 流体の相対速度 $V_{\gamma b}^{(m)} \equiv v_\gamma^{(m)} - v_b^{(m)}$ はゲージ不変、$\Theta_\ell^{(m)}$ $(\ell \geq 2)$ は自動的にゲージ不変であるから、

$$\dot{\Theta}_{\zeta 0}^{(0)} = -\frac{k}{3}\Theta_{s1}^{(0)}, \tag{2.70}$$

$$\dot{\Theta}_{s1}^{(0)} = k\left(\Theta_{g0}^{(0)} + \Phi_A - \frac{2}{5}\Theta_2^{(0)}\right) - \dot{\tau}_c V_{\gamma b}^{(0)}, \tag{2.71}$$

$$\Theta_{\zeta 0}^{(0)} \equiv \frac{1}{4}\epsilon_{\zeta\gamma} = \frac{1}{4}\delta_\gamma + \mathcal{R} = \frac{1}{4}\delta_\gamma + \Phi_H + \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\sigma_g^{(0)}, \tag{2.72}$$

$$\Theta_{g0}^{(0)} \equiv \frac{1}{4}\epsilon_{g\gamma} = \frac{1}{4}\delta_\gamma + \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\sigma_g^{(0)}, \tag{2.73}$$

$$\Theta_{s1}^{(0)} \equiv V_{s\gamma}^{(0)} = v_\gamma^{(0)} - \frac{1}{k}\dot{H}_T^{(0)}. \tag{2.74}$$

各不変量、幾何量の物理的意味は Appendix D, E を参照のこと。

3.2 vector mode hierarchy

$$\dot{\Theta}_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{5}k\Theta_2^{(1)} - \dot{\tau}_c\left(\Theta_1^{(1)} - v_b^{(1)}\right) + \dot{B}^{(1)}, \tag{2.75}$$

$$\dot{\Theta}_2^{(1)} = k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta_1^{(1)} - \frac{2\sqrt{2}}{7}\Theta_3^{(1)}\right) - \dot{\tau}_c\left(\frac{9}{10}\Theta_2^{(1)} + \frac{\sqrt{6}}{10}E_2^{(1)}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{H}_T^{(1)}, \tag{2.76}$$

$$\dot{\Theta}_\ell^{(1)} = k\left(\frac{\sqrt{(\ell+1)(\ell-1)}}{2\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{(1)} - \frac{\sqrt{\ell(\ell+2)}}{2\ell+3}\Theta_{\ell+1}^{(1)}\right) - \dot{\tau}_c\Theta_\ell^{(1)} \qquad (\ell \geq 3). \quad (2.77)$$

スカラーモードと同様、(2.75) とオイラーの式:

$$\dot{v}_\gamma^{(1)} = -\frac{1}{8}k\pi_\gamma^{(0)} + \dot{B}^{(1)} \quad (2.78)$$

を比較し、

$$\Theta_1^{(1)} = v_\gamma^{(1)}, \quad (2.79)$$

$$\Theta_2^{(1)} = \frac{5}{8\sqrt{3}}\pi_\gamma^{(1)}. \quad (2.80)$$

ゲージ不変な式は、

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{5}k\Theta_2^{(1)} - \dot{\tau}_c V_{\gamma b}^{(1)}, \quad (2.81)$$

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} \equiv V_{c\gamma}^{(1)} = v_\gamma^{(1)} - B^{(1)}. \quad (2.82)$$

3.3 tensor mode hierarchy

テンサーモードは、自動的にゲージ不変である。

$$\dot{\Theta}_2^{(2)} = -\frac{5}{7}k\Theta_3^{(2)} - \dot{\tau}_c\left(\frac{9}{10}\Theta_2^{(2)} + \frac{\sqrt{6}}{10}E_2^{(2)}\right) - \dot{H}_T^{(2)}, \quad (2.83)$$

$$\dot{\Theta}_\ell^{(2)} = k\left(\frac{\sqrt{(\ell+2)(\ell-2)}}{2\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{(2)} - \frac{\sqrt{(\ell+3)(\ell-1)}}{2\ell+3}\Theta_{\ell+1}^{(2)}\right) - \dot{\tau}_c\Theta_\ell^{(2)} \qquad (\ell \geq 3) \quad (2.84)$$

4 Transport Equations of Other Fluids

光子の輸送方程式を全て書き下したが、系には他の流体も存在している。特に光子はバリオンと電子を通じて強くカップルしており、バリオンの輸送方程式も同時に解かねばならない。

4.1 baryon transport

光子はトムソン散乱によって電子と相互作用を行なっているが、電子とバリオンもクーロン相互作用によってカップルしている。従って、光子とバリオンは電子を通じて互いに

カップルしており、系は光子とバリオンの 2 流体として扱わねばならない。バリオンの輸送方程式は Appendix E の連続の式とオイラーの式であるが、トムソン散乱を通じた光子との相互作用を考慮にいれるため、エネルギー流束の保存:

$$\bar{\rho}_b \Delta v_b^{(m)} + (\bar{\rho}_\gamma + \bar{p}_\gamma)\Delta v_\gamma^{(m)} = 0 \tag{2.85}$$

を用いる。光子流体の速度の変化率 $\Delta v_\gamma^{(m)} = \Delta\Theta_1^{(m)}$ は、ボルツマン方程式 (2.62), (2.75) から求められる。結果は、

$$\Delta v_b^{(m)} = \frac{\Delta\tau_c}{R} V_{\gamma b}^{(m)} = \frac{\Delta\tau_c}{R}\left(v_\gamma^{(m)} - v_b^{(m)}\right). \tag{2.86}$$

ここで、$R \equiv 3\bar{\rho}_b/4\bar{\rho}_\gamma$ は 系のバリオンの量を決めるパラメターであり、$R \simeq 3\times 10^4 \bar{a}(\Omega_b h^2)$ である。以上よりバリオンの輸送方程式は

$$\dot{\delta}_b = -kv_b^{(0)} - 3\dot{H}_L, \tag{2.87}$$

$$\dot{V}_{cb}^{(0)} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} V_{cb}^{(0)} + kA + \frac{\dot{\tau}_c}{R} V_{\gamma b}^{(0)}, \tag{2.88}$$

$$\dot{V}_{cb}^{(1)} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} V_{cb}^{(1)} + \frac{\dot{\tau}_c}{R} V_{\gamma b}^{(1)}. \tag{2.89}$$

ただし、$V_{cb}^{(m)} \equiv v_b^{(m)} - B^{(m)}$ である。ゲージ不変量には光子の場合と同様にしてすぐに書きかえられ、

$$\dot{\epsilon}_{\zeta b} = -kV_{sb}^{(0)}, \tag{2.90}$$

$$\dot{V}_{sb}^{(0)} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} V_{sb}^{(0)} + k\Phi_A + \frac{\dot{\tau}_c}{R} V_{\gamma b}^{(0)}. \tag{2.91}$$

ベクターモードは、(2.89) ですでにゲージ不変である。

4.2 Cold Dark Matter transport

ポテンシャルをつくっている主要な重力源であるコールドダークマター (Cold Dark Matter; CDM) の輸送方程式は、バリオンの方程式系 (2.87) – (2.89) からトムソン散乱のカップリングを消せば良いだけである。

$$\dot{\delta}_{cdm} = -kv_{cdm}^{(0)} - 3\dot{H}_L, \tag{2.92}$$

$$\dot{V}_{ccdm}^{(0)} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} V_{ccdm}^{(0)} + kA, \tag{2.93}$$

$$\dot{V}_{ccdm}^{(1)} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} V_{ccdm}^{(1)}. \tag{2.94}$$

ゲージ不変な輸送方程式は光子/バリオン同様

$$\dot{\epsilon}_{\zeta cdm} = -kV^{(0)}_{scdm}, \tag{2.95}$$

$$\dot{V}^{(0)}_{scdm} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}V^{(0)}_{scdm} + k\Phi_A. \tag{2.96}$$

4.3 massless neutrinos & relativistic particles transport

質量ゼロ (とみなせる) ニュートリノや相対論的に運動する粒子の輸送方程式は、光子の輸送方程式からトムソン散乱をなくしたものと同じである。このような粒子の基本的な役割は、フリーストリームによるゆらぎのダンプ、及び非等方ストレス π_ν である。これはゆらぎを消す方向に働き、仮に無視した場合には 10% 程度ゆらぎを多くつくってしまう (Hu, Scott, Sugiyama & White 1995)。

第3章　Phenomenology of CMB

光子, バリオン, ダークマター, ニュートリノ ... の輸送方程式が出そろった。あと足りないのはメトリック摂動に関する方程式であるが、それはアインシュタイン方程式によって記述できる (Appendix C)。従って、あとは全て連立して数値積分すれば良いだけである。しかし得られる CMB の異方性は解析的な手法で現象論的に理解でき、場合によってはほぼ定量的にスペクトルを再現することができる (e.g., Hu, Sugiyama & Silk 1997)。

1　Superhorizon Scale: Sachs-Wolfe Effect

まず、スーパーホライズンスケールでのゆらぎの発展を追うため、ゲージ不変なゆらぎの発展方程式をホライズンよりも十分大きなスケールで解く。「系のスケールがホライズンより大きいかどうか」というのは、問題を解く上で本質的である。なぜなら、因果性を必要とする物理プロセス (圧力など) はホライズンを越えた領域では作用せず、メトリック摂動による重力のみがゆらぎの発展を決定するためである。ホライズンより大きいスケールではニュートン的な取扱いは不可能で一般相対論を使わねばならないので、ゲージ不変量によって方程式を立てる。解くべき方程式系は、

- アインシュタイン方程式 (E.13), (E.16):

$$k^2\Phi_H = 4\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}\epsilon_m, \tag{3.1}$$

$$k^2\left(\Phi_H + \Phi_A\right) = 0. \tag{3.2}$$

  Φ_H, Φ_A, ϵ_m は、それぞれゲージ不変な 3 次元曲率ゆらぎ, 加速度ポテンシャル, 密度ゆらぎ ($v = B$ のゲージ条件) である。密度ゆらぎに関しては、どのゲージで密度ゆらぎとなるように定義されているかに特に注意を払わねばならない。

- 流体の運動方程式 (E.25), (E.32):

$$\left(\frac{\epsilon_\zeta}{1+w}\right)^{\cdot} = -kV_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\frac{w}{1+w}\Gamma, \tag{3.3}$$

$$\dot{V}_s^{(0)} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\left(c_s^2-\frac{1}{3}\right)V_s^{(0)}+k\left(\Phi_A+\frac{c_s^2}{1+w}\epsilon_g+\frac{w}{1+w}\Gamma\right). \tag{3.4}$$

V_s, ϵ_ζ, Γ, ϵ_g は、ゲージ不変な速度摂動, 密度ゆらぎ $(\mathcal{R}=0)$, エントロピーゆらぎ、密度ゆらぎ $(\sigma_g=0)$ である。

$z>1000$ を考えているので曲率は無視して良い。また非等方ストレス π を無視した。chapter 2 の最後でも触れたが、π に寄与するのは主に光子、ニュートリノなどの相対論的ソースである。精度を要する場合には当然含めねばならないが、多くの場合無視してかまわない。

これより具体的に方程式系を解く。ポアソン方程式 (3.1) の ϵ_m を ϵ_ζ:

$$\epsilon_m=\epsilon_\zeta-3(1+w)\left(\Phi_H-\frac{\bar{a}\bar{H}}{k}V_s^{(0)}\right) \tag{3.5}$$

に変換すれば、

$$\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^2\frac{1}{3(1+w)}\right]\Phi_H=\frac{\epsilon_\zeta}{3(1+w)}+\frac{\bar{a}\bar{H}}{k}V_s^{(0)}. \tag{3.6}$$

よってスーパーホライズンスケールのモード $k/\bar{a}\bar{H}\ll 1$ は、

$$\epsilon_\zeta\approx 3(1+w)\left(\Phi_H-\frac{\bar{a}\bar{H}}{k}V_s^{(0)}\right). \tag{3.7}$$

同様に、オイラーの式 (3.4) の ϵ_g も変換し、(3.7) を用いれば、

$$\epsilon_g=\epsilon_\zeta-3(1+w)\Phi_H\approx -3(1+w)\frac{\bar{a}\bar{H}}{k}V_s^{(0)}. \tag{3.8}$$

従ってスーパーホライズンスケールでのオイラーの式は

$$\dot{V}_s^{(0)}+\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}V_s^{(0)}=k\Phi_A+\frac{w}{1+w}k\Gamma. \tag{3.9}$$

一方、連続の式 (3.3) にスーパーホライズンでの ϵ_ζ (3.7) を代入すれば、

$$\left(-k\Phi_H+\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}V_s^{(0)}\right)^{\cdot}=\frac{k^2}{3}V_s^{(0)}+\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\frac{w}{1+w}k\Gamma. \tag{3.10}$$

作為的な変形をしたが、(3.9) において $\Phi_A=-\Phi_H$ を (3.10) に代入すれば

$$\left(\dot{V}_s^{(0)}+2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}V_s^{(0)}-\frac{w}{1+w}k\Gamma\right)^{\cdot}=\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\frac{w}{1+w}k\Gamma. \tag{3.11}$$

を得る。右辺の $(k/\bar{a}\bar{H})^2$ オーダーの項は無視した。後に見るように Γ の項は初期条件のみで決まるため、(3.11) は $V_s^{(0)}$ に関して実質的に閉じている。スカラーモードのゲージ不変な速度摂動は $V_s^{(0)}$ が唯一であるので、文献によらずにスカラーモードの速度摂動といえば $V_s^{(0)}$ であるとみなして良い。

1.1 entropic perturbarion

今、系には複数の流体が存在しているため、エントロピーゆらぎ Γ が存在する余地がある。しかし一般には、$\Gamma = 0$, $\Gamma \neq 0$ の場合を区別してモデル化し、前者を「断熱ゆらぎ (adiabatic perturbation)」、後者を「エントロピーゆらぎ (entropic perturbation)」と呼んでいる。

$$\begin{aligned}\bar{p}\Gamma &\equiv \sum_f \left(\delta p_f - c_s^2 \delta\rho_f\right) \\ &= \sum_f \left(\delta p_f - c_{sf}^2 \delta\rho_f\right) + \sum_f \left(c_{sf}^2 - c_s^2\right)\delta\rho_f \\ &= \sum_f \bar{p}_f \Gamma_f + \sum_f \left(c_{sf}^2 - c_s^2\right)\bar{\rho}_f \delta_f. \end{aligned} \tag{3.12}$$

f は流体要素の名前である。音速 $c_s^2 = \dot{\bar{p}}/\dot{\bar{\rho}}$ を各成分の和として

$$c_s^2 = \sum_f \frac{\bar{\rho}_f(1+w_f)}{\bar{\rho}(1+w)} c_{sf}^2 \tag{3.13}$$

$$\equiv \sum_f \frac{h_f}{h} c_{sf}^2 \tag{3.14}$$

と書けば、

$$\begin{aligned}&\sum_f \left(c_{sf}^2 - c_s^2\right)\bar{\rho}_f \delta_f \\ =\ & \sum_{ff'} \left(c_{sf}^2 - \frac{h_{f'}}{h} c_{sf'}^2\right) h_f \frac{\delta_f}{1+w_f} \\ =\ & \frac{1}{2}\sum_{ff'} \left[\left(c_{sf}^2 - \frac{h_{f'}}{h} c_{sf'}^2\right) h_f \frac{\delta_f}{1+w_f} + \left(c_{sf'}^2 - \frac{h_f}{h} c_{sf}^2\right) h_{f'} \frac{\delta_{f'}}{1+w_{f'}}\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\sum_{ff'} \left[\left(c_{sf}^2 - c_{sf'}^2\right) \frac{h_f h_{f'}}{h} \frac{\delta_f}{1+w_f} + \left(c_{sf'}^2 - c_{sf}^2\right) \frac{h_f h_{f'}}{h} \frac{\delta_{f'}}{1+w_{f'}}\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\sum_{ff'} \frac{h_f h_{f'}}{h} \left(c_{sf}^2 - c_{sf'}^2\right) S_{ff'}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$S_{ff'} \equiv \frac{\delta_f}{1+w_f} - \frac{\delta_{f'}}{1+w_{f'}}. \tag{3.16}$$

系のエントロピー s はほとんど全て光子が占めているので、今流体要素を光子 γ とそれ以外 m に分ければ、

$$S_{m\gamma} = \frac{\delta n_m}{n_m} - \frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta(n_m/s_\gamma)}{(n_m/s_\gamma)}. \tag{3.17}$$

従って光子と物質が断熱的でなければ $S_{m\gamma}$ は存在する。これが、Γ をエントロピーゆらぎと呼ぶゆえんであり、多成分の流体系を扱う場合は一般に存在する。

$S_{ff'}$ の発展方程式は連続の式から容易に求められる。

$$\dot{S}_{ff'} = \left(\frac{\delta_f}{1+w_f}\right)^{\cdot} - \left(\frac{\delta_{f'}}{1+w_{f'}}\right)^{\cdot} = -k\left(v_f^{(0)} - v_{f'}^{(0)}\right). \tag{3.18}$$

ただし、個々の流体に関して $\Gamma_f = 0$ である。このように、エントロピーゆらぎは流体要素間の相対速度によって成長 (減衰) する。つまりカップリングが強く $v_f^{(0)} = v_{f'}^{(0)}$ が成り立つような系では $S_{ff'}$ は成長できず、もし初期にゼロ (断熱ゆらぎ) であればその後もゼロのままである。

1.2 case 1: adiabatic initial condition

まず、初期条件として断熱ゆらぎのケース $\Gamma = 0$ を考える。スーパーホライズンスケールでは個々の流体間の個性は失われるため、初期に $\Gamma = 0$ であればその後生成されることはない。このもとで、オイラーの式 (3.9), (3.11):

$$\dot{V}_s^{(0)} + \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} V_s^{(0)} = k\Phi_A, \tag{3.19}$$

$$\dot{V}_s^{(0)} + 2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} V_s^{(0)} = \text{constant} \tag{3.20}$$

を解く。(3.20) によって $V_s^{(0)}$ を解いたのち、(3.19) によって Φ_H を決めるのである。

(1) 放射優勢時期 ($\bar{a} \propto \tau$; $w = 1/3$)

$\dot{\bar{a}}/\bar{a} = 1/\tau$ より、(3.20) の解は

$$V_s^{(0)} \propto \begin{cases} \tau, \\ \tau^{-2}. \end{cases} \tag{3.21}$$

ポテンシャルは

$$\Phi_A \propto \begin{cases} \text{constant}, \\ \tau^{-3}. \end{cases} \tag{3.22}$$

ポテンシャルが一定であることが非常に重要である。この性質を用いれば、(3.19) を $V_s^{(0)}$ に関して解き直し、

$$V_s^{(0)} = \frac{k\tau}{2}\Phi_A. \tag{3.23}$$

以上より、温度ゆらぎを求めることが可能である。

$$\Theta_{\zeta 0}^{(0)} = -\frac{1}{2}\Phi_A + \Phi_H, \tag{3.24}$$

$$\Theta_{g0}^{(0)} = -\frac{1}{2}\Phi_A. \tag{3.25}$$

$\Theta_{\zeta 0\gamma}^{(0)} = \epsilon_\zeta/4$, $\Theta_{g0}^{(0)} = \epsilon_{g\gamma}/4$, であり、各々 (3.7), (3.8) より導ける。一方、密度ゆらぎ ϵ_m, ϵ_g, ϵ_ζ の成長モードは、それぞれ (3.1), (3.8), (3.7) より

$$\epsilon_m \propto \bar{a}^2 \qquad (v^{(0)} = B^{(0)}), \tag{3.26}$$

$$\epsilon_g = \text{constant} \qquad (\sigma_g^{(0)} = 0), \tag{3.27}$$

$$\epsilon_\zeta = \text{constant} \qquad (\mathcal{R} = 0) \tag{3.28}$$

と、どれを使うかによって異なる。( ) は、各々の ϵ がどのゲージのもとで δ になるかを示したものである。「密度ゆらぎ」がどれで定義されているかは、注意が必要である。

(2) 物質優勢期 ($\bar{a} \propto \tau^2$; $w = 0$)

$\dot{\bar{a}}/\bar{a} = 2/\tau$ より、放射優勢時と全く同様の議論から

$$V_s^{(0)} \propto \begin{cases} \tau, \\ \tau^{-4}, \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\Phi_A \propto \begin{cases} \text{constant}, \\ \tau^{-5}. \end{cases} \tag{3.30}$$

重要なことは、放射優勢時/物質優勢時のどちらにおいてもポテンシャル Φ_A が一定に保たれることである。ただし放射優勢から物質優勢へ移る際、$\Phi_A(MD) = \frac{9}{10}\Phi_A(RD)$ のように 10% ポテンシャルが減衰する (Hu 1995)。RD は放射優勢、MD は物質優勢時である。また、以上の議論は曲率が無視できる時期にのみ正しく、オープンの宇宙や Λ 項入りの宇宙では曲率や Λ の項が効いてくるにつれてポテンシャルは減衰してゆく。

温度ゆらぎを求めれば、

$$V_s^{(0)} = \frac{k\tau}{3}\Phi_A, \tag{3.31}$$

$$\Theta^{(0)}_{\zeta 0} = -\frac{2}{3}\Phi_A + \Phi_H, \tag{3.32}$$

$$\Theta^{(0)}_{g0} = -\frac{2}{3}\Phi_A. \tag{3.33}$$

「密度ゆらぎ」は

$$\epsilon_m \propto \bar{a}, \tag{3.34}$$

$$\epsilon_g = \text{constant}, \tag{3.35}$$

$$\epsilon_\zeta = \text{constant}. \tag{3.36}$$

以上が断熱ゆらぎにおいてホライズンをまたぐまで CMB にプリントされている温度ゆらぎの初期条件、ザクス – ヴォルフェ (SW) 効果である (Sachs & Wolfe 1967)。もとを正せば、起源は $\mathcal{G}_{SW}$ にあった $h_{00|k}\bar{\gamma}^k$ の項 (2.6) である。SW 効果は以下のように物理的に解釈できる。インフレーション時 (もしくは他の機構) によって生成された断熱ゆらぎ (chapter 6) によるメトリック摂動の「井戸 (岡)」に光子がトラップされると、重力青方 (赤方) 偏移によって温度変化を受け、温度のバリエーションが生じるのである。そのまま脱結合が始まれば光子はメトリック摂動の中から抜け出してくるわけだが、その際に井戸の深さ (岡の高さ) の分だけ赤方 (青方) 偏移を受けるので、結局我々が観測する SW 効果は

$$\Theta^{(0)}_{0\,eff} \equiv \Theta^{(0)}_0 + \Phi_A \tag{3.37}$$

である。ここで、(2.13) – (2.15) より、静的なメトリック摂動によって引き起こされる SW 効果はメトリック摂動の h_{00} (A)、すなわち超曲面上の加速度以外には存在しないことに注意せねばならない。さらに、$\Theta^{(0)}_{0\,eff}$ を「観測する」と言ったが、このことと観測者を変換 (Appendix F) することを混同してはならない。「観測量」としての温度ゆらぎは、あくまでも $\Theta^{(0)}_0$ である。

Longitudinal gauge (or Newtonian slicing):

$$B^{(0)} = H^{(0)}_T = H^{(1)}_T = 0 \tag{3.38}$$

において、SW 効果は

$$\Theta^{(0)}_{g0\,eff} = \frac{1}{2}\Phi_A \qquad \text{(RD)}, \tag{3.39}$$

$$\Theta^{(0)}_{g0\,eff} = \frac{1}{3}\Phi_A \qquad \text{(MD)}. \tag{3.40}$$

これが、一般に広く知られている SW 効果である。

1.3 case 2: isocurvature initial condition

次に、エントロピーゆらぎを議論する。断熱ゆらぎではまず始めに「曲率のゆらぎありき」で議論が進められた。例えばインフレーション理論では、量子場であるスカラー場が持つ量子ゆらぎによって曲率ゆらぎが生成され、ゆらぎの初期条件を与える (chapter 6)。しかしエントロピーゆらぎにおいて本質的な役割を果たすのは Γ (3.9) であり、もっと言えばコンポーネント f, f' 間に存在するエントロピーゆらぎ $S_{ff'}$ (3.16) である。従って、初期条件として $S_{ff'} \neq 0$ を持つエントロピーゆらぎをソースとする密度ゆらぎの発展が考えられる。

密度ゆらぎの発展の式は、2 種類のソースとして曲率ゆらぎ Φ_H (あるいは加速度ポテンシャル Φ_A) およびエントロピーゆらぎ Γ を持っている。断熱ゆらぎの際には $\Phi_H \neq 0$, $\Gamma = 0$ としたが、今度は逆に $\Phi_H = 0, \Gamma \neq 0$ という初期条件を考える。これは、曲率ゆらぎがないことから「等曲率ゆらぎ (isocurvature perturbation)」と呼ばれている。エントロピーゆらぎといえば一般に等曲率ゆらぎのことを指す事が多い。すでに見たように、断熱ゆらぎでは初期条件の曲率ゆらぎはその後保存 ($\Phi_H = \text{constant}$) されたが、等曲率ゆらぎでは放射優勢時に成長 ($\Phi_H(RD) \propto \bar{a}$) する。

Longitudinal gauge ではボルツマン方程式 (2.61):

$$\dot{\Theta}_0^{(0)} = -\frac{k}{3}\Theta_1^{(0)} - \dot{\Phi}_H \tag{3.41}$$

より簡単な評価ができる。スーパーホライズンで $\dot{\Theta}_0^{(0)} \approx -\dot{\Phi}_H$ なので、積分すれば

$$\Theta_0^{(0)}(\tau) = \Theta_0^{(0)}(0) - \Phi_H(\tau) + \Phi_H(0). \tag{3.42}$$

等曲率ゆらぎの初期条件は定義より $\Theta_0^{(0)}(0) = 0 = \Phi_H(0)$ であるから、

$$\Theta_0^{(0)}(\tau) = -\Phi_H(\tau) = \Phi_A(\tau), \tag{3.43}$$

$$\Theta_0^{(0)}{}_{eff}(\tau) = \left[\Theta_0^{(0)} + \Phi_A\right](\tau) = 2\Phi_A(\tau) \tag{3.44}$$

を得る。断熱ゆらぎの時にはインフレーション時に曲率ゆらぎが生成されているため、$\dot{\Phi}_H = 0$, $\Theta_0^{(0)} \neq 0$ であったので、このような評価はできなかったのである。断熱ゆらぎとは異なり、等曲率ゆらぎの起源は $\mathcal{G}_{SW}$ の $\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l$ の項である。つまり、静的なポテンシャルによる効果ではない。Φ_A と結びついたのはアインシュタイン方程式 $\Phi_H = -\Phi_A$ を通じてそうなったのであり、本質的には $\dot{\Phi}_H$ の存在のためである。

(3.43) と (3.39), (3.40) を見比べると、形式的に等曲率ゆらぎの SW が断熱ゆらぎよりも 4 倍 (RD), 6 倍 (MD) になっている。しかし、断熱ゆらぎのポテンシャルが一定であるのに対し、等曲率ゆらぎのポテンシャルは初期条件でゼロであり、その後 RD で $\propto \bar{a}$ のように成長しているため、単純な比較は意味を持たない。ただし、等曲率ゆらぎでも MD ではポテンシャルは一定となる。従ってもし断熱ゆらぎも等曲率ゆらぎも Φ_A は同じ程度まで成長するのだとすれば、等曲率ゆらぎは断熱ゆらぎよりもゆらぎを多く作ることになる。

2 Subhorizon Scale: Tight Coupling

ゆらぎがホライズンの中に入ると、流体の状態方程式の違いや圧力の効果が効き始めるため、前節のような取り扱いをすることはできず、各流体の輸送方程式をカップルさせて解かねばならない。しかし実際には多くの場合解析的な扱いが可能であり、サブホライズンの CMB ゆらぎのふるまいはかなり良く理解できている (Hu, Sugiyama & Silk 1997)。また、サブホライズンスケールではゲージモードの混入はなくなるため、ゲージをニュートンゲージに固定する。

2.1 0th order: perfect coupling

脱結合 (decoupling) 以前には、光子とバリオンは電子を通して強くカップルしており 1 流体で良く近似できる。数学的には光子のボルツマン方程式においてトムソン散乱の確率の逆数 $k/\dot{\tau}_c \ll 1$ をオーダーパラメターとし、タイトカップリング (tight coupling) に関する逐次近似によって摂動的に扱うことができる。まずタイトカップリング 0 次の方程式系を書き下せば

- temperature transport

$$\dot{\Theta}_0^{(0)} = -\frac{k}{3}\Theta_1^{(0)} - \dot{\Phi}_H, \tag{3.45}$$

$$\dot{\Theta}_1^{(m)} = -\dot{\tau}_c V_{\gamma b}^{(m)}, \tag{3.46}$$

$$\dot{\Theta}_2^{(m)} = -\dot{\tau}_c \left(\frac{9}{10}\Theta_2^{(m)} + \frac{\sqrt{6}}{10} E_2^{(m)} \right), \tag{3.47}$$

$$\dot{\Theta}_\ell^{(m)} = -\dot{\tau}_c \Theta_\ell^{(m)} \qquad (\ell \geq 3). \tag{3.48}$$

- polarization transport

$$\dot{E}_2{}^{(m)} = -\dot{\tau}_c \left(\frac{\sqrt{6}}{10}\Theta_2^{(m)} + \frac{2}{5}E_2^{(m)} \right), \tag{3.49}$$

$$\dot{E}_\ell{}^{(m)} = -\dot{\tau}_c E_\ell^{(m)} \qquad (\ell \neq 2), \tag{3.50}$$

$$\dot{B}_\ell{}^{(m)} = -\dot{\tau}_c B_\ell^{(m)}, \tag{3.51}$$

$$\dot{V}_1{}^{(m)} = -\dot{\tau}_c \frac{1}{2} V_1^{(m)}, \tag{3.52}$$

$$\dot{V}_\ell{}^{(m)} = -\dot{\tau}_c V_\ell^{(m)} \qquad (\ell \neq 1). \tag{3.53}$$

- baryon transport

$$\dot{\delta}_b = -k v_b^{(0)} - 3\dot{\Phi}_H, \tag{3.54}$$

$$\dot{V}_{cb}^{(m)} = \frac{\dot{\tau}_c}{R} V_{\gamma b}^{(m)}. \tag{3.55}$$

ただし $R \equiv 3\bar{\rho}_b/4\bar{\rho}_\gamma$, $V_{\gamma b}^{(m)} \equiv v_\gamma^{(m)} - v_b^{(m)}$。タイトカップリング 0 次の解は自明である。

$$\Theta_0^{(0)} = \frac{1}{3}\delta_b, \tag{3.56}$$

$$\Theta_1^{(m)} = v_b^{(m)}, \tag{3.57}$$

$$\Theta_\ell^{(m)} = 0 \qquad (\ell \geq 2), \tag{3.58}$$

$$E_2^{(m)} = -\frac{\sqrt{6}}{4}\Theta_2^{(m)} = 0, \tag{3.59}$$

$$E_\ell^{(m)} = B_\ell^{(m)} = V_\ell^{(m)} = 0. \tag{3.60}$$

光子とバリオンは完全にカップルし、単一の完全流体としてふるまう。従って粘性である $\Theta_2^{(m)}$ は存在せず、それをソースとする偏光も生成されない。

2.2 1th order: acoustic oscillation & frame dragging

光子とバリオンの相対速度 $V_{\gamma b}^{(m)}$ に、$k/\dot{\tau}$ オーダーの「摂動」を与える。$d_1^{(m)}$ を任意関数として

$$v_b^{(m)} = \Theta_1^{(m)} + \frac{k}{\dot{\tau}_c} d_1^{(m)} \tag{3.61}$$

を光子/バリオンのオイラーの式にそれぞれ代入し、$k/\dot{\tau}$ オーダーは無視する。

- scalar mode

$$\dot{\Theta}_1^{(0)} = k\left(\Theta_0^{(0)} + \Phi_A - \frac{2}{5}\Theta_2^{(0)}\right) + kd_1^{(0)}, \tag{3.62}$$

$$\dot{\Theta}_1^{(0)} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\Theta_1^{(0)} + k\Phi_A - \frac{k}{R}d_1^{(0)}, \tag{3.63}$$

- vector mode

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{5}k\Theta_2^{(1)} + kd_1^{(1)}, \tag{3.64}$$

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\Theta_{c1}^{(1)} - \frac{k}{R}d_1^{(1)}. \tag{3.65}$$

ただし、$\Theta_{c1}^{(1)} \equiv \Theta_1^{(1)} - B^{(1)}$ (2.82) である。

同様に、温度/偏光の 4 重極の式 ($\ell = 2$) において任意関数 $q_1^{(m)}$ を用いて

$$E_2^{(m)} = -\frac{\sqrt{6}}{4}\Theta_2^{(m)} + \frac{k}{\dot{\tau}_c}q_1^{(m)}, \tag{3.66}$$

$$\dot{\Theta}_2^{(m)} = k\left(\frac{\sqrt{4-m^2}}{3}\Theta_1^{(m)} - \frac{\sqrt{9-m^2}}{7}\Theta_3^{(m)}\right) - \frac{3}{4}\dot{\tau}_c\Theta_2^{(m)} - kq_1^{(m)}, \tag{3.67}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4}\dot{\Theta}_2^{(m)} = kq_1^{(m)}. \tag{3.68}$$

$\Theta_2^{(m)}$ はタイトカップリング 1 次でも $\dot{\tau}_c$ に比例する項が残るため、0 次と同様にダンプして残らない。従って $\Theta_2^{(m)}$ はタイトカップリング 2 次の量である。前節でも触れたように、偏光は $\Theta_2^{(m)}$ のみをソースとする。しかし $\Theta_2^{(m)}$ はトムソン散乱の過程でダンプしてしまうため、偏光の大きさは温度ゆらぎの 10%以下である。これが、偏光の大きさが非常に小さい理由である。つまりカップリングが強いために粘性が生じず、電子のまわりに温度異方性の 4 重極パターンができないため偏光が生成されないのである。

$d_1^{(m)}$, $q_1^{(m)}$ を消去すれば、1 次の階層方程式として

- scalar mode

$$\dot{\Theta}_0^{(0)} = -\frac{k}{3}\Theta_1^{(0)} - \dot{\Phi}_H, \tag{3.69}$$

$$\dot{\Theta}_1^{(0)} = -\frac{\dot{R}}{1+R}\Theta_1^{(0)} + \frac{k}{1+R}\Theta_0^{(0)} + k\Phi_A, \tag{3.70}$$

$$\Theta_\ell^{(0)} = 0 \qquad (\ell \geq 2), \tag{3.71}$$

- vector mode

$$\dot{\Theta}^{(1)}_{c1} = -\frac{\dot{R}}{1+R}\Theta^{(1)}_{c1}, \tag{3.72}$$

$$\dot{\Theta}^{(1)}_{\ell} = 0 \qquad (\ell \geq 2). \tag{3.73}$$

ただし $\bar{a} \propto R$ を用いた。このように、タイトカップリング 1 次では無限次の階層方程式が $\ell = 1$ で閉じる。また、テンサーモードはバリオンとのカップリングがないため、タイトカップルでは $\Theta^{(2)}_{\ell} = 0$ である。

特にスカラーモードの階層方程式は、(3.69), (3.70) より導ける 1 本の微分方程式:

$$\ddot{\Theta}^{(0)}_0 + \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Theta}^{(0)}_0 + k^2 c_s^2 \Theta^{(0)}_0 = F, \tag{3.74}$$

$$c_s^2 \equiv \frac{\dot{\bar{p}}_\gamma}{\dot{\bar{\rho}}_b + \dot{\bar{\rho}}_\gamma} = \frac{1}{3(1+R)}, \tag{3.75}$$

$$F \equiv -\ddot{\Phi}_H - \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Phi}_H - \frac{k^2}{3}\Phi_A \tag{3.76}$$

に帰着する。これは外力 F のもとでの調和振動子の式であり、解析解が求まる。振動は音波として生じており、「アコースティック振動 (acoustic osillation)」と呼ばれている。

2.3 2nd order: diffusion damping

$V^{(m)}_{\gamma b}$ に $(k/\dot{\tau})^2$ オーダーの摂動を加える。

$$v^{(0)}_b = \Theta^{(0)}_1 + \frac{k}{\dot{\tau}_c} d^{(m)}_1 + \left(\frac{k}{\dot{\tau}_c}\right)^2 d^{(m)}_2, \tag{3.77}$$

$(k/\dot{\tau})^2$ オーダーを無視すると、

- scalar mode

$$\dot{\Theta}^{(0)}_1 = k\left(\Theta^{(0)}_0 + \Phi_A - \frac{2}{5}\Theta^{(0)}_2\right) + k d^{(0)}_1 + \frac{k^2}{\dot{\tau}_c} d^{(0)}_2, \tag{3.78}$$

$$\dot{\Theta}^{(0)}_1 + \frac{k}{\dot{\tau}_c}\dot{d}^{(0)}_1 = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\left(\Theta^{(0)}_1 + \frac{k}{\dot{\tau}_c} d^{(0)}_1\right) + k\Phi_A - \frac{k}{R} d^{(0)}_1 - \frac{k^2}{R\dot{\tau}_c} d^{(0)}_2, \tag{3.79}$$

- vector mode

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{5}k\Theta_2^{(1)} + kd_1^{(0)}, \tag{3.80}$$

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} + \frac{k}{\dot{\tau}_c}\dot{d}_1^{(0)} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\left(\Theta_{c1}^{(1)} + \frac{k}{\dot{\tau}_c}d_1^{(1)}\right) - \frac{k}{R}d_1^{(1)} - \frac{k^2}{R\dot{\tau}_c}d_2^{(1)}. \tag{3.81}$$

$d_2^{(m)}$ を消去し、タイトカップリング 1 次で求めた $d_1^{(m)}$ を代入すれば

- scalar mode

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_1^{(0)} = & -\frac{\dot{R}}{1+R}\Theta_1^{(0)} + \frac{k}{1+R}\left(\Theta_0^{(0)} - \frac{2}{5}\Theta_2^{(0)}\right) + k\Phi_A \\ & -\frac{1}{\dot{\tau}_c}\frac{R}{1+R}\left[\ddot{\Theta}_1^{(0)} - k\left(\dot{\Theta}_0^{(0)} + \dot{\Phi}_A\right)\right] \\ & -\frac{1}{\dot{\tau}_c}\frac{\dot{R}}{1+R}\left[\dot{\Theta}_1^{(0)} - k\left(\Theta_0^{(0)} + \Phi_A\right)\right],\end{aligned} \tag{3.82}$$

- vector mode

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} = & -\frac{\dot{R}}{1+R}\Theta_{c1}^{(1)} - \frac{k}{1+R}\frac{\sqrt{3}}{5}\Theta_2^{(1)} \\ & -\frac{1}{\dot{\tau}_c}\frac{R}{1+R}\ddot{\Theta}_{c1}^{(1)} - \frac{1}{\dot{\tau}_c}\frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Theta}_{c1}^{(1)}.\end{aligned} \tag{3.83}$$

$\Theta_2^{(m)}$ はタイトカップリング 1 次で存在せず 2 次の量であるから、$\dot{\tau}_c^{-1}\Theta_2^{(m)}$ は無視して良い。
$\ddot{\Theta}_1^{(m)}$ に 1 次の式を代入すれば、タイトカップリング 2 次の階層方程式を得る。

- scalar mode

$$\dot{\Theta}_0^{(0)} = -\frac{k}{3}\Theta_1^{(0)} - \dot{\Phi}_H, \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_1^{(0)} = & -\frac{\dot{R}}{1+R}\Theta_1^{(0)} + \frac{k}{1+R}\left(\Theta_0^{(0)} - \frac{2}{5}\Theta_2^{(0)}\right) + k\Phi_A \\ & +\frac{k}{\dot{\tau}_c}\left(\frac{R}{1+R}\right)^2\dot{\Theta}_0^{(0)} \\ & +\dot{\tau}_c^{-1}(\text{cosmological redshift terms})(\Theta_0^{(0)}, \Theta_1^{(0)}, \dot{\Theta}_1^{(0)}; \dot{R}, \dot{R}^2, \ddot{R}),\end{aligned} \tag{3.85}$$

$$\Theta_2^{(0)} = \frac{k}{\dot{\tau}_c}\frac{2}{3}f_2^{-1}\Theta_1^{(0)}, \tag{3.86}$$

$$\Theta_\ell^{(0)} = 0 \qquad (\ell \geq 3), \tag{3.87}$$

- vector mode

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} &= -\frac{\dot{R}}{1+R}\Theta_{c1}^{(1)} - \frac{k}{1+R}\frac{\sqrt{3}}{5}\Theta_2^{(1)} \\ &\quad +\dot{\tau}_c^{-1}(\text{cosmological redshift terms})(\Theta_{c1}^{(1)}, \dot{\Theta}_{c1}^{(1)}; \dot{R}, \dot{R}^2, \ddot{R}), \qquad (3.88)\\ \Theta_2^{(1)} &= \frac{k}{\dot{\tau}_c}\frac{\sqrt{3}}{3} f_2^{-1}\Theta_{c1}^{(1)}, \qquad (3.89)\\ \Theta_\ell^{(1)} &= 0 \qquad (\ell \geq 3). \qquad (3.90)\end{aligned}$$

(3.85), (3.88) の最後の項は、$\dot{R} \propto \dot{a}$ を含む項である。$\Theta_2^{(m)}$ は (3.67) より求められる。f_2 は (2.60) で定義されるファクターであり、偏光を含めない時 $9/10$、含める時 $3/4$ である。もちろん今は一貫して後者のケースを扱っているが、偏光の温度ゆらぎへのフィードバックがどのような効果を及ぼすかを見るため、両者のケースを含めて f_2 とした。タイトカップリング 2 次では階層方程式は $\ell = 2$ で閉じ、

- scalar mode

$$\ddot{\Theta}_0^{(0)} + \left[\frac{\dot{R}}{1+R} + 2\frac{k^2}{\dot{\tau}_c}D^{(0)}(R)\right]\dot{\Theta}_0^{(0)} + k^2 c_s^2 \Theta_0^{(0)} = F + \dot{\tau}_c^{-1} Z^{(0)}, \qquad (3.91)$$

$$D^{(0)}(R) \equiv \frac{1}{6}\left[\left(\frac{R}{1+R}\right)^2 + \frac{4}{5(1+R)} f_2^{-1}\right], \qquad (3.92)$$

- vector mode

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} + \left[\frac{\dot{R}}{1+R} + \frac{k^2}{\dot{\tau}_c}D^{(1)}(R)\right]\Theta_{c1}^{(1)} = \dot{\tau}_c^{-1} Z^{(1)} \qquad (3.93)$$

$$D^{(1)}(R) \equiv \frac{1}{5(1+R)} f_2^{-1}. \qquad (3.94)$$

$Z^{(m)}$ は (cosmological redshift terms) から派生する項である。(3.91) は減衰振動、(3.93) は指数的単調減衰の初等的な方程式である。

タイトカップリングの 2 次では、粘性の効果である $\Theta_2^{(m)}$ が寄与してくる。これは、光子の平均自由行程とゆらぎのスケールが同等になればなるほど両者を単一の流体とみなせなくなり、ズレが効いてくるためである。結果として、このスケールで光子はゆらぎをならしてまわり、$\Theta_0^{(0)}$, $\Theta_1^{(1)}$ は激しくダンプすることになる。プロセスはシルク減衰 (Silk damping) と全く同じであり、シルク減衰がバリオンのゆらぎをならすことを指しているように、光子のゆらぎがならされることを「拡散減衰 (diffusion damping)」と呼んだりする* 。

* 両者をシルク減衰と呼んでも、さしつかえはないと思う。ちなみに、Silk とは人の名前である。

3 Subhorizon Scale: Solutions

3.1 acoustic oscillation

CMB ゆらぎの物理をつかむ上でおそらく最も重要であり、しかも観測的にもっとも顕著な特徴を示すものが、スカラーモードのタイトカップリング 1 次 (3.74) に現れる「アコースティック振動」であろう。重力不安定性によってバリオンはポテンシャルに引き込まれる。光子とバリオンはタイトカップルしているため、光子も共に引き込まれて青方偏移を受け、温度を上げる。しかし光子流体は圧力を持っているため、ポテンシャルに引き込まれると反発してもとに戻る。この繰り返しが振動モードとなって現れるのである。圧力の効果は (3.74) の 3 項目: $k^s c_s^2 \Theta_0^{(0)}$ が決めており、音速 c_s の音波モード (acoustic mode) である。

(3.74) は解析解を求めることができる (Hu & Sugiyama 1995)。方程式を解く上で 2 項目の宇宙膨張による「まさつ項」が余計なので、$\Theta_0^{(0)} = \theta(1+R)^{-1/2}$ という θ を定義して (3.74) に代入すれば

$$\ddot{\theta} + \left(k^2 c_s^2 - U\right)\theta = (1+R)^{1/2} F, \tag{3.95}$$

$$U \equiv \frac{\ddot{R}}{2(1+R)} - \frac{\dot{R}^2}{4(1+R)^2}. \tag{3.96}$$

今、系のタイムスケールを決めるのはアコースティック振動の音速 c_s とゆらぎのスケール k である。そこで、宇宙膨張のタイムスケール[†] $U^{-1/2}$ と比較して $k^2 c_s^2 \gg U$ の条件のもとで (3.95) を解くことを考える。特解 $\tilde{\theta}$ は、$k^2 c_s^2 \gg U$ を WKB 近似の条件におきかえれば WKB 近似の 1 次で

$$\tilde{\theta}_\pm = \frac{1}{\sqrt{c_s}} \exp(\pm i k r_s), \tag{3.97}$$

$$r_s(\tau) \equiv \int_0^\tau d\tau' c_s(\tau'). \tag{3.98}$$

r_s は音速の地平線 (sound horizon) と呼ばれており、光子流体の圧力が届く範囲をあらわしている。アコースティック振動のスケールはこのサウンドホライズンが決めている。$r_s \sim c_s \tau \propto (1+R)^{-1/2}\tau$ で明らかなように、宇宙膨張 $R \propto \bar{a}$ とともに音速は低下して圧力の届く範囲が小さくなり、サウンドホライズンは小さくなる。特解より、温度ゆらぎは $\tilde{\Theta}_0^{(0)} \propto (1+R)^{-1/4}$ のように宇宙膨張のまさつ項のため弱い減衰振動になることが分かる

[†] 正確に言えば、宇宙膨張のタイムスケール $\dot{R}$ は無視されていない。無視されているのはより高次のオーダーである $\ddot{R}, \dot{R}^2$ である。

が、最も重要なのは脱結合 (decoupling) 時のサウンドホライズンである。Eisenstein & Hu (1998) によるフィッティングでは

$$r_s(z_d) = 44.5 \frac{\ln(9.83/\Omega_0 h^2)}{\sqrt{1+10(\Omega_b h^2)^{3/4}}} \ \mathrm{Mpc} \tag{3.99}$$

が得られている。

一般解は、

$$\theta(\tau) = C_+ \tilde{\theta}_+(\tau) + C_- \tilde{\theta}_-(\tau) + S_g(\tau). \tag{3.100}$$

$C_\pm$ は初期条件から決められる。S_g は、重力場の寄与によるソース関数:

$$S_g(\tau) \equiv \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\Delta} W(\tau,\tau') \left(1+R(\tau')\right)^{1/2} F(\tau'), \tag{3.101}$$

Δ は ロンスキアン (Wronskian) 行列:

$$\Delta(\tilde{\theta}_+, \tilde{\theta}_-) \equiv \tilde{\theta}_+ \dot{\tilde{\theta}}_- - \dot{\tilde{\theta}}_+ \tilde{\theta}_- = -2ik, \tag{3.102}$$

$W(\tau,\tau')$ はソースを拾い出すウエイトを決める窓関数 (window function):

$$W(\tau,\tau') \equiv \tilde{\theta}_+(\tau')\tilde{\theta}_-(\tau) - \tilde{\theta}_+(\tau)\tilde{\theta}_-(\tau') \tag{3.103}$$

$$= -2i \frac{\sin\left[k\left(r_s(\tau) - r_s(\tau')\right)\right]}{\sqrt{c_s(\tau)c_s(\tau')}}. \tag{3.104}$$

$\Theta_0^{(0)}$ が求まれば、$\Theta_1^{(0)}$ はボルツマン方程式: $\dot{\Theta}_0^{(0)} = -k\Theta_1^{(0)}/3 - \dot{\Phi}_H$ より求められる。解析解 (3.100) は数値解を 10% の精度で再現することが確かめられている (Hu & Sugiyama 1995) が、アコースティック振動を形作っている物理を理解するには (3.100) は不便である。さらに簡単化したケースは、次のセクションで議論する。

3.2 frame dragging

タイトカップリング 1 次のベクターモードの解は、自明である。

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} = -\frac{\dot{R}}{1+R}\Theta_{c1}^{(1)}, \tag{3.105}$$

$$\Theta_{c1}^{(1)} \propto (1+R)^{-1}. \tag{3.106}$$

$\Theta_{c1}^{(1)} = \Theta_1^{(1)} - B^{(1)}$ であったことを思い出してほしい。$B^{(1)}$ というのは、時空が回転する効果である。従ってベクターモードの双極成分 $\Theta_1^{(1)}$ は時空の回転とカップルしたままひきずられた効果と言える。しかし、ベクターモードは (E.39):

$$\dot{B}^{(1)} + 2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}B^{(1)} = -8\pi G\bar{a}^2\bar{p}\frac{\pi^{(1)}}{k} \tag{3.107}$$

のように非等方ストレス $\pi^{(1)}$ のみをソースとし、$\pi^{(1)} = 0$ であれば $B^{(1)} \propto \bar{a}^{-2}$ のようにすぐ減衰してしまうため、ベクターモードは存在できない。一方、$\pi^{(1)} \neq 0$ を持つようなソースはコスミックストリングやトポロジー欠陥等で可能であり、偏光の観測によってベクターモードの存在の有無を調べることにより、そのようなモデルの是非が決められるだろう。

3.3 diffusion damping

タイトカップリング 2 次の方程式 (3.91), (3.93) の解を求める。なお、タイトカップリングからのズレは宇宙膨張のスケールに比べて十分ローカルスケールで起こるため、再び宇宙膨張による項は無視する。

- scalar mode

$$\ddot{\Theta}_0^{(0)} + 2\frac{k^2}{\dot{\tau}_c}D^{(0)}\dot{\Theta}_0^{(0)} + k^2c_s^2\Theta_0^{(0)} = -\frac{k^2}{3}\Phi_A. \tag{3.108}$$

ここで、メトリックの時間微分は無視するが、空間微分 $k^2\Phi_A$ は適切に考慮に入れねばならない。従って、

$$\left[\Theta_0^{(0)} + (1+R)\Phi_A\right]^{\cdot\cdot} + 2\frac{k^2}{\dot{\tau}_c}D^{(0)}\left[\Theta_0^{(0)} + (1+R)\Phi_A\right]^{\cdot} + k^2c_s^2\left[\Theta_0^{(0)} + (1+R)\Phi_A\right] = 0 \tag{3.109}$$

と書き換える。$\Theta_0^{(0)} + (1+R)\Phi_A \propto \exp(i\int\omega d\tau)$ という解を求めれば、分散関係式:

$$\omega^2 - 2i\frac{k^2}{\dot{\tau}_c}D^{(0)}\omega - c_s^2k^2 = 0 \tag{3.110}$$

を得る。振動解と減衰解 を得るため、$\omega = \omega_r + i\omega_i$ に分ければ、

$$\omega_r^2 - c_s^2k^2 - \omega_i^2 + 2\frac{k^2}{\dot{\tau}_c}D^{(0)}\omega_i = 0, \tag{3.111}$$

$$\omega_r\left(\omega_i - \frac{k^2}{\dot{\tau}_c}D^{(0)}\right) = 0, \tag{3.112}$$

解は

$$\omega_r = c_s k, \tag{3.113}$$

$$\omega_i = \frac{k^2}{\dot{\tau}_c} D^{(0)}. \tag{3.114}$$

ただし、ω_r において $(k/\dot{\tau}_c)^2$ のオーダーを無視した。ω_r は明らかに音速による振動モード、すなわちタイトカップリング 1 次で得られたアコースティック解であるが、ω_i はタイトカップリング 2 次 $(\sim O(k/\dot{\tau}_c))$ で初めて得られるダンピングの解である (Kaiser 1983, Hu 1995)。そのダンピングスケールは、

$$\left(\lambda_D^{(0)}\right)^2 = \left(\frac{1}{k_D^{(0)}}\right)^2 = \int \frac{D^{(0)}}{\dot{\tau}_c} d\tau = \int \frac{d\tau}{6\dot{\tau}_c} \left[\left(\frac{R}{1+R}\right)^2 + \frac{4}{5(1+R)} f_2^{-1}\right]. \tag{3.115}$$

- vector mode

$$\dot{\Theta}_{c1}^{(1)} + \frac{k^2}{\dot{\tau}_c} D^{(1)} \Theta_{c1}^{(1)} = 0. \tag{3.116}$$

解は単純に $\Theta_{c1}^{(1)} \propto \exp\left(-(k/k_D)^2\right)$ で書け、

$$\left(\lambda_D^{(1)}\right)^2 = \left(\frac{1}{k_D^{(1)}}\right)^2 = \int \frac{D^{(1)}}{\dot{\tau}_c} d\tau = \int \frac{d\tau}{5\dot{\tau}_c} \frac{1}{1+R} f_2^{-1}. \tag{3.117}$$

再び (2.60) を記す。

$$f_2 = \begin{cases} 9/10 & \text{(without polarization)}, \\ 3/4 & \text{(with polarization)}. \end{cases} \tag{3.118}$$

明らかに、偏光は $\lambda_D^{(0)}$ を増す方向に効くことが分かる。偏光の存在は $Q_2^{(m)} \propto f_2^{-1} Q_1^{(m)}$ のように粘性である温度の 4 重極を生成し、結果としてよりダンピングを増すのである。ダンピングスケールは、定性的に光子の平均自由行程 $\sim \dot{\tau}_c^{-1}$ のランダムウォーク、$\lambda_D \sim \sqrt{\dot{\tau}_c \tau}\ \dot{\tau}_c^{-1} = \sqrt{\tau/\dot{\tau}_c}$ によって理解できる‡ 。

4 Acoustic Oscillation: Qualitative Pictures

4.1 acoustic oscillation

アコースティック振動の一般解 (3.100) を、定性的に理解する。既に述べたように、タイトカップリングで重要なタイムスケールは宇宙膨張よりも短い。従って基礎方程式 (3.74)

‡ 時間の τ と、光学的深さ τ_c を混同しないでほしい。

において宇宙膨張のタイムスケールで変化する $\dot{R}, \dot{\Phi}_H, \dot{\Phi}_A$ を全て無視する。すでに見たように、$\dot{R}$ の項は $(1+R)^{-1/4}$ の弱い減衰を与える。しかし、$\dot{\Phi}_H, \dot{\Phi}_A$ に関しては、実は RD で注意を要する。ホライズンをに入ったゆらぎはニュートン的な重力不安定性によって成長しようとする。光子のゆらぎもバリオンが収縮するのとカップルして成長しようとするが、自身の放射圧によって収縮が阻害され、脱結合まで成長できない。しかし、RD においてはエネルギー密度を支配しているのは光子である。その光子のゆらぎが成長できないため、エネルギー密度のゆらぎをソースとするポテンシャルは、宇宙膨張と共に減衰していってしまう。一方、光子と相互作用をしない CDM でも、RD 時の膨張率が収縮のタイムスケールよりも早いため収縮できず、やはり成長できない。結果としてポテンシャルは減衰し、$\dot{\Phi}_H \neq 0 \neq \dot{\Phi}_A$ となる。もちろんこれは宇宙膨張のタイムスケールであり、アコースティック振動のタイムスケールに比べて長いが、ホライズンをくぐった直後はボルツマン方程式 (2.61) は $\dot{\Theta}_0^{(0)} \approx -\dot{\Phi}_H$ であるので、$\dot{\Phi}_H$ の存在によって温度ゆらぎは共鳴的にブーストされる。これは後に説明する。

以上の事を考慮しても、アコースティック振動の基本的なふるまいは圧力 $k^2 c_s^2 \Theta_0^{(0)}$ と静的なポテンシャル $k^2\Phi_A$ の競合で決まっているため、定性的な描像は大きな影響を受けない。

$$\ddot{\Theta}_0^{(0)} + k^2 c_s^2 \Theta_0^{(0)} = -\frac{k^2}{3}\Phi_A. \tag{3.119}$$

右辺の静的ポテンシャルの寄与を生かすため、

$$\left[\Theta_0^{(0)} + (1+R)\Phi_A\right]^{\cdot\cdot} + k^2 c_s^2 \left[\Theta_0^{(0)} + (1+R)\Phi_A\right] = 0. \tag{3.120}$$

解は調和振動子として自明に与えられ、

$$\Theta_0^{(0)}(\tau) + (1+R)\Phi_A = \left[\Theta_0^{(0)}(\tau_H) + (1+R)\Phi_A\right]\cos(kr_s) + \frac{1}{kr_s}\dot{\Theta}_0^{(0)}(\tau_H)\sin(kr_s). \tag{3.121}$$

τ_H は、ホライズンに入ってきた時の時間である。双極成分である光子流体の速度は

$$\frac{\Theta_1^{(0)}(\tau)}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{k}\dot{\Theta}_0^{(0)}(\tau) = \sqrt{3}c_s\left[\Theta_0^{(0)}(\tau_H) + (1+R)\Phi_A\right]\sin(kr_s) + \frac{1}{kr_s}\dot{\Theta}_0^{(0)}(\tau_H)\cos(kr_s). \tag{3.122}$$

ファクター $\sqrt{3}$ は、「観測される」温度ゆらぎの振幅を $\left|\Theta_\ell^{(m)}\right|/\sqrt{2\ell+1}$ となるように定義したためである (3.141) [§]。微分により、$\Theta_0^{(0)}$ と $\Theta_1^{(0)}$ は位相が $\pi/2$ ずれている。$\Theta_0^{(0)}(\tau_H)$, $\dot{\Theta}_0^{(0)}(\tau_H)$ は、ゆらぎのスケールがホライズンに入ってきたときの初期条件、すなわち SW 効果である。

[§] これは文献によって異なる。対応は Appendix J を参照のこと

4.1.1 adiabatic initial condition

MD でホライズンに入るゆらぎのみを考える。断熱ゆらぎの SW 効果 (3.40):

$$\left[\Theta_0^{(0)} + \Phi_A\right](\tau_H) = \frac{\Phi_A}{3}, \tag{3.123}$$

$$\dot{\Theta}_0^{(0)}(\tau_H) = 0 \tag{3.124}$$

を代入すれば、

$$\left[\Theta_0^{(0)} + \Phi_A\right](\tau) = \frac{1}{3}\Phi_A(1+3R)\cos(kr_s) - R\Phi_A, \tag{3.125}$$

$$\frac{\Theta_1^{(0)}(\tau)}{\sqrt{3}} = \frac{c_s}{\sqrt{3}}\Phi_A(1+3R)\sin(kr_s). \tag{3.126}$$

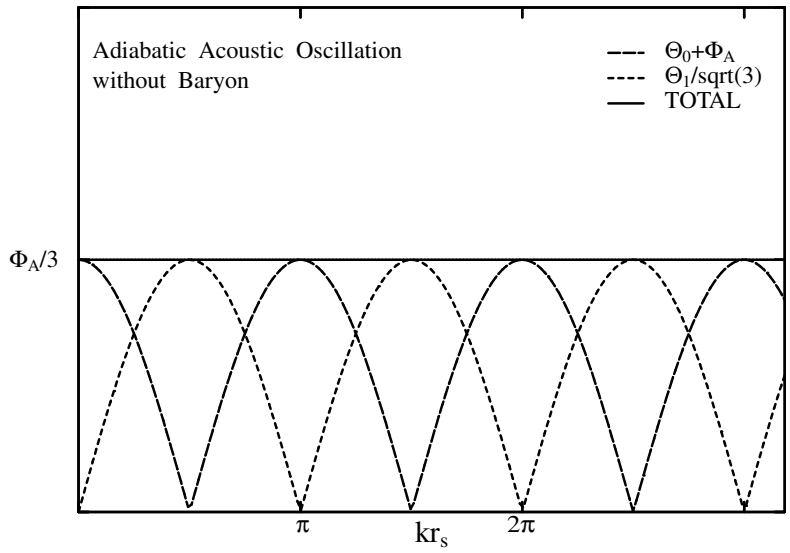
ここで、バリオンのない宇宙 $R = 0$, $c_s = 1/\sqrt{3}$ を考えると、$\Theta_0^{(0)}$, $\Theta_1^{(0)}$ からのトータルの寄与は

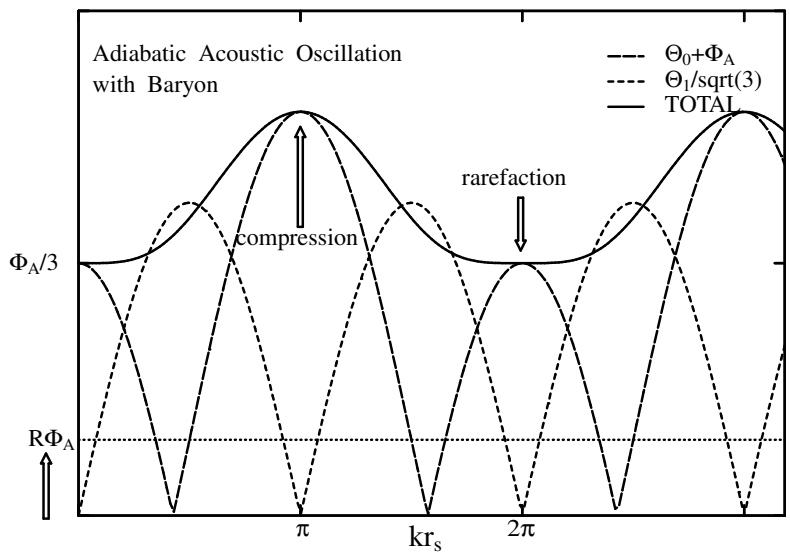
$$\left|\Theta_0^{(0)} + \Phi_A\right|^2 + \left|\frac{\Theta_1^{(0)}}{\sqrt{3}}\right|^2 = 1 \tag{3.127}$$

となり、スペクトルには何の構造も見られない (図 3.1)。しかし、$R \neq 0$ では調和的なピークがあらわれる。密度ゆらぎが正 ($\delta > 0$) の領域を考えれば、ポアソン方程式より $\Phi_H > 0 \to \Phi_A < 0$ である。従ってバリオンの存在は (3.125) の最後の項 $-R\Phi_A > 0$ を通じてゼロ点を正の方向にシフトさせ、圧縮 (compression) フェイズで高いファーストドップラーピークを形成し、次の希薄 (rarefaction) フェイズでは $\Theta_1^{(0)}/\sqrt{3}$ にならされてフラットになり、その後再び圧縮フェイズに入り、高いピークを作る (図 3.1)。ピークの高さを決めているのはバリオンの量 $R \propto \Omega_b h^2$ であり、$\Omega_b h^2$ を増やすと 1st ピークと 3rd ピークが高くなる。1st ピークと 3rd ピークを同時に変化させるようなパラメター依存性を示すのは $\Omega_b h^2$ のみであり、CMB の観測から最も良く決まるパラメターである。

一方、RD でホライズンに入るゆらぎに対しては $\dot{\Phi}_H$ の効果が重大な寄与をして共鳴的にピークをブーストし、ファーストドップラーピークはどんどん高くなってゆく。RD から MD になる時期は $\Omega_0 h^2$ に比例しているため、$\Omega_0 h^2$ が小さければ MD になるのが遅れ、ドップラーピークが高くなる。一方 $\Omega_b h^2$ によるピークの変化は 1st と 3rd を同時に高くするため、$\Omega_0 h^2$, $\Omega_b h^2$ によるピークの高さの変化は、3rd ピークまで観測することによって識別可能である。

図 3.1: 断熱ゆらぎによるアコースティック振動。縦軸は絶対値、 横軸は振動のフェイズ kr_s であり、π が最も圧縮されたフェイズ、2π は希薄フェイズである。ただし、r_s は固定して考える。上図, 下図はそれぞれ $R = 0$, $R \neq 0$ のモデルである。バリオンのないモデルではスペクトルに特徴が全く残らないが、少しでもバリオンがあれば圧縮フェイズでファーストドップラーピークを形成し、続く希薄フェイズではならされる。そして 3π で再び圧縮フェイズに入り、高いピークを持つ。





4.1.2 isocurvature initial condition

次に、等曲率ゆらぎを考える。まず等曲率ゆらぎと断熱ゆらぎのゆらぎの発展の違いをおさらいすれば、断熱ゆらぎのケースではポテンシャル Φ_H は RD, MD を通して一定であった (遷移期を除く)。Φ_H は宇宙初期に生成されており、以降ずっと一定なのである。一方、等曲率ゆらぎでは MD でこそ Φ_H は一定だが、RD では $\Phi_H \propto \bar{a}$ で成長する。初期条件は $\Phi_H(0) = 0 = \Theta(0)$ である (それが「等曲率」の意味であった)。

断熱ゆらぎのケースでは MD でホライズンに入るゆらぎのみを考えたが、実は脱結合が終わる時期でさえ宇宙は完全な MD ではない。しかし断熱ゆらぎでは、 RD, MD を通じてホライズンの外ではポテンシャルも温度ゆらぎも時間発展をしないので、常に

$$\left[\Theta_0^{(0)} + \Phi_A\right](\tau_H) = \frac{\Phi_A}{3}, \tag{3.128}$$

$$\dot{\Theta}_0^{(0)}(\tau_H) = 0 \tag{3.129}$$

と置けたのである。しかし、等曲率ゆらぎでは事情が大きく変わる。LSS のアコースティック振動に最も寄与しているゆらぎは、RD かもしくは $RD \to MD$ の過渡期にホライズンに入るゆらぎである。等曲率ゆらぎの場合、前述のように $\dot{\Theta}_0^{(0)}(\tau_H) \neq 0$ である。$\Theta_0^{(0)}(\tau_H)$ は、$\Theta_0^{(0)}(\tau)$ が時間とともに成長しているのでホライズンに入る時期に依存する。しかしおおまかなふるまいを見る上では、$\Theta_0^{(0)}$ がゼロからまだそんなに大きくなっていないとし、アコースティック解として

$$\Theta_0^{(0)}(\tau) + (1+R)\Phi_A \approx \frac{1}{kr_s}\dot{\Theta}_0^{(0)}(\tau_H)\sin(kr_s) \tag{3.130}$$

を得る。ただし解を求める際に $\dot{\Phi}_H \approx 0$ という等曲率ゆらぎの条件と矛盾した仮定を用いているので、あくまでも現象論的な意味しか持たない。おおざっぱな議論であったが、等曲率ゆらぎは断熱ゆらぎと位相が $\pi/2$ 異なり、sin 的振動を行なうのである。数値的に解いた結果でも確かに sin 的振動をしているが、この振動の形を最も強くサポートしているのは $\dot{\Phi}_H$ によるピークのブーストである。断熱ゆらぎの時とメカニズムは同様であるが、等曲率ゆらぎの $\dot{\Phi}_H$ は sin 的に共鳴するのである。

4.2 diffusion damping

タイトカップリング 2 次によるダンピングは、小さなスケールのゆらぎを消すように寄与する (図 3.2)。結果としてファーストピーク以降は相対的に低くなり、バリオンによって

高くなっている 3rd ピーク以降は著しくダンプしてしまう。

図 3.2 では 2nd ピークが $\Theta_1^{(0)}$ の寄与によって埋められている。しかし、観測される温度分布は天球面上の 2 次元面に射影されたものであるため、ドップラー効果による温度変化 $\Theta_1^{(0)}$ のような方向を持つ成分は、多くがキャンセルしてしまう。つまり、視線方向に垂直なドップラーシフトを我々は観測することができないし、視線方向に互いに逆方向を向く成分が混在していれば、積分した結果ゆらぎは残らないのである。3 次元のフーリエモードは、全方向に対しその振幅しか問題にしないため、前述のような成分も平等にパワーに含められる。結果として $\Theta_1^{(0)}$ の寄与が $\Theta_0^{(0)}$ と同程度となるのである。

5 Free Streaming & Projection

脱結合後、光子は我々の方へ飛んで来る。最終散乱面 (Last scattering surface; LSS) に存在していたゆらぎによる「空間的な」バリエーションは、我々によって「空の」バリエーションとして観測される。それでは、図 3.2 に示したようなアコースティック振動はどのように観測されるのだろうか。

これまでは、ゆらぎのスケールは共動波数 (comoving wave number) k (長さ$^{-1}$) であらわして来た。ゆらぎを 3 次元空間のフーリエモードとして扱ってきたわけである。しかし、我々が観測できるのは、「空」という 2 次元面に射影された情報のみであり、視線方向の空間スケールの情報は全て視線上で積分されてしまう。また、空に射影されたゆらぎのスケールを測るものさしは、すなわちそのスケールを見込む「角度」であり、おおざっぱにはスケール k^{-1} のゆらぎを見込む角度 θ は

$$\theta \approx \frac{k^{-1}}{r_\theta(z)} \tag{3.131}$$

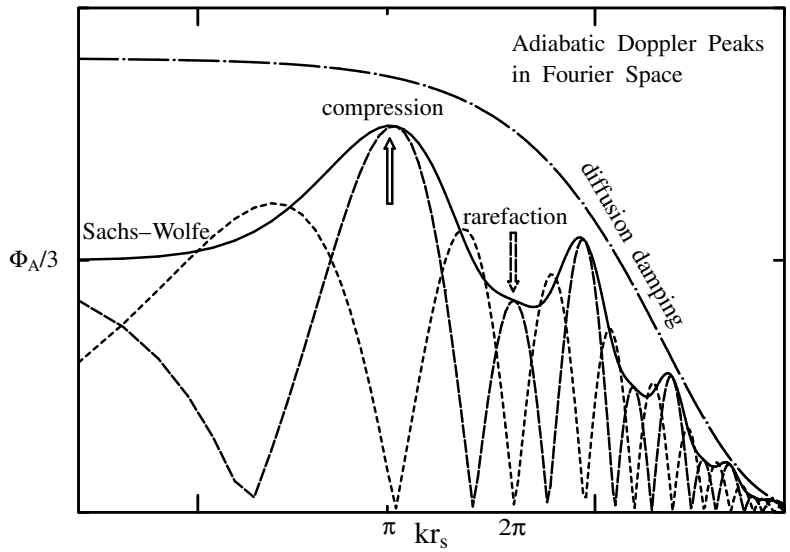
で与えられる。$r_\theta(z)$ は、問題にしているゆらぎまでの視線方向の共動角径距離 (comoving angular diameter distance) である¶ 。

5.1 angular power spectrum & cosmic variance

観測された温度ゆらぎのパターンを定量化するには、「角パワースペクトル (angular power spectrum)」C_ℓ を用いるのが良い。ここで ℓ は、観測された温度パターンを空上に調和展

¶ ここでは全て、宇宙膨張を抜いた共動量を用いている。物理的なスケールはそれぞれ、$k_{phys} = k/\bar{a}$, $D_\theta = \bar{a} r_\theta$。

図 3.2: タイトカップリング 2 次の光子のストリームによる、温度ゆらぎの拡散減衰 (diffusion damping)。縦軸は絶対値、 横軸は log スケールの振動のフェイズ kr_s。ファーストドップラーピークは $kr_s = \pi$ (最大圧縮フェイズ) にあらわれる。希薄フェイズでは $\Theta_1^{(0)}$ の寄与によってピークが埋められているが、これは 3 次元フーリエスペースのスペクトルであるためである。天球上の 2 次元面に射影したスペクトル (角スペクトル) にすると、$\Theta_1^{(0)}$ に寄与する成分の多くは互いにキャンセルし、スペクトルの形はほとんど $\Theta_0^{(0)}$ のみで決まる。サウンドホライズンをくぐる前の成分 $(kr_s < \pi)$ はザクス – ヴォルフェ効果による寄与であり、ゆらぎの初期条件である。実線は $|\Theta_0 + \Phi_A|$、破線は $|\Theta_1| / \sqrt{3}$ である。



開した時の「角波数」とでも呼ぶべきものである。我々の天球上 (θ, ϕ) に観測される温度パターンは、

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{\ell,m} a_\ell^m Y_\ell^m(\theta, \phi) \tag{3.132}$$

のように展開できる。パターンを定量化するには、2 点相関 (two point correlation) をとるのが一般的であり、θ 離れた 2 点 γ, γ' 同士の相関 $C(\theta)$ を全天でとる。ただし、$\gamma \cdot \gamma' = \cos\theta$ である。ここで、理論が予言できるのは統計量のみである。つまり無限のサンプルにたいするアンサンブル平均のみを予言できるのである。

$$C_{th}(\theta) \equiv \langle \Theta(\boldsymbol{\gamma})\Theta(\boldsymbol{\gamma'}) \rangle_{ens} = \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} \left\langle a_{\ell'}^{m'*} a_\ell^m \right\rangle Y_{\ell'}^{m'*}(\boldsymbol{\gamma'}) Y_\ell^m(\boldsymbol{\gamma}). \tag{3.133}$$

ここで、$\langle\ \rangle_{ens}$ はアンサンブル平均である。今、ゆらぎの統計的な性質はランダムガウシアンであるとする。すなわち、各 ℓ, m に対して a_ℓ^m は全て独立かつランダムな変数だとする。ガウシアン分布をする確率変数は、平均値と分散のみでその統計的性質が全て決定されるのが特徴である。温度ゆらぎは定義より平均値がゼロなので、その分散を C_ℓ として

$$\langle a_\ell^m \rangle = 0, \tag{3.134}$$

$$\left\langle a_{\ell'}^{m'*} a_\ell^m \right\rangle = C_\ell \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \tag{3.135}$$

である。この C_ℓ をパワースペクトルと呼んでいるのであり、つまるところ a_ℓ^m の分散である。また、C_ℓ が ℓ にのみよっていて m に依らないのは宇宙の等方性からである。統計的性質を決定したので、(3.133) をパワースペクトルで書き下せば

$$C_{th}(\theta) = \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} C_\ell \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} Y_{\ell'}^{m'*}(\boldsymbol{\gamma'}) Y_\ell^m(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell+1) C_\ell P_\ell(\cos\theta). \tag{3.136}$$

最後の等号は (I.34) より導ける。一方、我々が観測できるのは何であろうか。もちろん宇宙は一つしかないのであり、無限のサンプルをとれるなどということはあるはずがない。ここで、a_ℓ^m はランダムガウシアン変数であり、さらに等方性から分散は m に依らない、という仮定を利用することができる。例えば C_2 を観測から求めるとすれば、データから得られるサンプルは a_2^0, $a_2^{\pm 1}$, $a_2^{\pm 2}$ の 5 個である。これらは全てランダムかつ同等なサンプルでなければならないというのが、ランダムネスと等方性の仮定の主張するところであり、従って

$$C_2^{obs} = \frac{1}{5} \sum_{m=-2}^{2} |a_2^m|^2 . \tag{3.137}$$

ここで問題が生じる。理論は C_2 に対しても無限個のサンプルを用意できるのに対し、観測は 5 個しかない。この両者を同等に比べるというのは全く無理な話である。この「宇宙はひとつ」という困難は、「コスミック – ヴァリアンス (cosmic variance)」と呼ばれている。ガウシアン統計に従う確率変数には「サンプリング – ヴァリアンス」という統計量があり、有限個のサンプルから得られた分散 σ^2 が必ず伴っている分散は、

$$\left(\Delta\sigma^2\right)^2 = \frac{2}{N}\left(\sigma^2\right)^2 \tag{3.138}$$

で与えられる。N はサンプル数である。早い話が「分散の持つ分散」であり、今は一つの ℓ に対して $N_\ell = 2\ell + 1$ 個のサンプルがあるので、そのサンプリング – ヴァリアンスは

$$(\Delta C_\ell)^2 = \frac{2}{2\ell+1} C_\ell^2. \tag{3.139}$$

つまり、ノイズがゼロの検出器で全天をくまなく観測したところで C_ℓ は ℓ が小さくなるにつれてどんどん決まらなくなり、エラーは $\Delta C_\ell \propto \ell^{-1/2}$ に従って増加してゆくのである。

また、C_ℓ と $\Theta_\ell^{(m)}$ の対応は

$$\begin{aligned} C_{th}(\theta) &= \sum_\ell \sum_{m=-2}^{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\left\langle \left|\Theta_\ell^{(m)}(k)\right|^2 \right\rangle}{2\ell+1} P_\ell(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_\ell \sum_{m=-2}^{2} \int \frac{dk}{k} k^3 \frac{\left\langle \left|\Theta_\ell^{(m)}(k)\right|^2 \right\rangle}{2\ell+1} P_\ell(\cos\theta) \end{aligned} \tag{3.140}$$

と (3.136) を比較して

$$\frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-2}^{2} \int \frac{dk}{k} k^3 \frac{\left\langle \left|\Theta_\ell^{(m)}(k)\right|^2 \right\rangle}{2\ell+1}. \tag{3.141}$$

よって、温度パターンの展開係数は $\propto \Theta_\ell^{(m)}/\sqrt{2\ell+1}$ に対応する。これが (3.122) のファクター $1/\sqrt{3}$ の出どころである。ただし、この定義はモード関数の定義によって異なるので注意する。また、(3.141) の m はスカラー/ベクター/テンサーを表現しているが、(3.132) は分布パターンの調和関数展開によるモード m であり、意味が違う。まぎらわしいが、気をつける。

5.2 free streaming solutions: from qualitative point-of-view

LSS における図 3.2 のようなフーリエスペースのパワースペクトルは、我々が観測するパワースペクトル C_ℓ とどのような関係にあるのだろうか。視線方向の距離 d にあるスケール

k^{-1} のものを、我々は角 $\theta = k^{-1}/d$ で見込む。角波数である多重極モーメント ℓ は $\ell \approx \theta^{-1}$ であるから、k を持つモードは $\ell \approx kd$ に射影される事になる。それならば、

$$\frac{\Theta_\ell(k,\tau_0)}{2\ell+1} = \int_0^{\tau_0} d\tau \left(\mathcal{G}_{SW} + \mathcal{G}_C^\Theta\right)(\tau)\delta(\ell - kr_\theta(\tau)) \tag{3.142}$$

として k に渡って積分してしまえば、パワースペクトルが求まるのだろうか？しかし既に述べたように、ドップラーシフトのような方向を持つ成分のプロジェクションはこのように単純ではない。ただ、LSS でのモノポール成分 $\Theta_0^{(0)}$ のプロジェクションに関しては小スケール ($\ell > 100$ のオーダー) であれば (3.142) でも定性的なスペクトルを十分再現可能である。事実これから見るように、$k \to \ell$ の厳密な輸送関数も $\delta(\ell - kr_\theta(\tau))$ とほぼ同じふるまいを示す。

ボルツマン方程式 (2.2) をフーリエモード展開[‖] すれば

$$\dot\Theta(k,\mu,\tau) + (ik\mu + \dot\tau_c)\,\Theta(k,\tau) = \left(\mathcal{G}_{SW} + \widehat{\mathcal{G}}_C^\Theta\right)(k,\mu,\tau). \tag{3.143}$$

$\mu \equiv \hat{k}\cdot\gamma$ である[**] 。左辺 2 項目の ( ) にある $\dot\tau_c$ の項は、$\mathcal{G}_C^\Theta$ の中に含まれていた項である[††] 。従って、$\widehat{\mathcal{G}}_C^\Theta \equiv \mathcal{G}_C^\Theta + \dot\tau_c\Theta$. 特解は $\tilde\Theta = \exp\left(-ik\mu\tau - \tau_c(\tau)\right)$ であるから、一般解はソースに渡る積分:

$$\Theta(k,\mu,\tau_0) = \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-(\tau_c(\tau_0)-\tau_c(\tau))}\left(\mathcal{G}_{SW} + \widehat{\mathcal{G}}_C^\Theta\right)(k,\mu,\tau)\exp\left(-ik\mu(\tau_0-\tau)\right), \tag{3.144}$$

$$\tau_c(\tau) \equiv \int_0^\tau d\tau'\tau_c(\tau'), \tag{3.145}$$

$$\mathcal{G}_{SW}^{(0)} = -\dot\Phi_H - ik\mu\Phi_A, \tag{3.146}$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_C^{\Theta(0)} = \dot\tau_c\left[\Theta_0^{(0)} - i\mu v_b^{(0)} - \left(\frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}\right)P_2^{(0)}\right]. \tag{3.147}$$

ただし、*Longitudinal gauge* を用いている。ここで、フーリエモード関数 $e^{ik\cdot x}$ を除いて (2.22):

$${}_0G_\ell^m = (-i)^\ell\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{3.148}$$

より

$${}_0G_0^0 = 1, \qquad {}_0G_1^0 = -i\mu, \qquad {}_0G_2^0 = -\frac{3}{2}\mu^2 + \frac{1}{2} \tag{3.149}$$

[‖] 今は平坦な時空を考えている。曲率を持つ場合への拡張は Appendix H を参照。

[**] $\hat{k}$ は波数の単位ベクター、γ は方向余弦 γ^i の略記である。

[††] かなりまぎらわしいが、時間の τ と光学的深さ τ_c を混同しないように。

を用いた。ソース積分は、見通しよく以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned}\Theta(k,\mu,\tau_0) &= \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \\ &\quad \times \left\{ \left(-\dot{\Phi}_H - k\Phi_A \frac{d}{d(k\tau)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\tau}_c \left[\Theta_0^{(0)} - v_b^{(0)} \frac{d}{d(k\tau)} + P_2^{(0)} \frac{1}{2} \left(3\frac{d^2}{d(k\tau)^2} + 1 \right) \right] \right\} \qquad (3.150) \\ &\quad \times \exp\left(-ik\mu(\tau_0-\tau)\right), \qquad (3.151) \\ \tau_c(\tau_0,\tau) &\equiv \int_\tau^{\tau_0} d\tau' \tau_c(\tau'). \qquad (3.152)\end{aligned}$$

ここで、レイリーの公式 (I.73):

$$\exp(-ik\mu r) = \sum_\ell (2\ell+1)(-i)^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\mu) \qquad (3.153)$$

を用いて球ベッセル関数 j_ℓ とその微分に書き直せば、

$$\begin{aligned}\Theta(k,\mu,\tau_0) &= \sum_\ell (2\ell+1)(-i)^\ell P_\ell(\mu) \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \\ &\quad \times \left[\left(-\dot{\Phi}_H j_\ell^{(00)} + k\Phi_A j_\ell^{(10)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\tau}_c \left(\Theta_0^{(0)} j_\ell^{(00)} + v_b^{(0)} j_\ell^{(10)} + P_2^{(0)} j_\ell^{(20)} \right) \right], \qquad (3.154)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_\ell^{(00)} &\equiv j_\ell(x), \qquad (3.155) \\ j_\ell^{(10)} &\equiv j_\ell'(x), \qquad (3.156) \\ j_\ell^{(20)} &\equiv \frac{1}{2}\left[3j_\ell''(x) + j_\ell(x) \right]. \qquad (3.157)\end{aligned}$$

$x \equiv k(\tau_0 - \tau)$ で、ダッシュは x 微分である。また、右辺に合わせて左辺を

$$\Theta(k,\mu,\tau_0) = \sum_\ell (-i)^\ell \Theta_\ell^{(0)}(k,\tau_0) P_\ell(\mu) \qquad (3.158)$$

と展開し[‡‡]、さらに右辺の $k\Phi_A j_\ell^{(10)}$ の項を部分積分によって

$$\begin{aligned}\frac{\Theta_\ell^{(0)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} + \Phi_A(k,\tau_0)\delta_{\ell 0} &= \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \left\{ \left(\dot{\Phi}_A - \dot{\Phi}_H \right) j_\ell^{(00)} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\tau}_c \left[\left(\Theta_0^{(0)} + \Phi_A \right) j_\ell^{(00)} + v_b^{(0)} j_\ell^{(10)} + P_2^{(0)} j_\ell^{(20)} \right] \right\} \qquad (3.159)\end{aligned}$$

[‡‡] 今は (3.142) に対応する表式を示そうとしているだけである。よって、最も単純に展開が可能な温度ゆらぎのスカラーモードを取り上げた。

ただし、$j_\ell^{(10)} = j'_\ell = -\dot{j}_\ell/k$, $(e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)})^\cdot = \dot{\tau}_c e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)}$。左辺第 2 項は部分積分の境界項であり、$j_\ell(0) = \delta_{\ell 0}$, 及び $\exp(-\tau_c(\tau_0, 0)) = 0$ を用いた。境界項は観測可能ではない $\ell = 0$ にしか寄与しないため、この部分積分は一般的な意味を持つと考えて良い * 。今は平坦な時空を考えているため $r_\theta(\tau) = \tau_0 - \tau$ で、どうやら $\delta(\ell - kr_\theta(\tau))$ に対応しているのは球ベッセル関数及びその微分のようである† 。実は (3.159) により CMB 異方性に寄与する物理をほぼ理解することができる。詳細は次節にゆずることとし、ここでは問題としているアコースティック振動のプロジェクションにしぼって議論する。すなわち、

$$\frac{\Theta_\ell^{(0)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} = \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \dot{\tau}_c \left[\left(\Theta_0^{(0)} + \Phi_A\right) + v_b^{(0)}\right] \delta(\ell - kr_\theta(\tau)), \tag{3.160}$$

$$\frac{\Theta_\ell^{(0)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} = \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \dot{\tau}_c \left[\left(\Theta_0^{(0)} + \Phi_A\right) j_\ell^{(00)} + v_b^{(0)} j_\ell^{(10)}\right] \tag{3.161}$$

の両者は、どこまで正確に対応しているのかという問題である。この問いに答えるためにはとにかく $j_\ell^{(00)}$, $j_\ell^{(10)}$ のプロットを作って見れば良い。なお $j_\ell^{(10)} = j'_\ell(x)$ を求めるには、漸化式 (I.72) を用いる。図 3.3 は、$\ell|j_\ell^{(00)}(x)|$, $\ell|j_\ell^{(10)}(x)|$ をプロットしたものである。$\Theta_0^{(0)} + \Phi_A$ は $j_\ell^{(00)}$ によってプロジェクトされるが、予想通り $\ell \approx kr_\theta(\tau)$ の情報をデルタ関数的にピックアップする関数となっている‡ 。一方で $\Theta_1^{(0)}$ をプロジェクトする $j_\ell^{(10)}$ はピークを持たず、全体的にウエイトを落としている。これはまさにドップラーシフトの方向依存性 $\mu = \cos\theta$ に起因するキャンセルアウトの効果であり、$\Theta_1^{(0)}$ はその振幅を落され、結果的なスペクトルはほぼ $\Theta_0^{(0)} + \Phi_A$ によって決定されることになる。

図 3.4 は、図 3.2 を ℓ に射影したものに相当する。ドップラー成分によって埋められていた 2nd ピークが現れているのが分かる。また、アコースティック振動のピークや拡散減衰などは全て忠実にプロジェクトされている。従って、図 3.4 の $\Omega_b h^2$ 依存性は前節までの簡単化したモデルで完全に説明できる。すなわち $\Omega_b h^2$ を増やす事によって振動のゼロ点がシフトし、圧縮フェイズである 1st, 3rd ピークが高くなってゆくのである。

一方、$\Omega_0 h^2$ 依存性を見たのが 図 3.5 である。$\Omega_0 h^2$ を減らすと RD – MD のつりあいの時期 $z_{eq} \propto \Omega_0 h^2$ が遅れるために RD である期間が長くなり、アコースティック振動期にポテンシャルの時間変化 $\dot{\Phi}_H$ が顕著となる。ポテンシャルの時間変化はホライズン付近でボ

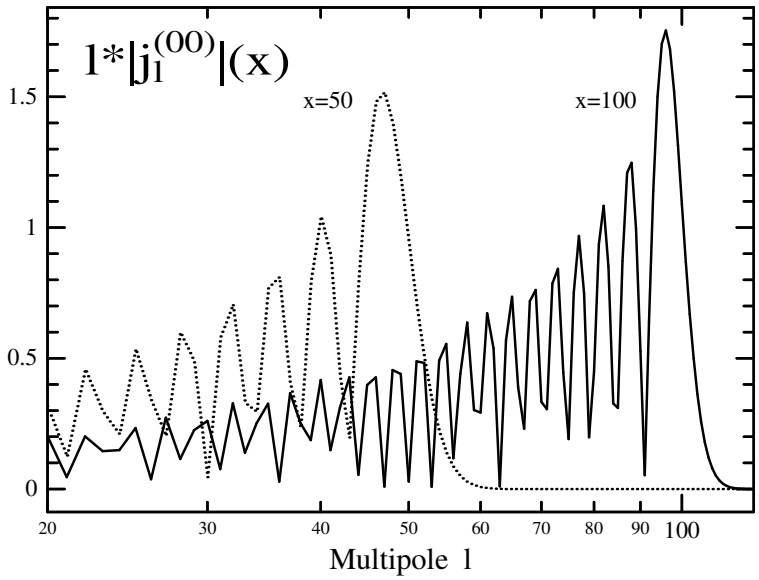
---

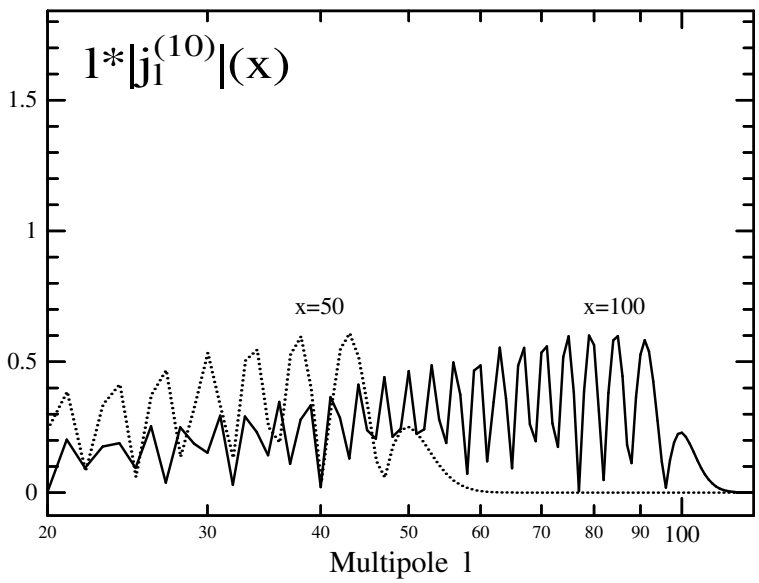
* Hu & White (1997) では暗に境界項を無視しているが、これは本来「観測可能な温度ゆらぎとは何か」というナイーヴな問題とからんでおり、注意を要する。

† (3.142) に $e^{-\tau_c}$ の項がないのは、ボルツマン方程式を知らなくてもある程度の形は予想できるという意味で式を書き下したからである。

‡ もちろん厳密にデルタ関数ではなく、$\ell < kr_\theta(\tau)$ にパワーは分散されてしまう。

図 3.3: $k \to \ell$ のプロジェクション関数。$\log \ell$ あたりのパワーでプロットしてある。上のパネルは $\Theta_0^{(0)} + \Phi_A$ をプロジェクトする $j_\ell^{(00)}$、下は $\Theta_1^{(0)}$ をプロジェクトする $j_\ell^{(10)}$ である。$x \equiv k(\tau_0 - \tau)$。$j_\ell^{(00)}(x)$ は $\ell = x$ で鋭いピークを持ち、$\ell \approx k(\tau_0 - \tau)$ の情報を敏感にピックアップするため、デルタ関数的なプロジェクションと定性的に理解できる。一方、$j_\ell^{(10)}$ は全般的に振幅が落とされ、特徴的に射影するスケールも存在しない。これは、ドップラーシフトのような方向を持つ成分特有のキャンセル効果である。





ルツマン方程式: $\dot{\Theta}_0^{(0)} \approx -\dot{\Phi}_H$ を通じて温度ゆらぎをブーストするため、特にファーストピークを増大させる。

5.3 free streaming solutions: complete set & implications

スカラー/ベクター/テンサーモード全てについて、積分形でのボルツマン方程式の解をゲージを固定しない一般形で書き下す。また、部分積分も用いない。

$$\frac{\Theta_\ell^{(0)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} = \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \left\{ -\dot{H}_L^{(0)} j_\ell^{(00)} + \left(kA + \dot{B}^{(0)}\right) j_\ell^{(10)} - \frac{2}{3}\dot{H}_T^{(0)} j_\ell^{(20)} \right.$$
$$\left. + \dot{\tau}_c \left(\Theta_0^{(0)} j_\ell^{(00)} + v_b^{(0)} j_\ell^{(10)} + P_2^{(0)} j_\ell^{(20)}\right) \right\}, \tag{3.162}$$

$$\frac{\Theta_\ell^{(1)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} = \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \left[\dot{B}^{(1)} j_\ell^{(11)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{H}_T^{(1)} j_\ell^{(21)} \right. \tag{3.163}$$
$$\left. + \dot{\tau}_c \left(v_b^{(1)} j_\ell^{(11)} + P_2^{(1)} j_\ell^{(21)}\right) \right], \tag{3.164}$$

$$\frac{\Theta_\ell^{(2)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} = \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \left[-\dot{H}_T^{(2)} j_\ell^{(22)} \right. \tag{3.165}$$
$$\left. + \dot{\tau}_c P_2^{(1)} j_\ell^{(22)} \right]. \tag{3.166}$$

ベクター/テンサーの $j_\ell^{(\ell' m)}$ の具体形は (Hu & White 1997b)、

$$j_\ell^{(11)}(x) = \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \frac{j_\ell(x)}{x}, \tag{3.167}$$

$$j_\ell^{(21)}(x) = \sqrt{\frac{3\ell(\ell+1)}{2}} \left(\frac{j_\ell(x)}{x}\right)', \tag{3.168}$$

$$j_\ell^{(22)}(x) = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \frac{j_\ell(x)}{x^2}. \tag{3.169}$$

$j_\ell^{(11)}(x)$, $j_\ell^{(22)}(x)$ は $\ell = x$ にピークを持ち、$j_\ell^{(21)}(x)$ はピークを持たず全体のウエイトを落とす関数である。これらの積分解は、ソースの物理的意味によって以下のように分けられる。

5.3.1 scattering origins

$$\int_0^{\tau_0} d\tau \quad e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \dot{\tau}_c \quad \left[\left(\Theta_0^{(0)} j_\ell^{(00)} + v_b^{(0)} j_\ell^{(10)} + P_2^{(0)} j_\ell^{(20)}\right) \right. \tag{3.170}$$

図 3.4: CMB 異方性の角パワースペクトル。縦軸は $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$ であり、これは $\log\ell$ あたりのパワーをあらわす。k 空間のスペクトルの特徴は忠実にプロジェクトされているが、ドップラー成分はキャンセルされて消えており、その分 2nd ピークがあらわれている。$\Omega_b h^2$ を増やすと、$R \propto \Omega_b h^2$ が増えるためアコースティック振動のゼロ点が上にシフトし、圧縮フェイズである 1st, 3rd ピークが相対的に上がる。

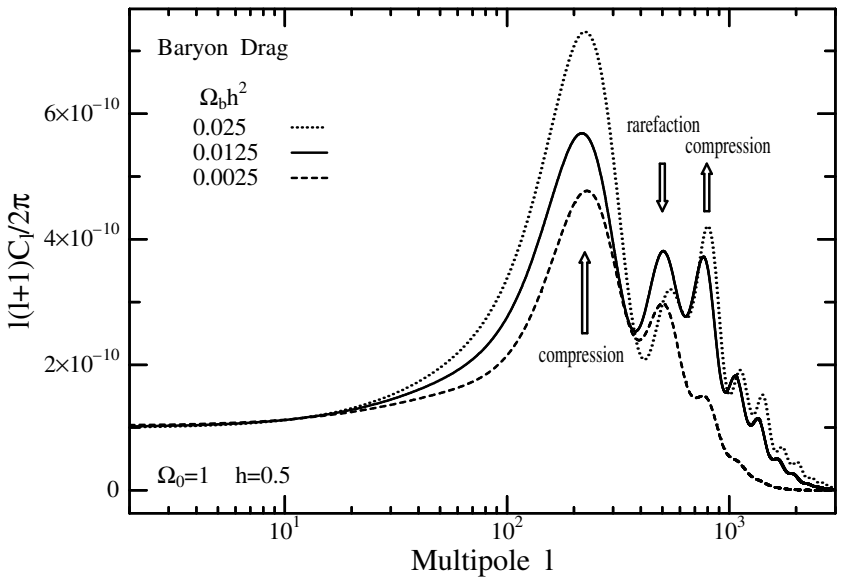
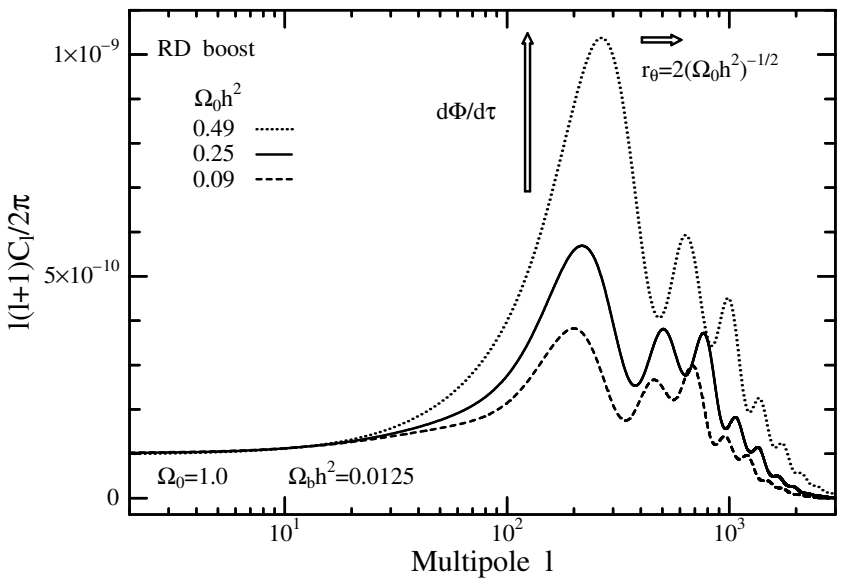


図 3.5: 放射優勢期 (RD) のポテンシャルの時間変動 $\dot{\Phi}_H$ による、ピークのブースト。$\Omega_0 h^2$ を減らすと RD – MD のつりあいの時期 $z_{eq} \propto \Omega_0 h^2$ が遅れ、アコースティック振動期が RD となってポテンシャルの時間変化 $\dot{\Phi}_H$ が顕著となる。ポテンシャルの時間変化はホライズン付近でボルツマン方程式: $\dot{\Theta}_0^{(0)} \approx -\dot{\Phi}_H$ を通じて温度ゆらぎをブーストするため、ファーストピークを増大させる。



$$+\left(v_b^{(1)} j_\ell^{(11)} + P_2^{(1)} j_\ell^{(21)}\right) \tag{3.171}$$

$$+ P_2^{(1)} j_\ell^{(22)}\Big] \tag{3.172}$$

$e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)}\dot{\tau}_c$ は光子が LSS で最終散乱を受ける確率であり、「ヴィジビリティ関数 (visibility function)」$\mathcal{V}_c \equiv e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)}\dot{\tau}_c$ と呼ばれている (Bond 1996)。通常電子密度は宇宙膨張と共に $n_e \propto \bar{a}^{-3}$ で薄くなってゆくため $\dot{\tau}_c = \sigma_T x_e n_e a \propto \bar{a}^{-2}$ であるが、再結合が始まると電子はことごとく陽子にトラップされて中性化し、電離度 x_e は $1 \to O(10^{-4})$ と急激に減少する。従って $\mathcal{V}_c(\tau)$ は時間 τ と共に急速に小さくなる。一方、ファクター $e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)}$ によって $\mathcal{V}_c(\tau)$ は $-\tau$ 方向にも指数的に小さくなるため、$\mathcal{V}_c(\tau)$ はある時間 τ_{dec} を中心として鋭いピークを持つ。よって τ_{dec} が、最終散乱が最も起こった時期という意味で最終散乱面 (LSS) と定義されるのである。

- **fuzziness damping: thickness of LSS**

  ピークのため、$\mathcal{V}_c$ のかかっている項は基本的に LSS ($\tau = \tau_{dec}$) でのみ寄与を持つ項である。散乱による各項の持つ物理的意味は既に述べたので、ここではヴィジビリティ $\mathcal{V}_c$ について考える。$\mathcal{V}_c$ の詳細は再結合 (recombination) プロセスの詳細に依っているため単純ではないが、取扱いの容易なフィッティング公式が提唱されている (Hu & Sugiyama 1996; Bond 1996) 。第ゼロ近似は脱結合が瞬間的に起こるとするもので、ヴィジビリティはデルタ関数: $\mathcal{V}_c = \delta(\tau - \tau_{dec})$ であろう。1 次近似では、ヴィジビリティを典型的な脱結合の時期を中心としたガウシアンで近似するもので、ガウシアンの幅が LSS の厚みである。

  $$\mathcal{V}_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_{\mathcal{V}_c,dec}^2}} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_{dec})^2}{2R_{\mathcal{V}_c,dec}^2}\right). \tag{3.173}$$

  $R_{\mathcal{V}_c,dec}$ は、典型的には脱結合時のホライズンの $3-5\%$ 程度である。これより、LSS が厚み $R_{\mathcal{V}_c,dec}$ を持つと厚み以下のスケールの C_ℓ はスムージングされて減衰してしまうことが分かる。

- **reionization: damping & Ostriker-Vishniac effect**

  次に、脱結合後フリーストリームで現在まで光子がやってくる途中、宇宙が再イオン化するような場合を考える。この時新しい LSS ができ、再び $\mathcal{V}_c$ が存在するようになるが、今度は再結合プロセスがないため $\dot{\tau}$ は だらだらと $\propto \bar{a}^{-3}$ で落ちてゆくだけである。すなわち LSS の幅というのは再イオン化が起こってから現在までということ

になり、あまり早い段階で再イオン化が起こってしまうと LSS の幅が厚くなり、C_ℓ は幅広い ℓ で減衰させられ、場合によってはドップラーピークまで消されることになる (図 3.6)。

しかし、再イオン化はゆらぎをダンプさせるだけではなく、新たに作ることもある。再イオン化した宇宙ではもはやタイトカップリングは成立しないためアコースティック振動は起こらないが、v_b によるドップラーシフトは存在している。LSS でのドップラーシフトはプロジェクションによって Θ_0 に埋もれてしまったが、今回はドップラーシフトしか存在しないために、キャンセルしない成分が残る可能性がある。このような再イオン化による宇宙でのドップラーシフト起源のゆらぎ生成メカニズムは、オストライカー – ヴィスニアック効果 (Ostriker-Vishniac effect; OV) と呼ばれ (Ostriker & Vishniac 1986; Vishniac 1987) 、再イオン化のモデルによっては拡散減衰のスケールよりも小スケールで観測可能な寄与となる (図 3.7, Jaffe & Kamionkowski 1998)。

- **Sunyaev-Zel'dovich effect**

  これまでは、光子と電子の散乱を全て弾性散乱であるトムソン散乱の極限で扱ってきた。しかし、ある条件のもとでは電子から光子へエネルギーが輸送される「逆コンプトン散乱 (inverse Compton scattering)」が起こり、CMB の黒体放射スペクトルが歪められる。その条件とは、電子の温度 T_e が CMB の温度 T を上回ることである (chapter 5)。LSS では光子と電子が熱平衡状態であるため $T_e \approx T$ が成立しており、エネルギー輸送は起こらない。しかし、銀河団中には高温電子ガス $T_e \approx 10^8$ K が存在しており、CMB が銀河団を通過する際に黒体のスペクトルが変形を受け、観測可能な寄与を及ぼす。これはスニヤエフ – ゼルドヴィッチ (SZ) 効果と呼ばれている (Zel'dovich & Sunyaev 1969; Sunyaev & Zel'dovich 1972)。SZ 効果により、CMB の「温度」は、波長に依存した変化を受けることになる。SZ 効果によって変形されたスペクトルはもはや黒体放射ではないため、全波長域に渡って単一の温度で記述することはできないのである。波長依存性は、$\nu < 217$ GHz で温度が減少し、逆では温度が上昇するという特徴的なものである。$\nu = 217$ GHz では SZ 効果はゼロである (図 5.1)。

  全天に存在する銀河団は、全て SZ 効果のソースだと思って良い。個々の銀河団の温度や電子密度の違いによって SZ 効果の大きさは異なるため、これはそのまま CMB の

図 3.6: 再イオン化による、パワースペクトルのダンピング。z_{ion} は再イオン化が始まる赤方偏移であり、再イオン化は瞬間的に完全電離 $(x_e = 1)$ になるとした。再イオン化なし (no) と $z_{ion} = 5$ とはスペクトルが重なっており、図では識別できない。再イオン化が早期に起こるほど新しい LSS の厚みが厚いため、温度ゆらぎは広範囲にわたって著しいダンピングを受ける。

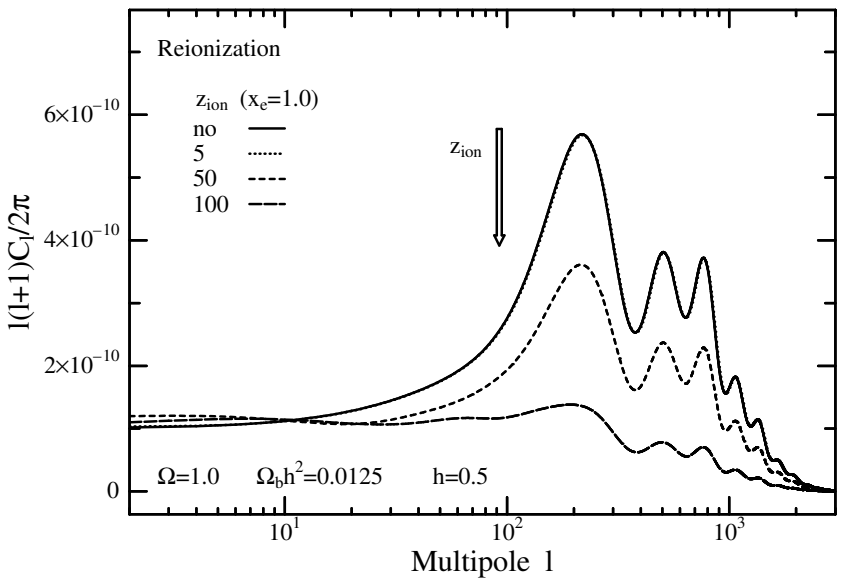
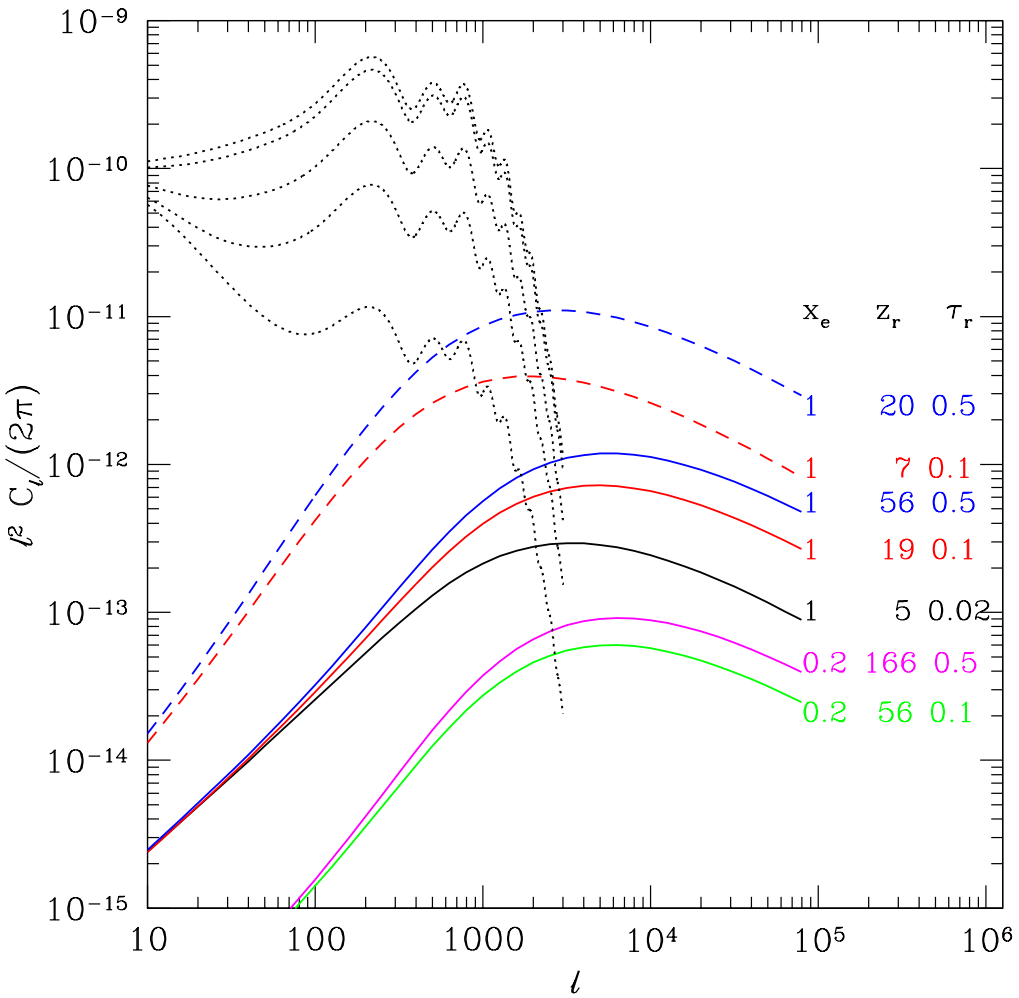


図 3.7: Jaffe & Kamionkowski (1998) の計算による、オストライカー – ヴィスニアック (Ostriker-Vishniac; OV) 効果。x_e, z_r はそれぞれ再イオン化の電離度, 赤方偏移であり、τ_r は脱結合時までの光学的厚さである。宇宙論パラメターは $\Omega_0 = 1.0, h = 0.5, \Omega_b h^2 = 0.0125$ で、実線は COBE の規格化 (COBE normalization; Bunn & White 1997) によるモデル、破線は クラスターの規格化 (cluster normalization; Viana & Liddle 1996) による。プライマリ CMB のスペクトルは上から順に $\tau_r = 0, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ である。プライマリ CMB のダンピングはヴィジビリティ $\mathcal{V}_c$ が τ_r の関数であるため τ_r のみに依存しているが、OV 効果は同じ τ_r であっても x_e, z_r によってスペクトルが異なる。



ゆらぎとして寄与し、SZ ゆらぎの大きさは銀河団スケールの密度ゆらぎの大きさを直接反映していることになる (図 5.2; e.g., Cole & Kaiser 1988; Makino & Suto 1993; Markevitch et al. 1991)。また、SZ ゆらぎは波長依存性を持つため、多波長観測によってプライマリ CMB や RS, OV 効果といった他のソースと分離可能であることが大きな特徴である (Hobson et al. 1998)。

5.3.2 gravitational origins

- **static Sachs-Wolfe effect**

$$\int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} k A j_\ell^{(10)} \tag{3.174}$$

スカラーモードの加速度ポテンシャル A によってのみ生じる、静的なポテンシャルによる SW 効果。ドップラーシフトと同様 $j_\ell^{(10)}$ によるプロジェクションでキャンセルされるように見えるが、寄与しているのはポテンシャルの勾配である (すなわち k がかかっている) ため、ポテンシャルそのものの寄与を見るために部分積分を行なうことにより

$$-A(\tau_0)\delta_0 + \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \dot{A} j_\ell^{(00)} + \int_0^{\tau_0} d\tau \dot{\tau}_c e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} A j_\ell^{(00)} \tag{3.175}$$

のように分けられる。各項の意味は、

(1) モノポール。全天の温度のかさ上げにのみ寄与する観測不可能な寄与である。

(2) 放射優勢宇宙から物質優勢宇宙への遷移前後しばらくの期間や、曲率/Λ 項が重要になる比較的現在に近いスケールではポテンシャルの時間変化がある。従って、静的な SW と対比するため動的ザクス – ヴォルフェ効果 (integrated Sachs-Wolfe effect; ISW) と呼ばれており (Hu, Sugiyama & Silk 1997) [§]、特に前者を早期 ISW (early ISW)、後者を晩期 ISW (late ISW) と区別して呼ばれている。ただし、ISW と呼ぶ時期は全て脱結合後のストリーム期であり、アコースティック振動のところで触れたポテンシャルの減衰による効果は ISW とは呼ばれない。早期 ISW はスペクトルの上ではサウンドホライズンよりもやや大きいスケール (小さい ℓ) に寄与し、主として $\Omega_0 h^2$ に依っている。これは、放射 –

[§] ただし、Sachs & Wolfe (1967) には重力赤方偏移に起因するあらゆる効果が自動的に考慮されており、広い意味ではこれも SW 効果と呼んでさしつかえない。

物質のつりあいの時期が $\Omega_0 h^2$ で決まっていることによる。晩期 ISW は現在近くで効き始める。曲率や Λ 項の効き始めるスケールを特徴的スケールとして持ち、非常に大角度 ($\ell < 10$) に寄与する (図 3.11, 3.8)。

一方、前述のような宇宙論的起源とは別に、構造形成時にもポテンシャルの時間変動が存在する。CMB への効果として両者は数学的に両者は同等だが、その原因は全く異なる。このような非線形プロセスに起因する効果は リース – シアマ効果 (Rees-Sciama effect; RS) と呼ばれる (Rees & Sciama 1968; Tuluie & Laguna 1995; Seljak 1996; Tuluie, Laguna & Anninos 1996)。Seljak (1996) の計算によれば、$\ell \approx 10^4$ まで RS はプライマリよりも圧倒的に小さい (図 3.9)。

(3) LSS にローカルなポテンシャルからのはい上がり。静的なポテンシャルにトラップされていた光子は、脱結合時にポテンシャルを「はい上がって」登ってくるため、再び A だけ赤方偏移を受ける (Hu, Sugiyama & Silk 1997)。

- **integrated Sachs-Wolfe effect**

$$\int_0^{\tau_0} d\tau \quad e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)} \quad \left\{ \left[-\dot{H}_L^{(0)} j_\ell^{(00)} + \dot{B}^{(0)} j_\ell^{(10)} - \frac{2}{3} \dot{H}_T^{(0)} j_\ell^{(20)} \right] \right. \tag{3.176}$$

$$+ \left[\dot{B}^{(1)} j_\ell^{(11)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{H}_T^{(1)} j_\ell^{(21)} \right] \tag{3.177}$$

$$\left. + - \dot{H}_T^{(2)} j_\ell^{(22)} \right\} \tag{3.178}$$

(1) スカラーモードの ISW は、(a) で説明した通りである。ただしこれら全てが実際に寄与するのではなく、ゲージを固定することで真の自由度を決定せねばならない。例えば *Longitudinal gauge* であれば $H_L = \Phi_H$ のみが残り、*Synchronous gauge* であれば $H_L = h/6$, $H_T^{(0)} = -h/2 - 3\eta$ が残る (h, η は Ma & Berchinger (1995) による定義)。ゆらぎの発展方程式を解く際にはこのようなゲージ自由度が問題になることは既に述べた通りだが、ゲージをうまくとってやることで数値計算の時間を効率良く減らせることもある。Zaldarriaga (1998) によれば、*Synchronous gauge* は *Longitudinal gauge* に比べて 20% 以上計算効率が良い。

(2) ニュートン理論では初期にベクターモードが存在しなければそれ以降も存在することはないが、ポストニュートンのオーダーまで追えば初期にゼロであってもベクターモードが成長することが示されている (Takada & Futamase 1998)。それにともなう RS 効果は、存在してもスカラーモード (図 3.9) よりさらに小さく、無視しうる (Seljak 1996)。

図 3.8: $\Omega_0 + \lambda_0 = 1$ で平坦な宇宙モデルにおける、Λ 項の晩期 ISW。$\ell < 10$ において、ポテンシャルの時間変化 $\dot{\Phi}_H$, $\dot{\Phi}_A$ によって ゆらぎが生成される。Ω_0 が小さくなるにつれてドップラーピークの高さが上がっているが、これは Ω_0 が小さくなると $\mathrm{RD} - \mathrm{MD}$ のつりあいの時期が遅れ、アコースティック振動期のポテンシャルの時間変化が顕著になることによる、ピークのブーストである。同じく平坦な $\Omega_0 = 1$ モデルからのわずかなピークのシフトは、幾何学的な効果ではなく、宇宙の進化の違いに起因する角径距離 $r_\theta \approx 2(\Omega_0 h^2)^{-1/2}$ の効果である。

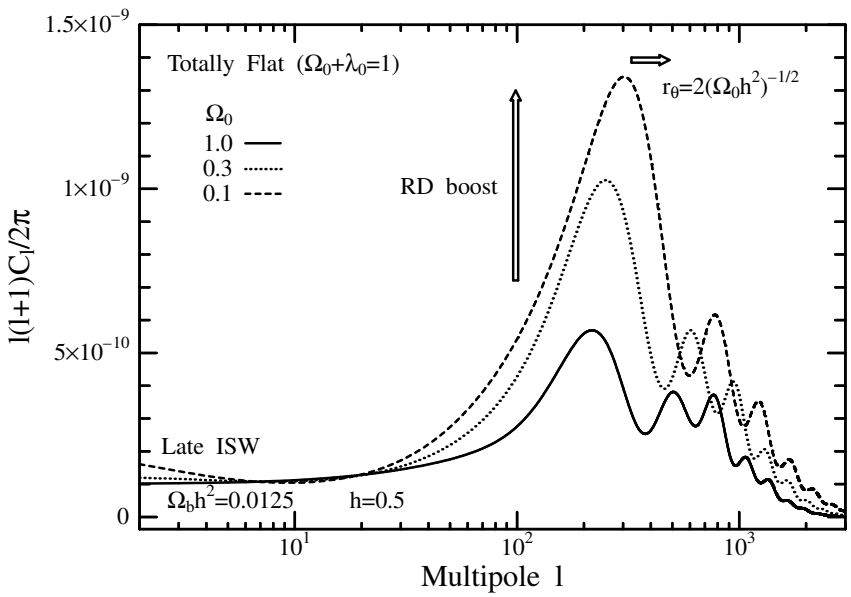
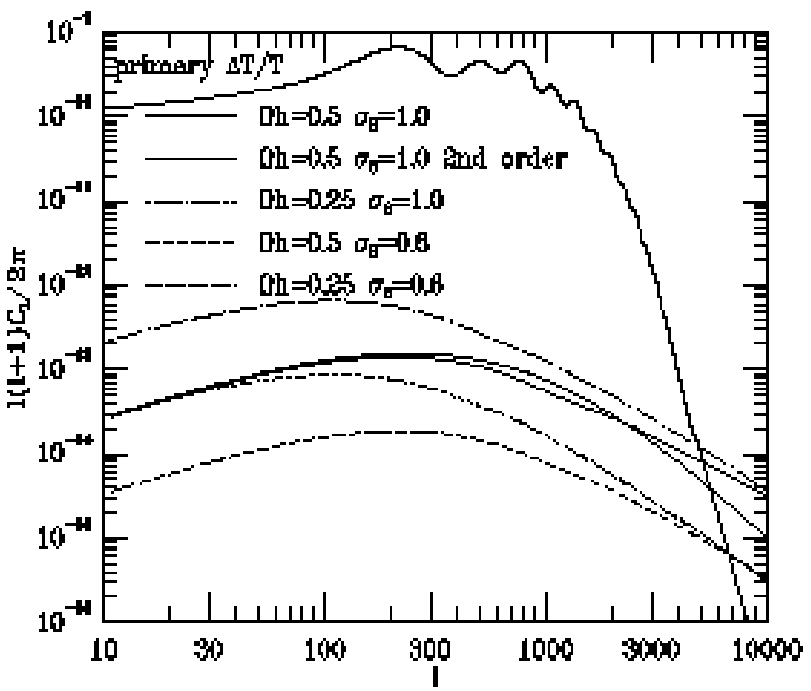


図 3.9: Seljak (1996) の計算による、リース – シアマ (Rees-Sciama; RS) 効果。非線形構造による重力ポテンシャルの時間変化をソースとする。プライマリな CMB は拡散減衰によって小スケールでダンプするが、それでも RS 効果はプライマリに比べて小さい。“2nd order” は 2 次の摂動論による結果であり、その他は全て小スケールのゆらぎを N 体シミュレーションを用いて計算している。



(3) テンサーモードの ISW は重力波による寄与である。インフレーション時にはスカラーモードである密度ゆらぎばかりでなくテンサーモードの重力波も生成され、ISW として CMB のゆらぎに寄与する (Abbott & Wise 1984; White 1992; Komatsu & Futamase 1998, 1999) スカラーモードとの相対的な寄与の比であるテンサー/スカラー比 r はインフレーションモデルによって異なるが、だいたい $r \lesssim O(10^{-1})$ (chapter 6) である。最小結合理論のカオティックインフレーションモデル (Linde 1983) は $r \sim 0.2$ を予言する (chapter 6) ためスカラーモードと比べても遜色ない寄与を持ち、無視することはできない。逆に、テンサーモードの寄与を偏光観測によって独立に測定することにより、インフレーション理論の是非を検証することが可能である。

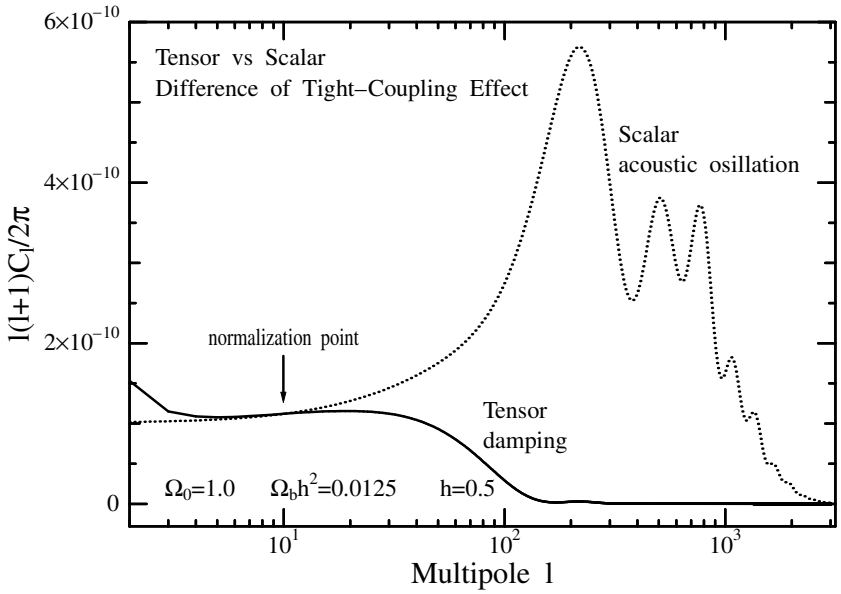
LSS 以前にホライズン内に入ったテンサーモードは、タイトカップル期にバリオンとのカップリングを持たないためアコースティックモードが存在せず、全ての ℓ でダンプしてしまう。しかし現在 $\ell = 2$ で観測されるモードは今まさにホライズンに入ってくるモードであり、ボルツマン方程式 (2.83) のスーパーホライズンモード : $\dot{\Theta}_2^{(2)} \approx -\dot{H}_T^{(2)}$ は、飛び抜けて大きな振幅を持つ (図 3.10)。

CMB の異方性をつくる物理的なメカニズムは、基本的にこれらで説明できる。しかし、もう一つ非常に重要なメカニズムが存在する。それは、プロジェクションへの宇宙の曲率の効果である。

5.4 curvature effect: shifting Doppler-Peaks

アコースティック振動の形を決めるのは主に $\Theta_0^{(0)}$ であり、プロジェクションは $j_\ell\left(k(\tau_0 - \tau)\right)$ であった。すなわち、共動スケール k^{-1} のゆらぎは $\ell \approx k(\tau_0 - \tau)$ にプロジェクトされる。それでは宇宙が平坦ではない場合どうなるのか。平坦でない空間では $e^{ik\cdot x}$ によるフーリエ展開ができないため、プロジェクションは $j_\ell\left(k(\tau_0 - \tau)\right)$ ではなくもっと複雑な関数となるが、曲率が重要ではなく、近似的に平坦だとみなせる小角度スケールであればフーリエ展開が使えるだろう。ところが「小角度スケール」というのは単に「2 次元的に平坦」というだけであって、残る 1 次元である奥行きに関しては何も言っていない。ここで、プロジェクションの意味に再びたちもどる。そもそも始め、プロジェクションを角径距離によって $\delta(\ell - k r_\theta(\tau))$ とあらわした。これは、幾何学的に言ってスケール k^{-1} を持つものを距離 r_θ

図 3.10: テンサーモードとスカラーモードの比較。両者のスペクトルは $\ell = 10$ で合わせてあるが、実際の比はテンサー/スカラー比で決まっている。スカラーモードはタイトカップリング 1 次でアコースティック振動によってドップラーピークを形成するが、テンサーモードはタイトカップル期に全ての ℓ がダンプする。テンサーモードは $\ell = 2$ に大きなパワーを持つが、これは現在まさにホライズンに入ってきたモードであり、スーパーホライズンスケールのボルツマン方程式: $\dot{\Theta}_2^{(2)} \approx -\dot{H}_T^{(2)}$ の寄与である。テンサー/スカラー比が大きければ $\ell < 10$ でスカラーモードと同等の寄与を持つため、テンサーモードを無視することはできない。



におけば角度 $\theta = k^{-1}/r_\theta$ で見込むからである[¶] 。実際、残る 1 次元は $\tau_0 - \tau \to r_\theta(\tau)$ とすることによって近似できる。

小角度近似を使っても良い ℓ を評価する。スケールが曲率半径 $|\kappa|^{-1/2} = H_0^{-1/2}\,|\Omega_0 - 1|^{-1/2}$ よりも十分小さければ良いので、$k \gg |\kappa|^{1/2}$ のスケールのゆらぎを考えれば

$$\begin{aligned} \ell &\approx kr_\theta(z) \gg |\kappa|^{1/2}\,\frac{2}{\Omega_0 H_0} \qquad (z \gg \Omega_0^{-1}) \\ &\gg 2\frac{|1-\Omega_0|^{1/2}}{\Omega_0}. \end{aligned} \tag{3.179}$$

であれば近似を使えることになる。ここで、$z \gg \Omega_0^{-1}$ での漸近式: $r_\theta(z) \approx 2(\Omega_0 H_0)^{-1}$ を用いた。例えば $\Omega_0 = 0.3$ の開いた宇宙を考えた時 $\ell \gg 6$ であり、実はほとんどの ℓ に対して近似が成立することが分かる。

これは非常に重要な結論を与える。ドップラーピークの位置に対応するスケールを k_{peak} としよう。すると、プロジェクトされる ℓ は $\ell_{peak} \approx k_{peak} r_\theta(\tau_{dec})$ である。ここで、

$$r_\theta(\tau) = \frac{1}{|\kappa|^{1/2}} \sinh\left(|\kappa|^{1/2}(\tau_0 - \tau)\right) > \tau_0 - \tau \qquad (\kappa < 0), \tag{3.180}$$

$$= \frac{1}{\kappa^{1/2}} \sin\left(\kappa^{1/2}(\tau_0 - \tau)\right) < \tau_0 - \tau \qquad (\kappa > 0) \tag{3.181}$$

を思いだせば、平坦な宇宙 (ℓ_{flat}) と比べ、開いた宇宙 $(\kappa < 0;\, \ell_{open})$ ではピークは $\ell_{open} > \ell_{flat}$ に、閉じた宇宙 $(\kappa > 0;\, \ell_{close})$ では $\ell_{close} < \ell_{flat}$ にそれぞれプロジェクトされることになる (図 3.11)。また、たとえ平坦な空間であっても Λ 項をいれて平坦な場合、$r_\theta(\lambda_0 = 0) < r_\theta(\lambda_0 \neq 0)$ であるためピークはシフトを受ける。$z \gg \Omega_0^{-1}$ での $r_\theta(z)$ の漸近形は

$$r_\theta(z) \simeq \begin{cases} 2(\Omega_0 H_0)^{-1} & (\lambda_0 = 0) \\ 2(\Omega_0 H_0^2)^{-1/2}\,(1 + \ln \Omega_0^{0.085}) & (\Omega_0 + \lambda_0 = 1) \end{cases} \tag{3.182}$$

であり、平坦なケースに比べ開いた宇宙の方が Ω_0 に対して敏感にピークを位置を変えることが分かる。なお誤解のないように付け足しておけば、Λ 項入りで平坦な空間でももちろんフーリエ変換は可能であり、$j_\ell\,(k(\tau_0 - \tau))$ によるプロジェクションは厳密に成り立っている (つまり、$\ell = k(\tau_0 - \tau)$)。ただ、$r_\theta(flat) = \tau_0 - \tau$ の値自身が $\lambda_0 = 0$、$\lambda_0 \neq 0$ のケースで異なるためにピークがシフトされるのである。

まとめれば、プロジェクションに本質的な役割を果しているのは $\tau_0 - \tau$ というよりはむしろ、対象としているゆらぎまでの角径距離 $r_\theta(\tau)$ である。宇宙が平坦な場合両者は一

[¶] これが、宇宙論的な角径距離 r_θ の定義でもある。

致するが、$\kappa \neq 0$ の場合は (3.180), (3.181) を使わねばならない。平坦な場合でも $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 \neq 0$ ではプロジェクトされる ℓ は異なるが、それは純粋に宇宙の進化の違いに依存している。一方、平坦でない宇宙と平坦な宇宙との違いは、進化の違いに加えて幾何学的な効果によってプロジェクトされる ℓ が変化し、それは宇宙の進化の違いによる変化 ($\ell \propto \Omega_0^{-1/2}$) に比べ、2 乗で効くため大きい ($\ell \propto \Omega_0^{-1}$)。

以上より、ピークの位置を観測によって決めることは宇宙の曲率を決定することと等価である。すなわち、ピークの位置の観測からはトータルの曲率をあらわす $\Omega_0 + \lambda_0$ が決められるのである。このままでは Ω_0, λ_0 がパラメター決定の際に縮退するが、Ω_0 は RD – MD のつりあいの時期の変化 ($\propto \Omega_0 h^2$) によってピークの高さを変化させたり、後述のレンズ効果を変化させたりするため、λ_0 と完全に縮退することはない。

6 Small Scale Effects

6.1 small angle approximation

小角度異方性を調べる際 $\ell \gg 10$ であれば天球を平坦とみなして良いことが示されたので、2 点関数を球面関数で展開するのではなく 2 次元フーリエ展開で求めることが可能であり、こちらの方が数学的取いが簡単であるため有効である。

$$\begin{aligned}\langle\Theta(\boldsymbol{\gamma})\Theta(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\theta})\rangle_{\rm ens} &= \int \frac{d^2\boldsymbol{Q}}{(2\pi)^2}\left\langle\left|\tilde{\Theta}(\boldsymbol{Q})\right|^2\right\rangle e^{-i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\theta}} \\ &= \int \frac{Q\mathrm{d}Q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\left\langle\left|\tilde{\Theta}(\boldsymbol{Q})\right|^2\right\rangle e^{-iQ\theta\cos\phi} \\ &= \int \frac{Q\mathrm{d}Q}{2\pi}\left\langle\left|\tilde{\Theta}(\boldsymbol{Q})\right|^2\right\rangle J_0(Q\theta) \qquad (3.183)\end{aligned}$$

最後の等号は、ベッセルの積分公式 (I.66) を用いた。一方、(3.136) において小角度近似 $\ell \gg 1$:

$$P_\ell(\cos\theta) \approx J_0\left((\ell+1/2)\theta\right) \qquad (3.184)$$

を用いれば

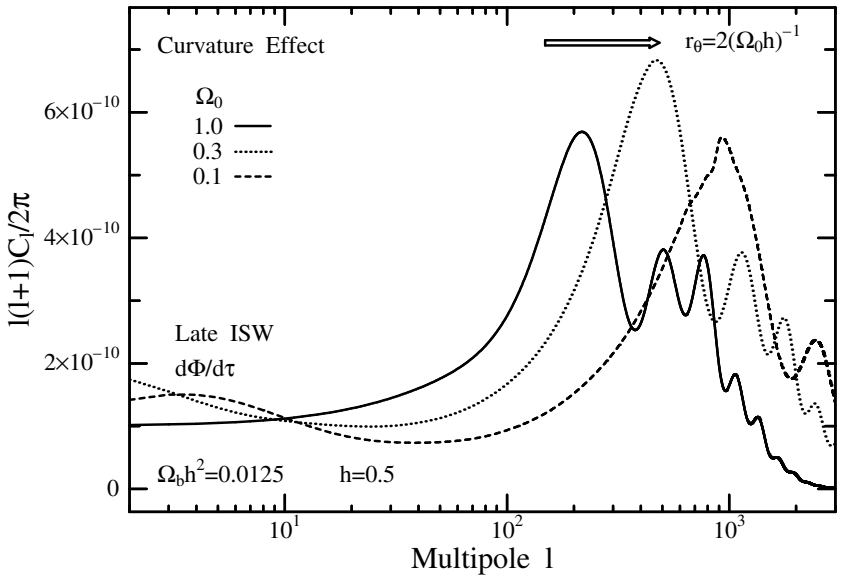
$$C(\theta) \approx \sum_\ell \frac{\ell+1/2}{2\pi} C_\ell J_0\left((\ell+1/2)\theta\right). \qquad (3.185)$$

(3.183) と比較することにより

$$C_\ell \approx \left\langle\left|\tilde{\Theta}(\boldsymbol{Q})\right|^2\right\rangle \qquad (Q \approx \ell+1/2). \qquad (3.186)$$

すなわち、2 次元フーリエモードの 2 乗平均はそのままパワースペクトルに対応している。

図 3.11: 宇宙の曲率による、ドップラーピークのシフト。ただし $\lambda_0 = 0$ である。あるスケール k をもつゆらぎがプロジェクトされる ℓ は角径距離 r_θ に比例している。従って、$\ell \propto 2(\Omega_0 h)^{-1}$ であり、Ω_0 が小さくなるほどドップラーピークは ℓ の大きい方へずれてゆく。また、$\ell < 10$ のゆらぎの増加は曲率が効く時期に起こるポテンシャルの時間変化、晩期 ISW (late ISW) である。$\Omega_0 = 0.1$ モデルの 1st ドップラーピークの特異な形は数値的エラーのためである。



6.2 lensing effect

これまでは $\mathcal{G}_{SW}$ 及び $\mathcal{G}_C$ によるソースのみを考えてきた。フリーストリーム期では、

- $\mathcal{G}_{SW}$: 宇宙論的なメトリックの時間変化による ISW, 非線形構造による RS
- $\mathcal{G}_C$: 再イオン化によるダンピング、キャンセルされないドップラーシフトによる OV、銀河団による SZ

がソースとして寄与し、さらに 3 次元曲率の存在がプロジェクションの角度を劇的に変化させることも理解できた。

一方、現実の宇宙は明らかに非一様であり、そのような宇宙を光が通過すれば重力レンズ効果を受けて光の経路が曲げられることは良く知られている。ソース関数で言えば、これまで高次の効果として無視してきた $\mathcal{G}_{bend}$ による寄与である。$\mathcal{G}_{bend}$ は線形摂動の 2 次以上のオーダーであり線形摂動解析においては無視できるのだが、小スケール (大 ℓ) の C_ℓ に観測可能な効果を及ぼす。重力レンズによる CMB への効果を求めるには、もちろんボルツマン方程式を $\mathcal{G}_{bend}$ について直接解いて求めれば良いのであるが、Seljak (1994) によってより簡便な処方箋が与えられた。$\Theta(\tau, \boldsymbol{\gamma})$ の進化を直接追うのではなく、統計量である C_ℓ を中心にして議論するものであり、「パワースペクトルアプローチ (power spectrum approach)」と呼ばれる。

観測される温度パターン $\Theta(\boldsymbol{\gamma})$ において、視線方向 $\boldsymbol{\gamma}$ は必ずしも LSS 上まで「一直線」に伸びてはいない。レンズ効果を受けて曲がっていれば、曲がり角 (deflection angle) $\boldsymbol{\alpha}$ だけ曲げられた光を観測するので

$$\Theta(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \Theta(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha}). \tag{3.187}$$

2 点関数を小角度近似で求めれば

$$\begin{aligned} C^{lens}(\theta) &= \left\langle \Theta(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\Theta(\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\rangle \\ &= \langle \Theta(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha})\Theta(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\alpha}') \rangle \qquad (3.188) \\ &= \int \frac{QdQ}{2\pi} J_0(Q\theta) \left\langle \left| \tilde{\Theta}(\boldsymbol{Q}) \right|^2 \right\rangle \left\langle e^{i\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}')} \right\rangle . \qquad (3.189) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\alpha}' \equiv \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\theta})$ である。明らかに、曲がり角の差によってパワースペクトルは変形を受けるが、2 方向からやってくる光が「全く同じ曲がり角」で曲げられても影響はない。ここ

で、曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ は 2 次元面に射影した重力ポテンシャルの勾配なので、仮定よりランダムガウシアンの線形摂動量である。これより $\langle e^{i\cdots}\rangle$ は

$$\begin{aligned}\left\langle e^{i\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}')}\right\rangle &= \left\langle 1+i\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}')-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}')\right)^2+O\left(\boldsymbol{\alpha}^3\right)\right\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}\left\langle\left(\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}')\right)^2\right\rangle} \qquad (3.190)\\ &= e^{-\frac{1}{2}Q^2\sigma^2(\theta)}, \qquad (3.191)\end{aligned}$$

$$\sigma^2(\theta)\equiv\frac{1}{2}\left\langle(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}')^2\right\rangle. \qquad (3.192)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ の奇数次はランダムガウシアン仮定より平均してゼロであるため、等式が成立する。以上より、

$$C^{lens}(\theta)=\int\frac{QdQ}{2\pi}J_0(Q\theta)C_Q^{no-lens}e^{-\frac{1}{2}Q^2\sigma^2(\theta)}. \qquad (3.193)$$

すなわちレンズ効果は、曲がり角の分散に相当するスケールによって CMB のパワースペクトルをスムージングすることが分かる (図 3.12)。

6.3 normalization, transfer function, growth factor & non-linear effect

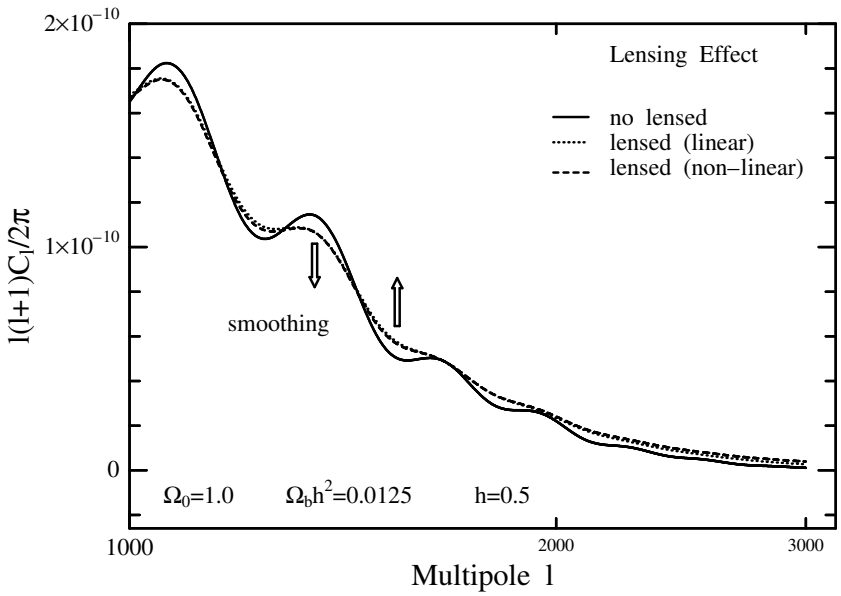
曲がり角はポテンシャルの勾配なので、その分散 $\sigma(\theta)$ は「密度ゆらぎのパワースペクトル[‖]」から求められる。従って、CMB のレンズ効果を求める際にはパワースペクトルを与えねばならない。線形理論では、初期パワースペクトル $P_{prim}(k)\equiv|\delta_k|^2=Ak^n$ に RD 時のポテンシャルの時間変化やシルク減衰などの効果をあらわす遷移関数 (transfer function) $T(k)$ をかけ、

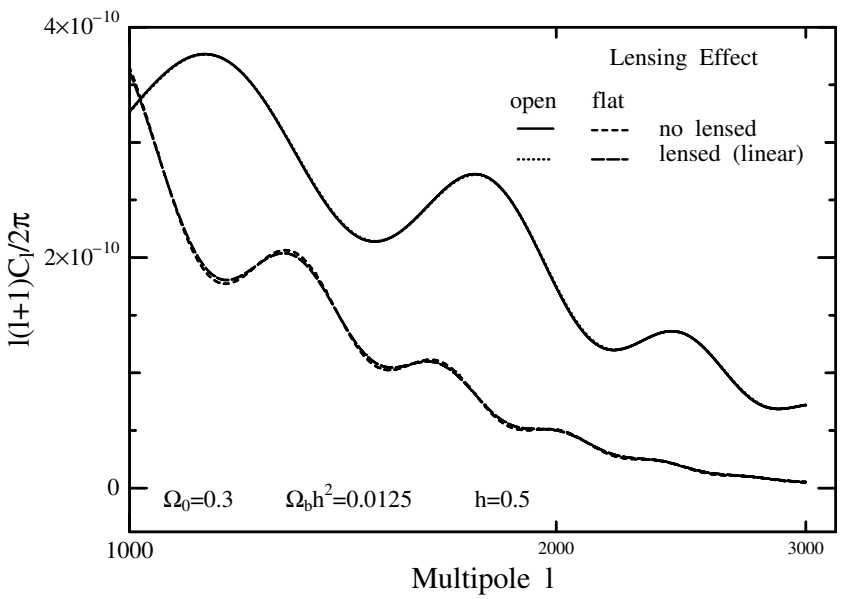
$$P(k)=Ak^nT^2(k) \qquad (3.194)$$

として求められる。初期ゆらぎのパワースペクトルをこのように仮定する理由は、無限遠方到達力である重力は特徴的スケールを持たないためである。始めこれは単なる仮定にすぎなかったが、その後インフレーション理論によって初期宇宙で k^n $(n\approx1)$ のスペクトルを持つゆらぎが生成されることが分かった (chapter 6)。従って大抵の場合 $n\approx1$ が仮定される。

[‖] このセクションでは、「パワースペクトル」という言葉は全て密度ゆらぎのパワースペクトルとする。

図 3.12: レンズ効果による C_ℓ のスムージング。“no lensed” はレンズ効果を含めないもの、“lensed (linear)” は、線形理論の密度ゆらぎのパワースペクトルによるレンズ効果、”lensed (linear)” は Peacock & Dodds (1996) の非線形パワースペクトルによる効果。遷移関数 (transfer function) は数値的に求めてある。上のパネルは $\Omega_0 = 1.0$、下は $\Omega_0 = 0.3$ である。明らかに Ω_0 が大きいほどレンズ効果は大きく、$\Omega_0 = 0.3$ では識別できない。また、下のパネルには $\lambda_0 = 0.7$ の平坦モデルもプロットした。本質的に効いているのは Ω_0 であり、この場合もレンズ効果は $\Omega_0 = 1.0$ に比べて小さい。また、非線形の効果はそれほど効いていない。





- **normalization**

  A はゆらぎの絶対値を決める規格化定数であり、観測から求められる。現在良く使われているのは COBE の大角度異方性 ($\ell < 10$) の観測による規格化 (COBE normalization) で、特に Bunn & White (1997) の結果が使われている。これは大きなスケールの観測に基づいた規格化の方法であり、この規格化による小さなスケールのゆらぎの大きさは遷移関数に強く依存する。逆に、小スケールであるクラスター数密度の観測による規格化 (cluster normalization) がある (e.g., White, Efstathiou & Frenk 1993)。まだ精度を望める段階ではないが、こちらは小スケールのゆらぎの大きさを直接見ているため、COBE の規格化とは相補的な関係となっている (Kitayama & Suto 1997)。従って、COBE の規格化から求められたクラススケールの密度ゆらぎの大きさがクラスターの観測と無矛盾であるかが、現実的な宇宙モデルの一つの指標となる。

- **transfer function**

  $T(k)$ はある程度解析的に求めることが可能であるが、精度を要する場合にはやはりボルツマン方程式を解いて光子 – バリオン – CDM – ニュートリノ ... 系のゆらぎの発展を追わねばならない。脱結合時まで解けばあとは全ての成分が独立に発展するのでボルツマン方程式を解く必要はなく、遷移関数は脱結合時のパワースペクトル $P(k, \tau_{dec})$ を与える。$T(k)$ は数値的に与えられるわけだが、解析的取扱いに有用なフィッティング公式が与えられている。中でも良く使われるのが Bardeen, Bond, Kaiser & Szalay (1986) による公式であるが、最近さらにフィッティング精度の良い公式が Eisenstein & Hu (1998) により与えられた。

- **growth factor**

  任意の時間のパワースペクトルは、線形理論における密度ゆらぎの成長関数 (growth factor) $D(\tau)$:

  $$\delta_k(\tau) = \frac{D(\tau)}{D(\tau_{dec})}\delta_k(\tau_{dec}) \tag{3.195}$$

  により τ_{dec} からゆらぎを進化させ、

  $$P(k, \tau) = \left[\frac{D(\tau)}{D(\tau_{dec})}\right]^2 P(k, \tau_{dec}) \tag{3.196}$$

として得られる。$\lambda_0 = 0$ の場合には $D(\tau)$ の解析解が求まるが、あらゆるケースに適用できる近似解が与えられており (Lahav 1991; Carroll, Press & Turner 1992)、

$$D(z) = (1+z)^{-1}\frac{5\Omega(z)}{2}\left\{\Omega(z)^{4/7} - \Omega_\Lambda(z) + \left[1+\frac{\Omega(z)}{2}\right]\left[1+\frac{\Omega_\Lambda(z)}{70}\right]\right\}^{-1}, \quad (3.197)$$

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_0(1+z)^3}{\lambda_0 + (1-\Omega_0-\lambda_0)(1+z)^2 + \Omega_0(1+z)^3}, \quad (3.198)$$

$$\Omega_\Lambda(z) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + (1-\Omega_0-\lambda_0)(1+z)^2 + \Omega_0(1+z)^3}. \quad (3.199)$$

- **non-linear effect**

  小スケールでは非線形の構造が形成され、線形理論が破綻する。従って前述のような単純な成長率 $D(\tau)$ によって成長させたパワースペクトルでは、小スケールのパワーを低く見積もってしまう。このような非線形構造を記述するにはもはや解析的取扱いはできず、N 体シミュレーションなどの数値的手法に頼らざるを得ない。しかし、ここでもやはり解析的取扱いに有用なフィッティング公式が Peacock & Dodds (1996) によって与えられている。これは N 体シミュレーションの結果を再現するものであり、幅広いパラメタースペースにおいて良く合うことが確かめられている。

  図 3.12 に、Peacock & Dodds (1996) のパワースペクトルを用いたレンズ効果による C_ℓ のスムージングを載せる。線形理論と比べて顕著なずれはなく、$\ell \approx 3000$ あたりではまだ非線形構造による影響がそれほど効いていない。

7 Polarization

このセクションでは、偏光のパワースペクトルを決めている物理を現象論的に理解し、温度ゆらぎからは得ることのできない偏光が持つ独自の情報についてまとめる。

7.1 integral solutions

温度ゆらぎのケース (3.162) – (3.166) と同様に、偏光の輸送方程式の積分解を書き下す。$Q \pm iU$ はスピン 2 を持っているため多少複雑であるが (Hu & White 1997b)、

$$\frac{E_\ell^{(m)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} = -\sqrt{6}\int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)}\dot{\tau}_c P_2^{(m)}(\tau)\mathcal{E}_\ell^{(m)}\left(k(\tau_0-\tau)\right), \quad (3.200)$$

$$\frac{B_\ell^{(m)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} = -\sqrt{6}\int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)}\dot{\tau}_c P_2^{(m)}(\tau)\mathcal{B}_\ell^{(m)}\left(k(\tau_0-\tau)\right), \tag{3.201}$$

$$\frac{V_\ell^{(m)}(k,\tau_0)}{2\ell+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\tau_c(\tau_0,\tau)}\dot{\tau}_c V_1^{(m)}(\tau) j_\ell^{(1m)}\left(k(\tau_0-\tau)\right), \tag{3.202}$$

$$\mathcal{E}_\ell^{(0)} = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}}\frac{j_\ell}{x^2}, \tag{3.203}$$

$$\mathcal{E}_\ell^{(1)} = \sqrt{\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{4}}\left(\frac{j_\ell}{x^2}+\frac{j_\ell'}{x}\right), \tag{3.204}$$

$$\mathcal{E}_\ell^{(2)} = \frac{1}{4}\left(-j_\ell + j_\ell'' + 2\frac{j_\ell}{x^2} + 4\frac{j_\ell'}{x}\right), \tag{3.205}$$

$$\mathcal{B}_\ell^{(0)} = 0, \tag{3.206}$$

$$\mathcal{B}_\ell^{(1)} = \sqrt{\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{4}}\frac{j_\ell}{x}, \tag{3.207}$$

$$\mathcal{B}_\ell^{(2)} = \frac{1}{2}\left(j_\ell' + 2\frac{j_\ell}{x}\right). \tag{3.208}$$

各プロジェクションはそれぞれ、

	$E_\ell^{(m)}$	$B_\ell^{(m)}$	$V_\ell^{(m)}$
peak at $\ell = x$	$\mathcal{E}_\ell^{(0)}$, $\mathcal{E}_\ell^{(2)}$	$\mathcal{B}_\ell^{(1)}$	$j_\ell^{(11)}$
overall damping	$\mathcal{E}_\ell^{(1)}$	$\mathcal{B}_\ell^{(2)}$	$j_\ell^{(10)}$
not exist	—	$\mathcal{B}_\ell^{(0)}$	$j_\ell^{(12)}$

である。散乱では生成されないはずの B モードがソースとして $P_2^{(m)}$ を持つのは、フリーストリームによる E モードとの混合の結果に他ならない。ただしスカラーモードでは混合は起こらないため、$\mathcal{B}_\ell^{(0)} = 0$ である。さらに円偏光 V のソースは自身の初期条件 V_1 であるが、タイトカップル期に V_1 はダンプしてしまうので結局 $V_\ell^{(m)} = 0$ である。

偏光のソースは散乱時の 4 重極パターン

$$P_2^{(m)} \equiv \frac{1}{10}\left(\Theta_2^{(m)} - \sqrt{6}E_2^{(m)}\right) \tag{3.209}$$

のみであるから、全ては $\Theta_2^{(m)}$ の振舞いで決定される。タイトカップル 1 次では $\Theta_2^{(m)} = 0$ なので、ファーストドップラーピーク付近では偏光はほとんど生成されない。タイトカップル 2 次になるとスカラーモードでは $\Theta_2^{(0)}$ が効き始め、偏光が生成されて温度ゆらぎ $\Theta_0^{(0)}$

が拡散減衰を受けてダンプし始めるころに偏光は極大となる。その後 $\Theta_2^{(0)}$ も拡散減衰でダンプしてしまうので、偏光も共にダンプすることになる。一方、テンサーモードはアコースティックモードが存在しないため $\Theta_2^{(2)}$ はタイトカップル中ダンプしてしまい、偏光も共にダンプする。基本的なメカニズムは以上であり、図 3.13 は理解できる。

7.2 reionization

偏光に重要な痕跡を残すものとして、宇宙の再イオン化がある。再イオン化が z_{ion} が起こると z_{ion} で新たな LSS ができ、再び散乱によって偏光が生成される。特徴的なのは、現在近くで起こるために見込み角が大きく、大角度 $(\ell < 50)$ にパワーが生成されることである。本来このスケールには偏光が存在しない。従って、このスケールに偏光を検出できれば再イオン化のヒストリーを決めることができるのである。偏光は散乱がなければ絶対に生成されることがないため、再イオン化がなければ脱結合時の LSS の情報を完全に保存している。逆に、温度ゆらぎの場合は ISW や RS, SZ など再イオン化がない場合でも様々なセカンダリの効果が効いてしまう。これがまさに偏光の情報の利点であり、大きな ℓ では LSS の情報、小さな ℓ では再イオン化の情報と完全にセパレートできるのである。

観測的にはクエーサーの吸収線系の観測より $z \simeq 5$ ではほぼ完全電離であることが示されている。これは現在下限値であり、今後どれほどの赤方偏移まで観測の手が伸びてゆくか注目すべき点であるが、光学観測において検出限界等級を飛躍的に上げるのは難しい。一方、CMB の偏光観測の技術は現在すでに確立されており、あとは邪魔な大気のない衛生実験による検出を待つのみとなっている。その意味でも、宇宙の再イオン化のヒストリーを決定する上で現在最も実現可能性が高く、また精度も高い手法だといえよう (Planck が本当に上がればの話)。

図 3.13: スカラー/テンサーモードの温度ゆらぎ及び偏光のパワースペクトル。テンサー/スカラーモードの比 r は、最も単純化したケース $r = 7(1 - n_s)$ を用い、$n_s = 0.95$ を採用している。スカラーモードはタイトカップル 1 次でファーストドップラーピークを作るが、$\Theta_2^{(0)}$ が存在しないので偏光は小さい。拡散減衰のスケールになって $\Theta_2^{(0)}$ が効きはじめ、偏光が生成される。スカラーモードは E モードのみである。一方、テンサーモードはアコースティック解がないため $\Theta_2^{(0)}$ はタイトカップルでダンプし、偏光もつられてダンプする。テンサーモードは E, B モードを共に生成し、$B/E \simeq 8/13$ である (Hu & White 1997b)。

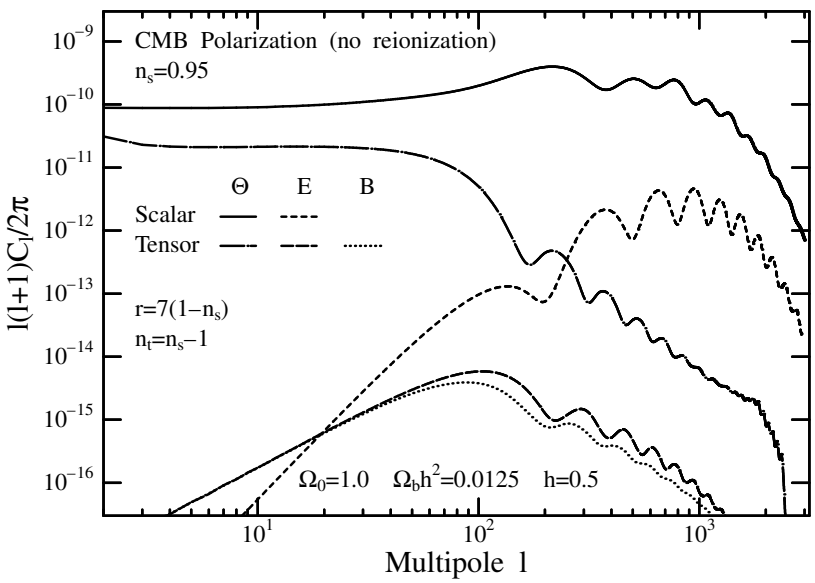
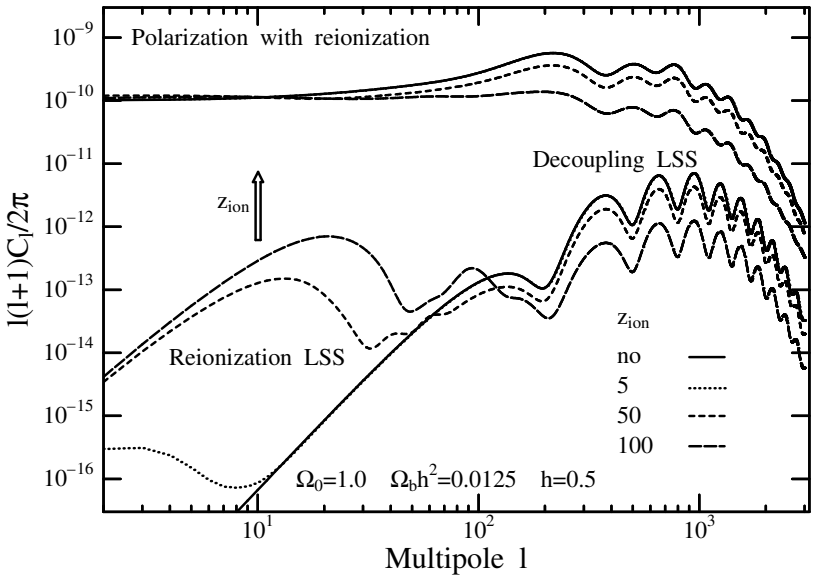


図 3.14: 再イオン化を入れた偏光のパワースペクトル。z_{ion} は再イオン化が起こった時の赤方偏移で、電離度は完全電離 $(x_e = 1.0)$ とした。温度ゆらぎは、$z_{ion} = 5$ と再イオン化なし ("no") が縮退しているが、偏光では新しい LSS での再散乱によって $\ell < 10$ にハンプが形成されている。$z_{ion} = 5$ のモデルで期待されるハンプの大きさは Planck の検出限界を下回っているため実際の検出は難しいが、より早期に再イオン化が起こっていれば Planck によってハンプが測定されるだろう。



第4章　Observations

これまで見てきたように、理論的には C_ℓ を予言することが可能である。しかし、当然であるが我々は完全に理想的な観測を行なうことはできない。「理想的でない」要素は、以下のように挙げられる。

(1) 有限のビームサイズ

(2) 有限の視野

(3) 有限のサンプリング数

(4) 有限のノイズレベル

従って、「理想的な」条件で観測されたものである理論のパワースペクトルと「現実的な」観測とを適切に比較するには、もう 1 ステップ必要である。以上をふまえ、この章では実際に観測と理論とを比較する際に重要な概念をまとめる。

1　Window Function

「理想的」な観測:

(1') 無限小のビームサイズ (デルタ関数)

(2') 無限大の視野 (全天)

(3') 無限大のサンプリング数 (観測可能な宇宙が無限個)

(4') 無限小のノイズレベル (パーフェクトな観測機器)

で観測して初めて理論で予言される C_ℓ と同等なデータとなり得るが、実際にはそんなことはあり得ない。つまり我々が観測できるのは、「本当の」スペクトル C_ℓ^{real} に何かしら実験の手段に依存したウェイト関数をかけたものである。

$$C^{obs}(\theta) = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1) C_\ell^{real} W_\ell P_\ell(\cos\theta), \tag{4.1}$$

$$C_\ell^{obs} = C_\ell^{real} W_\ell. \tag{4.2}$$

特に、温度ゆらぎの rms (root mean square) 値は

$$C^{obs}(0) = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1) C_\ell^{real} W_\ell \tag{4.3}$$

であり、rms 値として報告されている温度ゆらぎにも W_ℓ がウエイトとしてかかっていることを忘れてはならない。この W_ℓ を窓関数 (window function) と呼び、観測手法によって決まっている関数である。つまり理論と観測を比較する際、まず W_ℓ を知らねばならないのである。

1.1 (1) finite beam-size

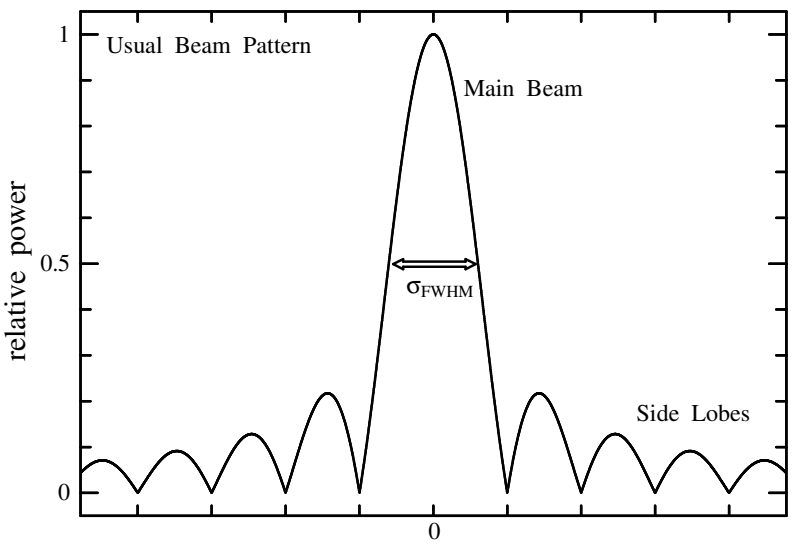
(1) の問題は、我々が現実の観測を行なう際に必ず「目 (望遠鏡)」を通して観測をしているという厳然たる事実によって生じる。口径 d の望遠鏡によって波長 λ で観測を行なったとすれば、望遠鏡の回折限界により分解能は

$$\sigma_{FWHM} \simeq \frac{\lambda}{d} \tag{4.4}$$

に制限されることになる。実際ビームは半値幅 (FWHM = Full Width at Half Maximum) σ_{FWHM} のガウシアンに近似することができ、メインビーム (main beam) と呼ばれる。ただし現実のビームは正確なガウシアンであることはなく、ビーム中心のピークの廻りにサイドローブ (side lobe) と呼ばれるハーモニクスが存在する (図 4.1)。一般に低周波 (低分解能) ではメインビームが太くなってサイドローブを埋めてしまうため、ガウシアンで良く近似できる。また、口径が小さい場合も同様である。その逆ではサイドローブが顕著に現れ、ビームパターンの補正が必要となる。

分解能 σ_{FWHM} よりも小さい角スケールの情報は完全にならされてしまって手に入れることができないため、有限のビームサイズによって観測できる C_ℓ の ℓ は、ビームサイズ

図 4.1: 典型的なビームパターン。σ_{FWHM} はメインビームのビームサイズを決める半値幅である。一般に、ビームは完全なガウシアンではなくサイドローブが存在しているために、メインビームの外側のシグナル拾ってしまう。



に対応するスケール ℓ_b までであり、それ以上は急速に感度がなくなる。従って、我々が観測できる温度マップは

$$\begin{aligned}\Theta^{obs}(\boldsymbol{\gamma}) &= \int d\Omega' \Theta^{real}(\boldsymbol{\gamma}') B(\boldsymbol{\gamma}' - \boldsymbol{\gamma}) \\ &= \int d\Omega' \Theta^{real}(\boldsymbol{\gamma}') \left\{ \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\gamma}' - \boldsymbol{\gamma})^2}{2\sigma^2} \right] \right\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

のように Θ^{real} をガウシアンビームプロファイルでたたみこんだものとなり、前章で導入した小スケール近似によってフーリエ変換し、$C^{obs}(0)$ を求めれば

$$C^{obs}(0) = \int \frac{QdQ}{2\pi} C_Q^{real} B_Q^2, \tag{4.6}$$

$$B_Q = \exp\left(-\frac{Q^2}{2Q_b^2} \right), \tag{4.7}$$

$$Q_b = \ell_b + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin(\sigma/2)}, \qquad \sigma = \frac{\sigma_{FWHM}}{\sqrt{8\ln 2}}. \tag{4.8}$$

(4.3) と比較すれば、ビームサイズによる W_ℓ は B_ℓ^2 であり角スケール $\ell > \ell_b$ において $\propto e^{-\ell^2/\ell_b^2}$ のように急激に感度がなくなることが分かる* 。

1.2 (2) finite field-of-view: scan strategy

ビームサイズは小スケールの感度に制限をつけるため、W_ℓ は大きい ℓ でのカットとして寄与することを見た。それでは、大スケール、すなわち小さい ℓ の方にはいくらでも観測が可能なのであろうか？衛星観測のように全天サーベイができる観測であれば、確かに大角度の異方性の観測に制限はなく、W_ℓ は B_ℓ のみで決まっていると考えて良い。しかし一般の地上観測、及びバルーン観測などでは有限の領域しか観測することができないので、おのずと観測可能な ℓ が決められてしまうのである。簡単に言えば、$1^\circ \times 1^\circ$ のマッピングをした観測で 2° の異方性を観測することはできないはずである。このような有限の視野の問題は、小さい ℓ へのカットとして寄与することになる。

しかし問題はそう単純ではない。電波の地上観測では、大気の影響を逃れるために種々の工夫をこらしたスキャン法 (scan strategy) によって観測を行なうのが常である。中でも

* 文献により、B_ℓ の定義は異なる。White & Srednicki (1995), Bond, Efstathiou & Tegmark (1997) では $B_\ell = \exp\left[-\ell(\ell+1)\sigma^2/2\right]$ 、Knox (1995) では $B_\ell = \exp\left[-\ell^2\sigma^2/2\right]$ である。ここでは Bond (1996) に従った。しかし、ビームサイズが問題になる ℓ は常に $\ell \gg 1$ を満たすためどちらも違いはない。COBE/DMR でも $\ell_b \approx 10$ である。

最も良く使われているのが「スイッチング」, あるいは「チョッピング」と呼ばれる方法である。これは、空の離れた数点を素早く往復して観測し、その差をシグナルとして検出する方法である。CMB のような弱いシグナルを検出する際大気のノイズは非常に問題であり、このように「差」を検出することによって大気の成分を同時に引き去ってしまうのである。最も単純な、2 点の差のみを検出する方法を「2 ビームスイッチング」, 3 点は「3 ビームスイッチング」と呼ばれている。

ではこのように特殊なスキャン法によって観測された温度分布というのは、C_ℓ としてどのような成分を観測したことになっているのだろうか。これは rms 値を実際に計算して求めることができる。例として 2 ビームスイッチングを考える。θ_{chop} だけ離れた 2 点 $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ の差を検出するとすれば、

$$\begin{aligned} C^{obs}(0) &= \left\langle \left|\Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_1\right) - \Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_2\right)\right|^2 \right\rangle & (4.9)\\ &= \left\langle \left|\Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_1\right)\right|^2 \right\rangle + \left\langle \left|\Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_2\right)\right|^2 \right\rangle - 2\left\langle \Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_1\right)\Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_2\right)\right\rangle & (4.10)\\ &= 2\left[C^{real}(0) - C^{real}(\theta_{chop})\right]. & (4.11) \end{aligned}$$

例によって (3.136) のようにルジャンドル展開すれば、

$$C^{obs}(0) = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1) C_\ell^{real} 2\left[1 - P_\ell(\cos\theta_{chop})\right]. \tag{4.12}$$

従って 2 ビームチョッピングによる W_ℓ は、$W_\ell = 2\left[1 - P_\ell(\cos\theta_{chop})\right]$ で与えられることが分かる。3 ビーム, 4 ビームに関しても同じ議論が成立ち、スイッチング法による W_ℓ は各ビーム間の角を θ_{chop} とすれば (White & Srednicki 1995 [†] ; Bond 1996)

$$\begin{aligned} W_\ell^{2beam} &= 2\left[1 - P_\ell(\cos\theta_{chop})\right], & (4.13)\\ W_\ell^{3beam} &= \frac{1}{2}\left[3 - 4P_\ell(\cos\theta_{chop}) + P_\ell(\cos 2\theta_{chop})\right], & (4.14)\\ W_\ell^{4beam} &= \frac{1}{8}\left[10 - 15P_\ell\left(\cos\theta_{chop}\right) + 6P_\ell\left(\cos 2\theta_{chop}\right) - P_\ell\left(\cos 3\theta_{chop}\right)\right]. & (4.15) \end{aligned}$$

小スケール近似をとれば、ルジャンドル関数は $P_\ell(\cos\theta_{chop}) \approx J_0(Q\theta_{chop}),\ Q \approx \ell + 1/2$ とベッセル関数に置き換えられる。実際の計算にはこちらの方が便利である。

ここで、誤解のないように断っておかねばならないことがある。さっき「$1^\circ \times 1^\circ$ のマッピングをした観測で 2° の異方性を観測することはできない」という例を出して有限の視野による W_ℓ の説明をしたわけであるが、ビームスイッチによるこれまでの議論とマッピン

[†] White & Srednicki (1995) の記法との対応は、$\theta_{chop} = 2\alpha_0$(2-beam), α_0(3-beam), $\frac{2}{3}\alpha_0$(4-beam)。

グとは直接関係していない。ビームスイッチ法は、「固定された」角度 θ_{chop} 離れた点の差を検出し、それを天球内のある領域でスキャンすることによってサンプルするのである。従ってマッピングを行なっていない。ナイーヴに言えば、θ_{chop} 離れた角スケールの異方性しか観測していないのである。

ここで、広い領域に渡ってサンプルを行なった場合 θ_{chop} よりももっと大角度の異方性を観測したことになっていないのか？ という疑問が生じる。しかし単純にスキャンデータをマップにすることはできない。理由は、なぜわざわざビームスイッチング法を用いたのかを思い出せば良い。大気ノイズの存在である。大気ノイズは典型的に $1/f$ のスペクトルを持っている。従って空間に焼き直せば大きなスケールになるほど大きなノイズがかぶることになるため、単純にマップをつくってもノイズを増やすだけである。この困難を回避し、クリーンなマップを作る手法が Tegmark (1997a, 1997b) によって提唱され、"Saskatoon" (Tegmark et al. 1997), "HACME" (Tegmark et al. 1997), "QMAP" (de Oliveira-Costa et al. 1998) といった CMB の観測に適用されて成果を挙げている[‡] 。

電波観測においてもう一つ重要な手法として、干渉計が挙げられる。干渉計は観測量が既に輝度分布の相関関数のフーリエ変換であるため、CMB のパワースペクトルを直接測定してると思って良い。加えて大気ノイズに強く、2 次元マップを直接描く事ができるため非常に優れた手法だと言える。現在観測実績のある干渉計は"CAT" ($\ell \approx 500$; Scott et al. 1996), "ATCA" ($\ell \approx 4700$; Subrahmanyan et al. 1998), "VLA" ($\ell \approx 10^4$; Partridge et al. 1997) であるがゆらぎを検出したのは CAT のみであり、あとは上限値である。干渉計の視野は干渉計がとることのできる最も短いベースラインによって決まっている。最も短いベースラインがもっとも小さい角波数 ℓ に相当しているので、できるだけ望遠鏡同士が接近すれば広視野を確保できることになる。そのためには、超小口径の干渉計が必要である。現在計画中の CMB 専用干渉計のうち最も口径の小さいものは、"VSA (Very Small Array)" という冗談みたいな名前のもので、何と直径が 14 cm しかない。これで $\ell = 100 - 2000$ までをカバーする計画である (Jones & Scott 1998)。

[‡] Tegmark の一連のこうしたマップ作りの仕事は見ために非常に印象的であり、Scientific American などの雑誌にも取り挙げられている。Scientific American では、ちょっとしたエピソードを紹介している。Saskatoon と QMAP の観測領域はオーバーラップしているのに、本来一致するはずのマップが一致しないという事件が起こった。しかし発表の直前になって de Oliveira-Costa (実は Tegmark の奥さん) が、Tegmark が QMAP のマップを裏表逆にプロットしていることに気付き、ちゃんと一致して一見落着。その後 Tegmark は、「自分が科学者になって最も興奮したのは、自分がマップを裏表逆にしていた事が分かった時だった」と話しているという。ちなみに de Oliveira-Costa は CMB のフォアグラウンドの研究を勢力的に行なっており、Tegmark & de Oliveira-Costa 夫妻に CMB のマップを作らせたら右に出る者はいないと思われる。

1.3 worked examples

ビームサイズと、スイッチング法による窓関数を求めたので、ここで例題としていくつか実際の観測の W_ℓ を求めてみる。

(a) **all-sky survey**; **MAP**

$\sigma_{FWHM} = 13'$

Microwave Anisotropy Probe。言わずと知れた NASA の CMB 専用観測衛星。いよいよ、2000 年 9 月打ち上げ予定。ビームサイズは最も小さい 90GHz のものを使った。

(b) **2-beam**; **SuZIE** (Church et al. 1997)

$\sigma_{FWHM} = 1'.7$, $\theta_{chop} = 4'.6$

CSO (= Caltech Submillimeter Telescope) に搭載されている検出器で、Sunyaev-Zel'dovich Infrared Experiment の略。その名の通り SZ 効果の観測専用に最適化されているが、CMB の観測も行なっている。公式的には上限値のみを得ているが、最近ホームページ (http://astro.caltech.edu/ lgg/suzie/suzie.html) にゆらぎを検出したと報告している。

(c) **3-beam**; **OVRO** (Readhead et al. 1989)

$\sigma_{FWHM} = 1'.8$, $\theta_{chop} = 7'$

Owen's Valley Radio Observatory。小スケールの CMB 異方性に対し、COBE 以前の当時最も厳しい上限値を与えていたため、数々の理論の制限に使われまくっていた。もちろん今でも厳しい制限である。

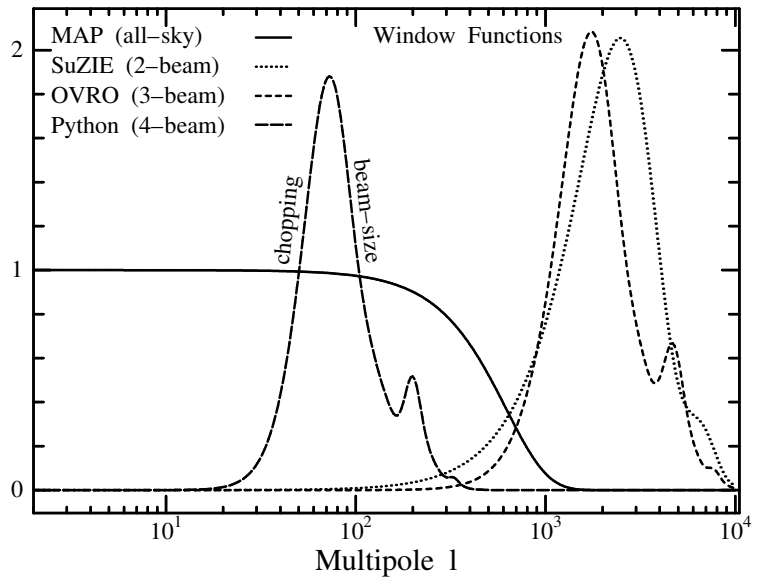
(d) **4-beam**; **Python** (Platt et al. 1997)

$\sigma_{FWHM} = 45'$, $\theta_{chop} = 2^\circ.75$

最近、Viper と共にドップラーピークを検出したと騒がせている、Carnegie Mellon University が南極に持つ望遠鏡群の一つ。Python ミッションは現在 I – V まで終了している。I – IV までは 4 ビームチョッピングを用いているが、V ではより別のスキャン法を採用している (Coble et al. 1999)。

以上についてビームは (4.6), チョッピングは (4.13) – (4.15) を用いて計算し、両者を掛け合わせれば 図 4.2 を得る。

図 4.2: 全天サーベイ (MAP) と、2ビーム (SuZIE), 3ビーム (OVRO), 4ビーム (Python) チョッピング観測の窓関数 (window function)。各々の観測のビームサイズにより、ℓ の大きな方へカットが入る。全天サーベイでは小さな ℓ のほうは制限がないが、チョッピング観測ではチョッピングの角度より大角度の異方性はカットが入るため感度がない。



1.4 (3) finite samping, (4) finite noise-level

chapter 3 でも触れたように、観測ではある ℓ について C_ℓ を計算するためのサンプルを最大 $2\ell+1$ 個しか取れないため、ノイズゼロの検出器を使ったとしても必ずサンプル数不足にともなうエラーがある。これをコスミック – ヴァリアンス (cosmic variance) と呼ぶ。(3.139) を再び記せば、コスミック – ヴァリアンス ΔC_ℓ は

$$\Delta C_\ell = \sqrt{\frac{2}{2\ell+1}} C_\ell. \tag{4.16}$$

さらに、ノイズゼロの検出器などというものは世に量子ゆらぎが存在する以上絶対に不可能である。

2 Error Estimation

これまで見たように、観測されるパワースペクトルが必ず伴っているエラーは (1) 有限のビームサイズ, (2) 有限の視野, (3) 有限のサンプル, (4) 有限のノイズレベル が全て関与している。これらを全て定量的に評価し、観測のスペックからパワースペクトルを測定できる精度を求める公式が Knox (1995) によって導かれた。

$C_\ell^{obs} = \left\langle \left| a_{\ell m}^{obs} \right|^2 \right\rangle$ が伴っているエラーを評価する。有限のピクセル数 N_{pix} を持つマップ上で温度分布を展開すれば、その逆変換は

$$a_{\ell m}^{obs} = \frac{4\pi}{N_{pix}} \sum_{j=1}^{N_{pix}} \Theta_j Y_\ell^m(\theta_j, \phi_j). \tag{4.17}$$

さらに、観測は (1) 有限のビームサイズ, (4) 有限のノイズレベルで行なわれるので

$$a_{\ell m}^{obs} = a_{\ell m}^{real} e^{-\ell^2\sigma^2/2} + a_{\ell m}^{noise}, \tag{4.18}$$

$$\left\langle a_{\ell m}^{noise} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle a_{\ell m}^{real} a_{\ell m}^{noise} \right\rangle = 0. \tag{4.19}$$

ただし、表記の簡単化のためビームサイズの寄与を Knox (1995) にならって $e^{-\ell^2\sigma^2/2}$ と書いた。展開係数のノイズ成分 $a_{\ell m}^{noise}$ は、もともとピクセルあたりの Θ_j の測定にともなっていたノイズ σ_{pix} [§] なので、エラーの伝播式から

$$\left\langle \left| a_{\ell m}^{noise} \right|^2 \right\rangle = \sum_{j=1}^{N_{pix}} \left[\sigma_{pix}^2 \left(\frac{\partial a_{\ell m}^{obs}}{\partial \Theta_j} \right)^2 \right] = \frac{4\pi}{N_{pix}} \sigma_{pix}^2. \tag{4.20}$$

[§] ビームサイズである σ とピクセルあたりのノイズ σ_{pix} を混同しない。

最後の等式は (4.17) を Θ_j で偏微分して与式に代入すれば導ける。以上より、コスミック – ヴァリアンスを考えないアンサンブル平均では

$$\left\langle \left| a_{\ell m}^{obs} \right|^2 \right\rangle_{ens} = C_\ell^{real} e^{-\ell^2\sigma^2} + 4\pi \frac{\sigma_{pix}^2}{N_{pix}}. \tag{4.21}$$

一方、我々が測定可能な C_ℓ^{obs} に取り得る (3) 有限のサンプル数は、ある ℓ に対して $m = -\ell \ldots \ell$ までの $2\ell+1$ 個であるから、

$$C_\ell^{obs} = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| a_{\ell m}^{obs} \right|^2 = C_\ell^{est} e^{-\ell^2\sigma^2} + 4\pi \frac{\sigma_{pix}^2}{N_{pix}}. \tag{4.22}$$

我々は自分のマップのピクセルあたりの S/N を知っているはずなので、C_ℓ^{est} は我々が観測した C_ℓ^{obs} から推定 (estimate) した C_ℓ である。これが我々の測定値となる。あとは C_ℓ^{est} が伴っているエラーを評価すれば良い。$a_{\ell m}^{obs}$ は仮定よりランダムガウシアンであるから、

$$\chi^2 \equiv \frac{1}{\left\langle \left| a_{\ell m}^{obs} \right|^2 \right\rangle_{ens}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| a_{\ell m}^{obs} \right|^2 \tag{4.23}$$

は自由度 $2\ell+1$ の χ^2 分布に従い¶ 、平均値 $2\ell+1$, 分散 $2(2\ell+1)$ を持つ。よって (4.22) の分散をとれば、C_ℓ^{est} のともなう分散として

$$\left\langle \left(C_\ell^{est} - C_\ell^{real} \right)^2 \right\rangle = \frac{2}{2\ell+1} \left(C_\ell^{real} + 4\pi \frac{\sigma_{pix}^2}{N_{pix}} e^{\ell^2\sigma^2} \right)^2 \tag{4.24}$$

を得る。第 1 項目はコスミック – ヴァリアンス (4.16)、2 項目はピクセルあたりのノイズと有限のビームサイズによるエラーである。さらに (4) 有限の視野の影響はコスミック – ヴァリアンスに加えてさらなるサンプル数の減少となるので、全天に占める視野の割合を f_{sky} として、

$$\left(\Delta C_\ell^{est} \right)^2 = \frac{2}{(2\ell+1) f_{sky}} \left(C_\ell^{real} + w^{-1} e^{\ell^2\sigma^2} \right)^2. \tag{4.25}$$

$w^{-1} \equiv \sigma_{pix}^2 \Omega_{pix} = \sigma_{pix}^2 (4\pi/N_{pix})$ は、検出器の感度によるウェイトである。Knox (1995) によって導かれた公式 (4.25) は、上記の (1) – (4) のみがエラーのソースである場合エラーの評価に使うことができる。図 1.3, 1.4, 1.5 に付与されているエラーバーは、この公式によって求められている。

¶ 補足しておくが、自由度が 2ℓ ではなく $2\ell+1$ なのは、$\langle a_{\ell m}^{obs} \rangle = 0$ がサンプルから推定されたものではなく、母集団に対して始めから仮定されたものだからである。

3 Foregrounds

しかし、現実は (1) – (4) だけで済むほど甘くはない。CMB の観測にとって最大の敵は、フォアグラウンドに存在する CMB 以外の電波源である。良く知られているのは

- **free-free emission**
- **synchrotron**
- **dust emission**

であり、我々の銀河系及び系外銀河 (要するに全て) から放射されている。これらは「バックグラウンド」の弱いシグナルである CMB にとって雑音以外の何者でもない。従って、CMB のマップからパワースペクトルを作る最後の関門はいかにしてフォアグラウンドを取り除くか、という問題となる。まず手がかりとしては、CMB が波長依存性を持っていないのに対し、上記のフォアグラウンドは全て波長依存性を持っていることである。すなわち多波長で観測を行ない、相互相関をとってやることによってフォアグラウンドを判別することができる (Tegmark & Efstathiou 1996)。またその空間分布に関しても、他波長の全天マップ (COBE/DIRBE 等) と相関をとることでフォアグラウンドを同定、除くことができる (de Olveira-Costa et al. 1997; de Olveira-Costa et al. 1998)。Hobson et al. (1998) は CMB, 熱的 SZ (thermal SZ), 運動的 SZ (kinetic SZ), ダスト, 制動放射, シンクロトロンといった考え得るフォアグラウンドをモデルとして同じマップにばらまき、疑似観測データを作ってそれを「観測」し、どこまで分離できるかを調べている。

このようにフォアグラウンドの研究は徐々に進みつつあるが、まだフォアグラウンドのテンプレートを作れるほどにデータが出そろっていない状況である。現在、銀河系を多波長でマッピングするプロジェクト: GEM (= Galactic Emission Mapping) 計画が進行中であり、すでに数バンドでマップを作成している。これから BOOMERanG, MAP, Planck といった高精度の観測が出そろってくる中、フォアグラウンドをまともに扱った研究が急がれる。

第5章　The Sunyaev-Zel'dovich Effect

電子と光子のコンプトン散乱において、電子の温度T_eが光子の温度Tをはるかにしのぐような状況では電子の熱エネルギーが光子に輸送され、CMBのもつボーズ – アインシュタイン分布が変形を受ける可能性がある。Kompaneets (Kompaneets 1950) は、コンプトン散乱の衝突積分をエネルギー輸送の2次のオーダーまで展開し、エネルギー輸送を取り扱える近似的なボルツマン方程式を導出した (Appendix G)。Sunyaev & Zel'dovich はこの方程式をCMBに応用し、$T_e \gg T$が実現される状況でのスペクトル変形を求めた (Zel'dovich & Sunyaev 1969)。これはSZ効果と呼ばれており、具体的には銀河団中の高温電子ガスによるCMBのスペクトル変形が観測可能な寄与を及ぼす (Sunyaev & Zel'dovich 1972; Rephaeli 1995; Birkinshaw 1998)。

この章では観測的見地から議論を行なう為、cgs 単位系を用いる。c, h, k はそれぞれ光速、プランク定数、ボルツマン定数である。

1　Spectral Distortion

SZ効果は、y パラメターと呼ばれる量で定量化されている。

$$y \equiv \int \dot{\tau_c} \frac{k(T_e - T)}{m_e c^2} d\tau \simeq \sigma_T \int n_e \frac{kT_e}{m_e c^2} dl \tag{5.1}$$

τ_cはトムソン散乱の光学的厚さ、dlは視線方向の積分であり、最後の近似は$T_e \gg T$である。(G.46) より、

$$\Theta_{SZ}(\nu) = yh(z) \equiv y \left(z \coth \frac{z}{2} - 4 \right). \tag{5.2}$$

zは、CMBの温度でスケールされた周波数$z \equiv h\nu/kT$ [*] で、$h(z)$はSZ効果のスペクトル依存性をあらわす関数である。これより、y パラメターがSZ効果によるCMBの温度変化の大きさを決めていることが分かる。また、Θ_{SZ}が周波数に依存しているが、これはSZ効果がCMBのスペクトルを変形させているためである。

[*] 多くの文献では$x \equiv h\nu/kT$が用いられている。

(5.2) はフラックス $I(\nu)$ であらわすこともできる。

$$\Delta I_{SZ}(\nu) = i_0 z^3 \Delta f = i_0 z^4 f(1+f)\Theta_{SZ}(\nu) = i_0 y g(z), \tag{5.3}$$

$$i_0 \equiv \frac{2(kT)^3}{(hc)^2} = 2.6 \times 10^8 \text{ Jy } (T/2.7 \text{ K})^3 = 7.0 \text{ mJy/arcsec}^2 \, (T/2.7 \text{ K})^3 , \tag{5.4}$$

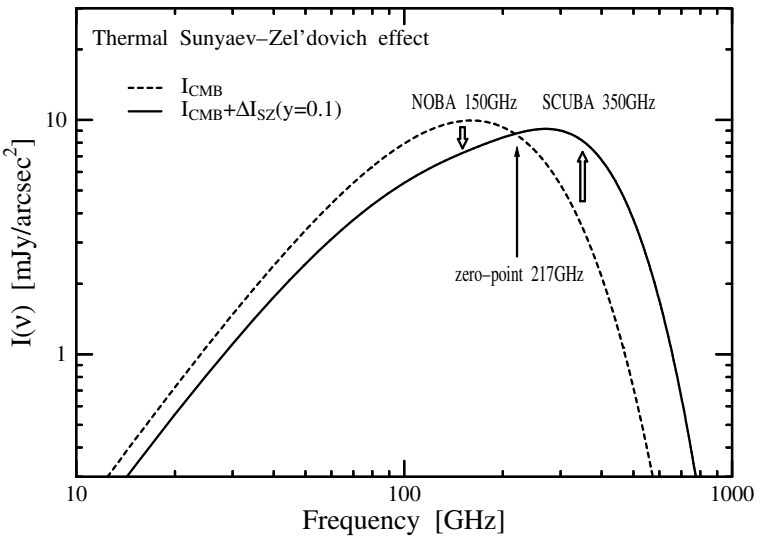
$$g(z) \equiv \frac{z^4 e^z}{(e^z-1)^2} \left(z \coth \frac{z}{2} - 4 \right). \tag{5.5}$$

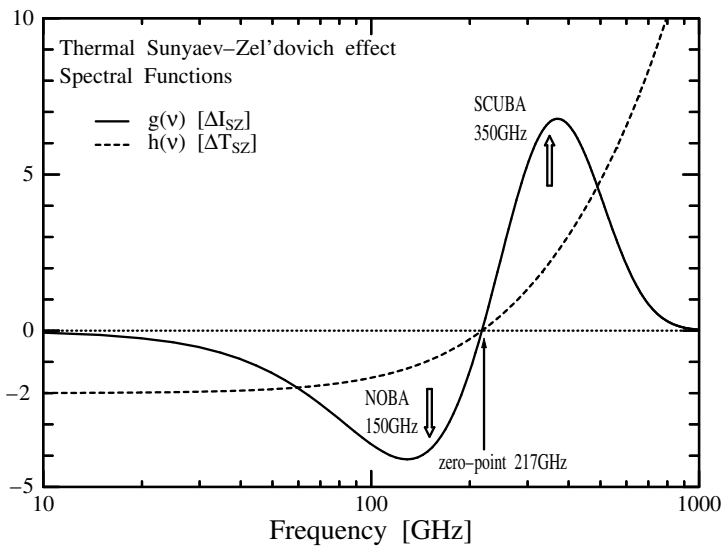
1 Jy $\equiv 10^{-23}$ erg s^{-1} cm^{-2} Hz^{-1} である。トータルの CMB スペクトルは、変形を受けていないプランク分布 I_{CMB} とあわせ $I = I_{CMB} + \Delta I_{SZ}$ と変形されることになる (図 5.1)。SZ 効果の大きな特徴は、$\nu = 217$ GHz を境にして低周波数では輝度が減少し、高周波では上昇する事である。

2 Submillimeter Detection of the SZ Effect

電波の観測では、レイリージーンズ領域の観測は比較的容易なため、これまで輝度の減少については多くの検出例が報告されている (Birkinshaw 1998, for review)。しかしサブミリであるウィーン領域は大気中の水蒸気による吸収のため地上からの観測が非常に困難であり、これまで信頼のおける検出例がなかった。そこで我々は、ハワイ島 JCMT (=James Clerk Maxwell Telescope) に搭載されている高感度ボロメータアレイ、SCUBA (=Submillimtre Common-User Bolometer Array) を用いて 350 GHz (850 μm) での SZ 検出を試み、無事初検出に成功した (Komatsu et al. 1999; Appendix M)。ターゲットクラスターは全天で最も明るい X 線銀河団、RXJ1347-1145 (Schindler 1995; Schindler, Hattori, Neumann & Böhringer 1997) である。検出にとって本質的であったのは SCUBA の高分解能 (15″) である。これまで検出を主張していたグループはどれもビームサイズが数分であり (Andreani et al. 1996, 1999; Holzapfel et al. 1997; Lamarre et al. 1998)、検出された正のシグナルが SZ によるものなのか、銀河団中に存在する他のサブミリソースのものによるのかが判断できなかった。しかし我々の結果は明らかに「広がった」正のシグナルを受けており、さらにそれは X 線観測から期待されている SZ のプロファイルと一致していた (Appendix M, fig.3)。これをもって我々の検出したシグナルが SZ であることが確かめられ、初検出に至ったのである。

図 5.1: スニヤエフ – ゼルドヴィッチ (SZ) 効果。上のパネルは、SZ によるスペクトルの歪み。I_{CMB} は SZ 効果を受けていない CMB の黒体スペクトル、ΔI_{SZ} は SZ 効果によるスペクトルの変化。y パラメターは 0.1 ととっているが、典型的には $y \simeq 10^{-4}$ である。SZ 効果を誇張するために、大きくとった。NOBA, SCUBA は、それぞれ野辺山 45-m, JCMT15-m に搭載されているボロメータアレイであり、比較のためにのせた。$\nu = 217$ GHz では SZ 効果はゼロである。下のパネルは、SZ の周波数依存性を決める関数。周波数依存性しかもたず、物理状態によらない。$g(\nu)$ はフラックス (ΔI_{SZ}) で、$h(\nu)$ は温度 (ΔT_{SZ}) で SZ を測った時の関数。フラックスで測ると、NOBA, SCUBA はちょうど SZ の減少, 上昇のピークに位置していることが分かる。





3 Fluctuation of the SZ Effect

宇宙空間には、数多くの銀河団が存在している。個々の銀河団はそれぞれが SZ 効果によって CMB の強度を変えるため、銀河団の空間分布はすなわち CMB の温度ゆらぎとしてあらわれることが期待される。離散的ソースの 2 点関数は、一様成分、ポアソン ノイズ、相関成分に分けることができる (Peebles 1980, pp.166 §41):

$$\langle n_i n_j \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle + \langle n_i \rangle \delta_{ij} + \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle \xi_{ij}. \tag{5.6}$$

- 一様成分: Mean Comptonization

  全天の平均的な寄与として、CMB のスペクトルを黒体放射からずらす寄与である。COBE/FIRAS が測定した CMB のスペクトルはほぼ完璧な黒体放射であり、$|y| < 1.5 \times 10^{-5}$ (95% C.L.) という制限がつけられている (Fixsen et al. 1996)。

- ポアソン ノイズ

  ある一つの視線方向、1 ビームあたりに平均して N 個の銀河団が存在すると考えれば、個数のポアソン ノイズは温度ゆらぎとして $\Theta \sim \sqrt{N}\Theta_{SZ}$ を与えることになる。今、Planck/HFI で観測を行なうことを考える。Planck/HFI のビームサイズは 350 GHz で約 $4'.4$、フラックス感度は 16 mJy である。一方、この周波数帯で 16 mJy 以上の銀河団の数は約 $1\ \mathrm{deg}^{-2}$ が期待されている (Kitayama, Sasaki & Suto 1998)。よって、ビームあたりの個数は $N \sim 5 \times 10^{-3}/\mathrm{beam}$、銀河団あたりの典型的な SZ 効果を $\Theta_{SZ} \sim 10^{-4}$ として $\Theta \sim 7 \times 10^{-6}$ となり、Planck で十分観測可能な寄与となる。SZ ゆらぎは、銀河団の大きさ程度の角度スケールで最も寄与が大きいため数分程度の小角度ゆらぎであるが、プライマリな CMB ゆらぎはシルク減衰のためこの角度スケールでゆらぎがほとんどない。加えて、プライマリなゆらぎはスペクトル依存性がないが、SZ 効果は (5.2) のように決まったスペクトル依存性を持つ為、多波長で高感度な観測を行なうことでプライマリな効果と分けて検出することができるであろう。

- 相関成分

銀河団の相関は、既存のカタログより $z = 0$ で

$$\xi(r) \simeq \left(\frac{r}{25 h^{-1}\ \mathrm{Mpc}} \right)^{-1.8} \tag{5.7}$$

が得られている (Padmanabhan 1993)。進化やバイアスのメカニズムは良く分かっていないが、Mo & White (1996) によって解析的な公式が、後に Jing (1998) によってシミュレーションを良く再現するフィッティング公式が与えられている。銀河団のクラスタリングによる影響が SZ ゆらぎのパワースペクトルにどのように反映されるかは非常に興味深いところであり、今後の課題である。

SZ ゆらぎの研究は様々な動機と方法論によって行なわれてきたが、銀河団の分布関数のモデルによって大別できる。

- Press & Schechter の質量関数 (Press-Schechter mass function; PSMF)
  Cole & Kaiser (1988), Makino & Suto (1993), Bartlett & Silk (1994), Atrio-Barandela & Mücket (1998).

- X 線光度関数 (luminosity function)
  Schaeffer & Silk (1988), Markevitch et al. (1991, 1992, 1994), Ceballos & Barcons (1994).

- 線形密度ゆらぎ + 流体シミュレーション
  Persi et al. (1995).

- ピーク – パッチ 法 (peak-patch method)
  Bond & Myers (1996).

- その他
  Rephaeli (1981), Ostriker & Vishniac (1986),

これらの結果はほとんど全て、ファクターの違いはあっても $\sim 10^{-6} - 10^{-5}$ レベルのゆらぎの存在を示している。

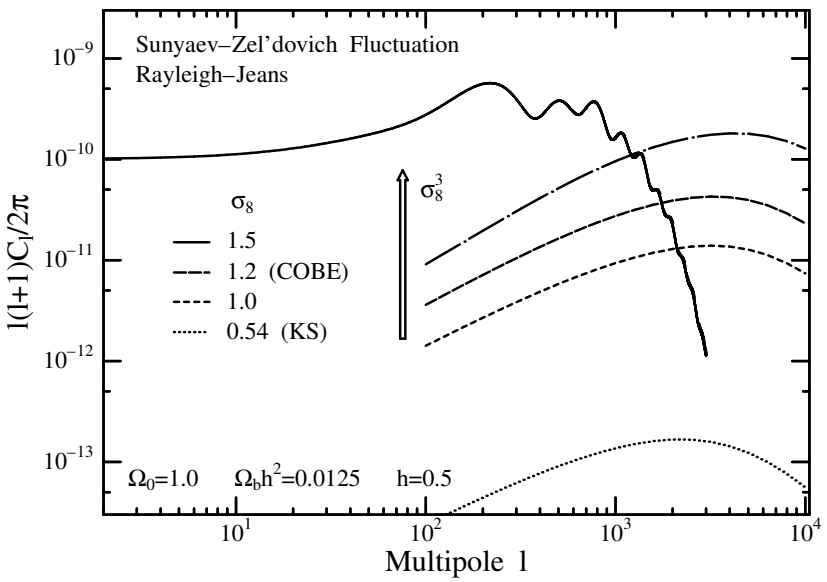
これまでの SZ ゆらぎの研究はいわばモデルのサーベイであり、SZ ゆらぎから定量的な情報を引きだすという立場は少ない。しかし、SZ ゆらぎはクラススケールの密度ゆらぎの情報をダイレクトに反映していると考えられる。プライマリ CMB の異方性を観測すれば、Ω_0, λ_0, Ω_b, h, n などのパラメターを 10%以下の精度で決めることができるが、こ

れらは全てクラスタースケールよりも大きなスケールの情報から決められている。従って、クラスタースケールの密度ゆらぎの大きさを決める σ_8 に対するプライマリ CMB の決定精度は、$\sim 15-25\%$ と悪い (Bond, Efstathiou & Tegmark 1997)。Markevitch et al. (1991, 1992) は SZ ゆらぎを用いて Ω_0 への制限を議論しているが、Ω_0 はむしろプライマリ CMB から決めるべきものであり、SZ ゆらぎは σ_8 の決定に使うべきであろう。

従来のクラスタースケールの密度ゆらぎの決定には、(1) X 線観測による銀河団のナンバーカウント (e.g., Kitayama & Suto 1997) (2) COBE の規格化 (COBE normalization) (Bunn & White 1997) の 2 通りの手法が使われてきた。(1) はクラスタースケールの直接観測から決める方法であり、(2) は大きなスケールの観測からの外挿である。(2) は (1) に比べ、観測とモデルの精度は圧倒的に勝っている。しかし、σ_8 は h, n といった、クラスタースケールの物理には比較的関係の薄いパラメターに強く依存してしまう。一方で (1) は、モデルの精度は劣るものの、σ_8 を直接的に測定できる点で、ある意味理にかなった方法論であると言えるだろう。SZ ゆらぎによる σ_8 の決定は、(1) の方法論を踏襲している。

図 5.2 は Cole & Kaiser (1988) のフレームワークによって求めた、ポアソン的な SZ ゆらぎのパワースペクトルである。σ_8 に非常に敏感に依存し、依存性はほぼ σ_8^6 である (Makino & Suto 1993)。

図 5.2: SZ ゆらぎのポアソン成分による CMB ゆらぎのパワースペクトル。Cole & Kaiser (1988) の手法により計算した。周波数はレイリー – ジーンズ領域である。各々のモデルは、上から順に $\sigma_8 = 1.5, 1.2, 1.0, 0.54$ で、“COBE” は Bunn & White (1997) の COBE の規格化 (COBE normalization)、“KS” は Kitayama & Suto (1997) のクラスターの規格化 (cluster normalization) による σ_8 である。ただし $n = 1.0$ とした。SZ ゆらぎは $\propto \sigma_8^6$ の依存性を持っている (Makino & Suto 1993)。$\ell < 1000$ ではポアソンスペクトル $\propto \ell^2$ であるが、クラスターのコアのスケール $\ell_c \approx 2500$ より小スケールでは $e^{-\ell/\ell_c}$ である。これはクラスターがコアを持った広がったソースであることを反映しており、このスケールはもはやクラスターの中を分解しているにすぎない。ソースが点源であればどこまでも $\propto \ell^2$ である。



第6章　The Inflationary Scenario

この章では、特にことわりがなければ無摂動次のメトリックを空間的曲率が 0、すなわち平坦なロバートソン – ウォーカーメトリック (Robertson-Walker metric) を用いる。宇宙初期では空間の曲率は無視することができるので、このとりかたは妥当である。また、ラプス関数は $\bar{N} = 1$ とし、時間 t を物理的な時間として定義する。

$$\bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \bar{a}^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j. \tag{6.1}$$

1　Inflationary Expansion

ビッグバン理論の抱える深刻な問題: 地平線問題、平坦性問題は、宇宙膨張が常に減速膨張であり、過去に因果関係を持ち得た領域が小さいことに起因している。従って、加速膨張を達成できれば回避できる。

今、仮想的な完全流体の物質を考えると、$T^\mu_\nu = \mathrm{diag}(-\rho, p, p, p)$ というストレス – エネルギーテンサーをつくることができる。このもとで Appendix C のアインシュタイン方程式 (C.66) より宇宙膨張の加速度の式が得られ、

$$\frac{\ddot{\bar{a}}}{\bar{a}} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) . \tag{6.2}$$

ドットは時間 t 微分である。通常の物質や放射であれば必ず $\rho + 3p > 0$ が満たされるため、やはり減速膨張は避けられない。しかし、もし宇宙初期に $\rho + 3p < 0$ となるような状況が生まれていれば加速膨張となり、地平線問題、平坦性問題が解決されることが期待できる。

1.1　scalar field

そのような特殊な ρ, p を持つものの候補として、スカラー場 (scalar field) ϕ がある。ストレス – エネルギーテンサーは

$$T^\mu_\nu = \phi^{,\mu} \phi_{,\nu} - \delta^\mu_\nu \left(\frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi^{,\phi} + V(\phi) \right) , \tag{6.3}$$

$$\rho_\phi \equiv -T^0_0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi^{,k}\phi_{,k} + V(\phi), \tag{6.4}$$

$$j_{\phi i} \equiv T^0_i = -\dot{\phi}\phi_{,i}, \tag{6.5}$$

$$p_\phi \equiv \frac{1}{3}T^k_k = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}\phi_{,k}\phi^{,k} - V(\phi), \tag{6.6}$$

$$(\Pi_\phi)^i_j \equiv (T')^i_j \equiv T^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j T^k_k = \phi^{,i}\phi_{,j} - \frac{1}{3}\delta^i_j\phi^{,k}\phi_{,k}. \tag{6.7}$$

である。ρ_ϕ, $j_{\phi i}$, p_ϕ, Π_ϕ はそれぞれ、スカラー場の持つエネルギー密度, エネルギー流束, 圧力, 非等方ストレス (anisotropic stress) である。スカラー場の従う運動方程式は $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$ から求めることができ、

$$\Box\phi - V_{,\phi} = -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} + {}^{(3)}\nabla^2\phi - V_{,\phi} = 0. \tag{6.8}$$

$\Box \equiv {}^{(4)}\nabla^2$ であり、${}^{(3)}\nabla$, ${}^{(4)}\nabla$ はそれぞれ 3 次元、4 次元共変微分である。また、$V_{,\phi} \equiv \partial V/\partial\phi$ である。今、スカラー場が時間のみの関数でポテンシャル $V(\phi)$ は ϕ に関して十分ゆるやかに変化しているものとすれば、

$$\left|\frac{\dot{\phi}^2}{V}\right| \ll 1\ , \qquad \left|\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}\right| \ll 1 \tag{6.9}$$

のもとで $p_\phi \approx -\rho_\phi \approx -V < 0$ のように「負の圧力」をつくりだすことができる。この条件がはたして方程式系の解をなすかどうかは、すぐに確かめられる。宇宙膨張を決めるアインシュタイン方程式の $n-n$ 成分 (C.64):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} &\approx \sqrt{\frac{8\pi G}{3}V} \approx \text{constant} \\ \bar{a}(t) &\propto \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V}t\right) \end{aligned} \tag{6.10}$$

より、指数関数的な急激な加速膨張が解として得られる。これがインフレーションであり、宇宙初期にインフラトン (inflaton) と呼ばれるスカラー場の存在を仮定することによって地平線問題、平坦性問題を解決する事ができるのである。(6.9) の条件は、スローロール (slow-roll) 近似と呼ばれている。インフレーションの継続する時間は、(6.10) の指数の肩で定量化できる。

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx -\frac{8\pi}{m_{pl}^2}\int \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi. \tag{6.11}$$

最後は (6.8) のスローロール近似 : $3H\dot{\phi} \approx -V_{,\phi}$ を用いた。$m_{pl} = G^{-1/2}$ はプランク質量である。平坦性問題、地平線問題を解決するためには、$N > 70$ が要請される。

1981 年に佐藤 (Sato 1981)、Guth (Guth 1981) によってインフレーション理論が提唱されたが、初めに解決されたのはモノポール (monopole) 問題であった。大統一理論 (GUT) のエネルギースケール ($\sim 10^{14-16}$ GeV) で生じる相転移は、必ずモノポールを生成する。生成率は GUT 時のホライズンに 1 個程度であり、その質量は $\sim 10^{16}$ GeV 程度である。ここで生成されたモノポールのエネルギー密度はその後宇宙膨張とともに薄められてゆくが、現在まで膨張してもまだ宇宙の臨界密度 (critical density) より 10^{15} 倍も大きく、現在の宇宙ができる前に宇宙がつぶれてしまうことになる。この困難を回避するため、同じく GUT スケールで相転移を引き起こすヒッグス場 (Higgs field) というスカラー場を利用してインフレーションを起こさせ、急激に宇宙を大きくして密度を薄めようとしたわけである。

Guth はインフレーション理論がモノポール問題に加え、平坦性問題、地平線問題を一挙に解決することを示して一躍脚光を浴びたわけであるが、GUT スケールでヒッグス場によって起こすインフレーションには困難も多く、現実的なインフレーションとしては棄却されている。代わって、スカラー場の素性は不明であるが、さらに高エネルギーのプランクスケール ($\sim 10^{19}$ GeV) で起こすインフレーションや、逆に電弱相互作用の統一スケールであるワインバーグ – サラム (Weinberg-Salam) 相転移 (~ 200 GeV) で起こすインフレーション等、様々な代替案が提案されているもののまだ決着には至っていない状況である。

2 Quantum Origin of Perturbations

インフレーション理論の画期的なところは地平線問題, 平坦性問題を解くだけではなく、構造形成の種となる密度ゆらぎ (スカラーモード)、あるいは宇宙背景重力波となって宇宙空間を満たしている重力波ゆらぎ (テンサーモード) を生成するメカニズムを持っていることである。インフラトンは量子場であるから常に量子的にゆらいでおり、そのゆらぎは時空に対しエネルギー密度のゆらぎとなる。インフレーションが起こり、ゆらぎの波長は宇宙膨張とともに $\propto \bar{a} \propto e^{Ht}$ で伸ばされるが、インフレーション中ハッブルホライズンは一定であるためすぐハッブルホライズンスケールまで伸ばされる。ハッブルホライズン程度まで伸ばされるともはや量子的にゆらぐことはできなくなり、ゆらぎは「古典化」して残り、構造形成の種となるのである。ただし、古典化の起こるスケール、及びそのメカニズムは今のところはっきり分かっているわけではないが、だいたいはホライズンを超えると古典的にふるまうと考えられている。

一度ホライズンを出たゆらぎの波長は依然として $\propto \bar{a}$ で波長が伸びるものの、ハッブル

ホライズンはインフレーション終了後に $\propto \bar{a}^2$ (放射優勢宇宙), $\propto \bar{a}^{3/2}$ (物質優勢宇宙) で膨張するため、ゆらぎは再びハッブルホライズンの中に入ってくる。この時からゆらぎはニュートン的な重力不安定性によって成長を始めることができ、現在観測されるような構造をつくった、というのである。

2.1 density perturbation (scalar mode)

スカラー場のエネルギー密度のゆらぎは $\delta\rho_\phi = V_{,\phi}\delta\phi$ とあらわせる。$\delta\phi$ が量子場のゆらぎである。ところが前述の通り、観測される「古典ゆらぎ」は、ホライズンを超えるスケールで意味を持つ。Appendix D, E で詳しく述べるが、このようなスーパーホライズンスケールでは一般相対論によってゆらぎの発展を記述せねばならない。一般相対論は「ゲージ変換 (gauge transformation)」と呼ばれる微小座標変換に対して不変であり、任意のゲージを用いることが可能なため、物理的なゆらぎのモードと、座標変換に由来する「にせの」ゆらぎのモード (ゲージモード) との区別が困難である。そこで、ゲージ変換に対して不変なゆらぎを定義するのが都合が良い。

$$\zeta \equiv \frac{\epsilon_\zeta}{3(1+w)} = \mathcal{R} + \frac{\delta\rho}{3(\bar{\rho}+\bar{p})}. \tag{6.12}$$

ϵ_ζ はゲージ不変な密度ゆらぎ、$\mathcal{R}$ は 3 次元スカラー曲率ゆらぎのポテンシャルである。$w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$ は状態方程式をあらわすパラメターであり、スカラー場、放射、ダスト粒子それぞれに対して $w = -1,\ 1/3,\ 0$ である。ζ はインフレーション時に生成されるゆらぎの解析に広く使われている (e.g., Bardeen, Steinhardt & Turner 1983)。

chapter 3 で導いたように、スーパーホライズンスケールで ζ は (3.7):

$$\zeta = \Phi_H - \frac{\bar{a}\bar{H}}{k} V_s^{(0)} \tag{6.13}$$

と書ける。一方、運動方程式 (3.3), (3.9) より

$$\dot{\zeta} = -\frac{k}{3} V_s^{(0)}, \tag{6.14}$$

$$\dot{V}_s^{(0)} + \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} V_s^{(0)} = k\Phi_A \approx -k\Phi_H. \tag{6.15}$$

$V_s^{(0)}$, Φ_A, Φ_H は、それぞれゲージ不変な速度, 加速度, 曲率ゆらぎのポテンシャルである。ただし非等方ストレスがない ($\pi = 0$) とした* 。今は複数の流体が混在する状況を考えな

* π は主に光子やニュートリノ による寄与であり、多くの場合無視できる。

いため、エントロピーゆらぎ Γ も無視した。以上より、ζ の運動方程式:

$$\ddot{\zeta} + 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\dot{\zeta} - \frac{k^2}{3\bar{a}^2}\zeta \approx \ddot{\zeta} + 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\dot{\zeta} = 0 \tag{6.16}$$

を得る。この式はスーパーホライズンスケールでのみ意味を持ち、解は単純に $\zeta = \text{constant}$ である。従って、ζ は物質の状態方程式によらずにスーパーホライズンスケールで保存する。この性質により、ζ は頻繁に使われるようになったのである。

インフラトンのゆらぎを求めれば、$\bar{p}_\phi + \bar{\rho}_\phi = \dot{\bar{\phi}}^2$, $\delta\rho_\phi = V_{,\phi}(\delta\phi) \approx -3\bar{H}\dot{\bar{\phi}}(\delta\phi)$ より

$$\zeta_\phi = \mathcal{R} - \frac{\bar{H}}{\dot{\bar{\phi}}}\delta\phi. \tag{6.17}$$

このゆらぎの振幅を求めるには、

(a) *Uniform curvature gauge*: $\mathcal{R} = 0$
スカラー場の運動方程式 (6.8) を線形化し、量子化 (e.g., Stewart & Lyth 1993)

(b) *Uniform scalar field gauge*: $\delta\phi = 0$
$\mathcal{R}$ に関するアインシュタイン方程式を量子化 (e.g., Mukhanov et al. 1992)

という 2 種類のアプローチがある。両者は同じ結果を与えるが、ここでは (a) の手法でゆらぎを計算する。

2.2 gravitational wave (tensor mode)

重力波のモードであるテンサー摂動 $H_T^{(2)}$ は単独でゲージ不変であり、かつ運動方程式 (E.41):

$$\ddot{H}_T^{(2)} + 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\dot{H}_T^{(2)} + \frac{k^2}{\bar{a}^2}H_T^{(2)} = 0 \tag{6.18}$$

はすでに波動方程式であるので、簡単に量子化を行なうことができる。

2.3 quantization

今、曲がった時空における量子化を実行しようとしているわけであるが、我々は平坦な時空における量子化の手続きを良く知っている。従って、曲がった時空においても同様の手法で量子化を行なう。この節では $\bar{N} = \bar{a}$ と選ぶ。平坦な時空のアナロジーを用いよう

とするならば、共形的に平坦 (conformally flat) なメトリックを用いねばうまくいかないためである。「共形的に平坦」であるとは、メトリックが $g_{\mu\nu} = \Omega\eta_{\mu\nu}$ のように、ミンコフスキーメトリックに共形因子 (conformal factor) をかけた形で書けるという意味であり、今の場合は $\Omega = \bar{a}^2$ である。

量子化の手続きのため、線形化された場の方程式はいかなる場合にも以下のような波動方程式に帰着させねばならない。

$$(R\Delta)'' + \left(k^2 - \frac{R''}{R}\right)(R\Delta) = 0. \tag{6.19}$$

今、ダッシュは共形時間 $d\tau = dt/\bar{a}$ に関する微分である。dt の微分であるドットと混同しないように気をつける。$\Delta = \Delta(\boldsymbol{k}, \tau)$ は量子場のモード関数であり、実空間の量子場 $\widehat{\Delta}(\boldsymbol{x}, \tau)$ を生成/消滅演算子で展開した時の展開係数である。

$$\widehat{\Delta}(\boldsymbol{x}, \tau) = \int d^3\boldsymbol{k} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}} \Delta(\boldsymbol{k}, \tau) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \Delta^*(\boldsymbol{k}, \tau) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]. \tag{6.20}$$

$\hat{a}_{\boldsymbol{k}}$ は消滅演算子、$\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ は生成演算子で、交換関係

$$\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}\right] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}) \tag{6.21}$$

を満たす。ゆらぎのスペクトル特性は、量子場の 2 点関数のフーリエ変換である「パワースペクトル (power spectrum)」 $P_\Delta(k)$ で定量化することができる。

$$\left\langle 0 \left| \widehat{\Delta}^\dagger(\boldsymbol{x}, \tau) \widehat{\Delta}(\boldsymbol{x}, \tau) \right| 0 \right\rangle = \int \frac{dk}{k} \left[4\pi k^3 \left|\Delta(k, \tau)\right|^2\right] \equiv \int \frac{dk}{k} P_\Delta(k). \tag{6.22}$$

すなわち、パワースペクトルとは $\ln k$ あたりのゆらぎのパワーである。

$R = \bar{a}\sqrt{Q}$ と書けば、波動方程式の「ポテンシャル」R''/R は

$$\frac{R''}{R} = a^2 H^2 \left[2 + \frac{\dot{H}}{H^2} + 3\frac{\dot{Q}}{2HQ} + \frac{\ddot{Q}}{2H^2 Q} - \left(\frac{\dot{Q}}{2HQ}\right)^2\right]. \tag{6.23}$$

(6.23) の中にはスローロール近似に関する微小量が含まれている。これらの微小量を、「スローロールパラメター (slow-roll parameter)」として以下のように定義する† (Stewart & Lyth 1993)。

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \qquad \alpha \equiv \frac{\dot{Q}}{2HQ}. \tag{6.24}$$

† 密度ゆらぎである ϵ_ζ と、スローロールパラメターの ϵ を混同しない。

これらを用いて (6.23) を書き直せば、

$$\frac{R''}{R} = a^2H^2\left(2-\epsilon+3\alpha-\epsilon\alpha+\alpha^2+\frac{1}{H}\dot{\alpha}\right), \tag{6.25}$$

また、共形時間 τ もスローロールパラメターを用いて

$$\tau = \int\frac{dt}{a} = \int\frac{da}{a^2H} = -\frac{1}{aH}+\int\frac{da}{a^2}\frac{\epsilon}{H} \approx -\frac{1}{aH}\frac{1}{1-\epsilon}. \tag{6.26}$$

$\dot{\epsilon}$ はスローロールの高次であるので無視し、ϵ を積分の外に出した。以上より、R''/R は非常に簡単化されて

$$\frac{R''}{R} = \frac{1}{\tau^2}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right), \tag{6.27}$$

$$\nu = \frac{1}{2}+\frac{1+\alpha}{1-\epsilon} \approx \frac{3}{2}+\epsilon+\alpha. \tag{6.28}$$

$\dot{\alpha}$ も高次であるので無視した。

(6.27) を用いれば、(6.19) はベッセルの微分方程式:

$$(R\Delta)'' + \left(k^2-\frac{\nu^2-1/4}{\tau^2}\right)(R\Delta) = 0 \tag{6.29}$$

に帰着し、ハンケル関数 H_ν よって解析解が与えられる。従って、モード関数は

$$R\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2(2\pi)^{3/2}}\exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]\sqrt{-\tau}H_\nu^{(1)}(-k\tau). \tag{6.30}$$

ハッブルホライズンよりも十分小さいスケール $k\tau \gg 1$ では $\Delta \propto e^{-ik\tau}$ のように平坦な時空でのモード関数と一致するが、今興味のあるスケールは逆にホライズンよりも大きなゆらぎであるので、$k\tau \ll 1$ に対するハンケル関数の公式

$$H_\nu(k\tau) \to -i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{1}{2}k\tau\right)^{-\nu} \tag{6.31}$$

を用いて

$$R\Delta \to \exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\right]\frac{2^{\nu-3/2}}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}(-k\tau)^{1/2-\nu}. \tag{6.32}$$

この式にあらわれた k 依存性: $k^{1/2-\nu}$ は、インフレーションで生成されたゆらぎのパワースペクトルのスペクトル指数 (spectral index) である。実際、Δ のパワースペクトル (6.22) を求めれば

$$\sqrt{P_\Delta(k)} = \left(\frac{\bar{a}\bar{H}}{2\pi R}\right)2^{\nu-3/2}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}(1-\epsilon)^{\nu-1/2}\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{3/2-\nu}. \tag{6.33}$$

$k\tau$ は (6.26) を用いて ϵ に直した。(6.28) より、スローロール近似の 0 次では $\nu = 3/2$ であり、パワースペクトルは k 依存性を持たない、すなわちスケール不変 (scale invariant) なパワースペクトルとなっていることが分かる。

$$\sqrt{P_\Delta(k)}\Big|_{\nu=3/2} = \frac{\bar{a}\bar{H}}{2\pi R} = \frac{\bar{H}}{2\pi\sqrt{Q}}. \tag{6.34}$$

これは特に ハリソン – ゼルドヴィッチスペクトルと呼ばれている (Harrison 1970; Zel'dovich 1972)。スローロールの 0 次ではハッブルホライズンは厳密に一定であり、時空は厳密に指数関数で膨張している。従って、系には変動する時間、空間スケールが存在せず、ゆらぎのパワースペクトルもあらゆるスケールで一定となるのである。歴史的には、無限遠到達力である重力が特徴的なスケールを持たないことより、密度ゆらぎ δ_k が k のべき乗であると「仮定」し、$|\delta_k|^2 \propto k^n$ とパラメトライズすることによってモデル化されてきた。n はフリーパラメターであったが、密度ゆらぎによって生成されるポテンシャルのパワースペクトルがポアソン方程式 (E.13) によって $k^3 |\Phi_H|^2 \propto k^3 |\delta_k|^2 / k^4 \propto k^{n-1}$ であるので、$n = 1$ がスケール不変なスペクトルとして認識されていたのである。従って、インフレーションがまさに $n = 1$ に近いべき乗のゆらぎを予言したことは歴史的にも非常に意味深く、本来パラメトライズする他はなかった初期条件を与えることに成功したことは、画期的である。

$R\Delta$ としてスカラーモード (密度ゆらぎ)、あるいはテンサーモード (重力波) をとることにより、それぞれのスペクトル指数が計算できる。

$$n_S \equiv 1 + \frac{d\ln P_S}{d\ln k} = 4 - 2\nu_S \simeq 1 - 2\epsilon - 2\alpha_S, \tag{6.35}$$

$$n_T \equiv \frac{d\ln P_T}{d\ln k} = 3 - 2\nu_T \simeq -2\epsilon - 2\alpha_T. \tag{6.36}$$

ハリソン – ゼルドヴィッチスペクトルでは $n_S = 1$, $n_T = 0$ である。Bunn & White (1997) は COBE の観測結果から $n = 1.177 \pm 0.279$ を得ており、スローロール近似の範囲内でインフレーションの予言と一致している。

(6.35), (6.36) より、consistency relation と呼ばれる関係式[‡] :

$$n_T = n_S - 1 + 2(\alpha_S - \alpha_T). \tag{6.37}$$

[‡] consistency relation とは、インフレーションで生成されるスカラーモードとテンサーモードのゆらぎの間に成り立つ関係式のことである (e.g., Crittenden et al. 1993; Bond et al. 1994)。多くの文献では最も単純な関係式として $n_T = n_S - 1$ を使う傾向があるが、これは一般的には正しくなく $\alpha_S = \alpha_T$ の時に限り成立する。

を導くことができる。スローロール近似 (6.9) を基にするインフレーション理論では、モデルに依らずこの関係式が成り立っている。従って CMB の偏光の観測によってスカラーモードとテンサーモードを分離し、(6.37) を確かめることができれば、インフレーション理論の証拠をつかんだと言えるだろう。

2.4 power spectrum calculation & CMB

(6.33) はモードに依らず成り立つので、問題とする場の方程式に関して Q, Δ を求めれば良い。

- スカラーモード
  (6.8) を線形化すると、

$$Q_S = \left(\frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{H}}\right)^2, \qquad R = \frac{\bar{a}\dot{\phi}}{\bar{H}}, \qquad \Delta_S = \zeta_\phi|_{\mathcal{R}=0} \tag{6.38}$$

  とした波動方程式 (6.19) と一致することが確かめられる。パワースペクトルは、ハリソン – ゼルドヴィッチで

$$\sqrt{P_S} \equiv \sqrt{P_\zeta(k)}\Big|_{\nu=3/2} = \frac{\bar{H}^2}{2\pi\left|\dot{\bar{\phi}}\right|} = \frac{\bar{H}}{\sqrt{\pi}m_{pl}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \tag{6.39}$$

  $\dot{\phi}$ は、アインシュタイン方程式 $H^2 = 8\pi G V(\phi)/3$ を時間微分することで ϵ に書き換えられる。

- テンサーモード
  (E.41) を共形時間 ($\bar{N} = \bar{a}$) について書けば、

$$Q_T = \frac{1}{16\pi G}, \qquad R = \frac{m_{pl}}{4\sqrt{\pi}}\bar{a}, \qquad \Delta_T = H_T^{(2)} \tag{6.40}$$

  とした波動方程式 (6.19) と一致する。Q は重力波ゆらぎの規格化定数である。パワースペクトルは

$$\sqrt{P_{H_T^{(2)}}(k)}\Big|_{\nu=3/2} = \frac{2\bar{H}}{\sqrt{\pi}m_{pl}}. \tag{6.41}$$

  重力波は偏光のモードが 2 種類あるため、モードについて和をとれば

$$\sqrt{P_T} \equiv \frac{4\bar{H}}{\sqrt{\pi}m_{pl}}. \tag{6.42}$$

- consistency relation

  (6.39), (6.42) より、テンサーモードとスカラーモードのパワー比は

  $$\frac{P_T}{P_S} = 16\epsilon. \tag{6.43}$$

  これも consistency relation であり、インフレーション理論ではほぼ普遍的に成り立っている関係式である。

  重要な事は、(6.43) が観測可能なことである。(3.135) で定義される、CMB 温度異方性のパワースペクトル C_ℓ の四重極 ($\ell = 2$) は、ゆらぎのパワースペクトルと「ザクス – ヴォルフェ効果」(Sachs & Wolfe 1967) を通じて直接結びついている (chapter 3; (3.40))。

  $$C_2^S = \left\langle \left| \frac{1}{3}\Phi_H \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{25}P_S, \tag{6.44}$$

  $$C_2^T \simeq 0.0363 P_T. \tag{6.45}$$

  C_2^T は White (1992) の数値解を用いた。従って

  $$r \equiv \frac{C_2^T}{C_2^S} \simeq 0.9\frac{P_T}{P_S} \tag{6.46}$$

  を導け、(6.37) と共にインフレーション理論の直接的な検証手段となる。現在のところ、インフレーション理論を直接検証できる方法は CMB を用いた方法しか存在しない。

3 Classicalization

前節では量子ゆらぎの古典化のプロセスについて何も言及することなしに議論を進めてきたが、(6.32) で $k\tau \ll 1$ の極限をとった際、暗に古典化を仮定していたのである。この節では、古典化のプロセスを従来とは違った角度から定式化する。簡単化のため、質量を持たないスカラー場 φ_k の古典化を追う。すなわち、(6.19) において

$$R = \bar{a}, \qquad \Delta = \varphi_k. \tag{6.47}$$

宇宙論的な状況では、宇宙のエネルギー密度を支配するソースが変わると時空が変化し、膨張則が変わる。

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau} \qquad \text{vacuum} \qquad \tau \in (-\infty, -\tau_2), \tag{6.48}$$

$$= \frac{2\tau_1\tau}{\tau_0^2} \qquad \text{radiation} \qquad \tau \in (\tau_2, \frac{\tau_1}{2}), \tag{6.49}$$

$$= \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \qquad \text{matter} \qquad \tau \in (\tau_1, \tau_0). \tag{6.50}$$

ただし、インフレーションはスローロールの 0 次の解を使った。τ が不連続に定義してあるが、a, a' は連続である。τ に関しても連続に定義することは可能であるが、結果は同じである (Grishchuk & Sidorov 1990; Allen & Koranda 1994)。このような膨張則の変化は量子場にとって真空が変化することに相当するため、量子場 $\widehat{\varphi}$ の展開は

$$\widehat{\varphi}(\boldsymbol{x}, \tau) = \int d^3\boldsymbol{k} \left[\hat{a}_{\rm phase}(\boldsymbol{k}) \varphi_k(\boldsymbol{k}, \tau) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}^\dagger_{\rm phase}(\boldsymbol{k}) \varphi^*_k(\boldsymbol{k}, \tau) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right]. \tag{6.51}$$

$a^\dagger_{\rm phase}$, $a_{\rm phase}$ は、各フェイズの真空に固有値を持つ生成/消滅演算子である。

各フェイズでの (6.19) の解は、$\nu = 3/2, 1/2$ のハンケル関数を用いて

$$\varphi_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2} a(\tau)} e^{-ik\tau} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) \qquad \text{vacuum, matter,} \tag{6.52}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2} a(\tau)} e^{-ik\tau} \qquad \text{radiation.} \tag{6.53}$$

各フェイズの生成/消滅演算子はボゴリューボフ (Bogoliubov) 変換 (Birrel & Davies 1982) によって関係づけられ、

$$\hat{a}_{RD}(\boldsymbol{k}) = c_1(k) \hat{a}_{VD}(\boldsymbol{k}) + c_2^*(k) \hat{a}^\dagger_{VD}(-\boldsymbol{k}), \tag{6.54}$$

$$\hat{a}_{MD}(\boldsymbol{k}) = c_3(k) \hat{a}_{VD}(\boldsymbol{k}) + c_4^*(k) \hat{a}^\dagger_{VD}(-\boldsymbol{k}). \tag{6.55}$$

VD はインフレーション、RD, MD はそれぞれ放射優勢、物質優勢のフェイズを表す。c_i は、ボゴリューボフ係数と呼ばれており、モード関数の規格直交性関係より

$$|c_1|^2 - |c_2|^2 = 1, \tag{6.56}$$

$$|c_3|^2 - |c_4|^2 = 1 \tag{6.57}$$

が満たされていなければならない。

$VD \to RD$, $RD \to MD$ での $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\varphi}'$ の連続性より、

$$\varphi_{k,VD}(-\tau_2) = c_1 \varphi_{k,RD}(\tau_2) + c_2 \varphi^*_{k,RD}(\tau_2), \tag{6.58}$$

$$\varphi'_{k,VD}(-\tau_2) = c_1 \varphi'_{k,RD}(\tau_2) + c_2 \varphi^{*\prime}_{k,RD}(\tau_2), \tag{6.59}$$

$$c_1\varphi_{k,RD}(\frac{\tau_1}{2}) + c_2\varphi^*_{k,RD}(\frac{\tau_1}{2}) = c_3\varphi_{k,MD}(\tau_1) + c_4\varphi^*_{k,MD}(\tau_1), \tag{6.60}$$

$$c_1\varphi'_{k,RD}(\frac{\tau_1}{2}) + c_2\varphi^{*\prime}_{k,RD}(\frac{\tau_1}{2}) = c_3\varphi'_{k,MD}(\tau_1) + c_4\varphi^{*\prime}_{k,MD}(\tau_1), \tag{6.61}$$

従って、ボゴリューボフ係数は

$$c_1 = -\frac{H\tau_1}{(k\tau_0)^2}e^{2ik\tau_2}\left[1 - 2ik\tau_2 - 2(k\tau_2)^2\right], \tag{6.62}$$

$$c_2 = \frac{H\tau_1}{(k\tau_0)^2}, \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{H/k}{2(k\tau_1)(k\tau_0)^2} \\ &\quad\times\left[\left\{1 - 2ik\tau_1 - 2(k\tau_1)^2\right\}e^{ik\tau_1/2}\left\{1 - 2ik\tau_2 - 2(k\tau_2)^2\right\}e^{2ik\tau_2} - e^{3ik\tau_1/2}\right], \end{aligned} \tag{6.64}$$

$$\begin{aligned} c_4 &= -\frac{H/k}{2(k\tau_1)(k\tau_0)^2} \\ &\quad\times\left[\left\{1 + 2ik\tau_1 - 2(k\tau_1)^2\right\}e^{-ik\tau_1/2} - e^{-3ik\tau_1/2}\left\{1 - 2ik\tau_2 - 2(k\tau_2)^2\right\}e^{2ik\tau_2}\right] \end{aligned} \tag{6.65}$$

以上の解は、(6.56) を満たすことが確かめられる。ボゴリューボフ変換は、時間発展する真空における量子場をハイゼンベルグ描像で追うことに相当し、系の時間発展による量子場の発展はボゴリューボフ係数によって記述されるのである。今、c_1, c_2 に着目し、

$$D_k \equiv \frac{H\tau_1}{(k\tau_0)^2} = \frac{1}{2(k\tau_2)^2} \tag{6.66}$$

を定義する。最後の等号は、$a(\tau)$ の τ_2 での接続条件から導ける。D_k は、"Divergence" の意味でつけた。インフレーション終了時に十分スーパーホライズン $(k\tau_2 \ll 1)$ であるゆらぎに対して、$D_k \gg 1$ となるからである。すると、量子場はボゴリューボフ変換によって

$$\widehat{\varphi}(\boldsymbol{x},\tau) = \widehat{\varphi}_{CL}(\boldsymbol{x},\tau) + \widehat{\varphi}_{QM}(\boldsymbol{x},\tau), \tag{6.67}$$

$$\widehat{\varphi}_{CL}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \int d^3\boldsymbol{k} D_k\left(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}^*_k\right)\hat{c}_{VD}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{6.68}$$

$$\widehat{\varphi}_{QM}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \int d^3\boldsymbol{k} D_k\left[(\gamma_k\tilde{\varphi}_k)\,\hat{\tilde{a}}_{VD}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + (\gamma_k\tilde{\varphi}_k)^*\,\hat{\tilde{a}}^\dagger_{VD}(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right], \tag{6.69}$$

$$\hat{c}(\boldsymbol{k}) \equiv \hat{\tilde{a}}^\dagger(-\boldsymbol{k}) - \hat{\tilde{a}}(\boldsymbol{k}), \tag{6.70}$$

$$\hat{\tilde{a}}(\boldsymbol{k}) \equiv \hat{a}(\boldsymbol{k})e^{ik\tau_2}, \tag{6.71}$$

$$\tilde{\varphi}_k \equiv \varphi_k e^{ik\tau_2}, \tag{6.72}$$

$$\gamma_k \equiv 2ik\tau_2\left(1 - ik\tau_2\right) \tag{6.73}$$

のように分けられる。注目すべき点は、$\hat{c}(\boldsymbol{k})$ が交換することである。

$$\begin{aligned}
& \left[\hat{c}(\boldsymbol{k}), \hat{c}^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\right] \\
= & \left[\hat{\tilde{a}}^{\dagger}(-\boldsymbol{k}), \hat{\tilde{a}}(-\boldsymbol{k}')\right] - \left[\hat{\tilde{a}}^{\dagger}(-\boldsymbol{k}), \hat{\tilde{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\right] - \left[\hat{\tilde{a}}(\boldsymbol{k}), \hat{\tilde{a}}(-\boldsymbol{k}')\right] + \left[\hat{\tilde{a}}(\boldsymbol{k}), \hat{\tilde{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\right] \\
= & -\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right) + \delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right) \\
= & 0. \qquad (6.74)
\end{aligned}$$

従って、$\widehat{\varphi}_{CL}$ は古典場であるとみなす事ができ、(6.68) は c 数 $\widehat{\varphi}_{CL}$ のフーリエ変換となっている。オーダーパラメター $\gamma_k \propto k\tau_2$ に着目すれば、スーパーホライズンモード $(k\tau_2 \ll 1)$ は古典的にふるまい、逆にサブホライズンモード $(k\tau_2 \gg 1)$ は量子場としてふるまうように見える。これはボゴリューボフ係数の規格化条件 $|c_1|^2 - |c_2|^2 = 1$ でも確かめることができる[§] 。

$$|c_1|^2 = 1 + D_k^2, \qquad |c_2|^2 = D_k^2. \qquad (6.75)$$

従って、スーパーホライズンスケールでは $|c_1|^2 \approx |c_2|^2 = D_k^2 \gg 1$ となり、場が交換して古典化が達成されたと解釈できる。逆にホライズンの十分内側では $|c_1|^2 \approx 1$, $|c_2|^2 \approx 0$ より、バンチ – デーヴィス 真空 (Bunch - Davies vacuum; Bunch & Davies 1978) の量子場となる。

今節で議論した古典化のプロセスは、古典化が起こる境界がハッブルホライズンスケールであることをはっきりと示している。しかし、どのような物理プロセスが古典化を引き起こしているのかが分からないのが欠点である。この点を明らかにするのが今後の課題となる。

4 Chaotic Inflationary Scenario

これまでは、スカラー場が 1 種類である以外には特に仮定をせず、ポテンシャル $V(\phi)$ の形も指定せずに一般論を行なってきた。インフレーションモデルは数多く存在するものの、本質的な特徴は前節までででほぼ尽きている。どのモデルもこれといって決め手に欠けるが、そんな中でも Linde (1983) によって提唱された「カオティックインフレーションシナリオ (chaotic inflationary scenario)」は、モデルの単純さと自然さから言って魅力的である。

カオティックインフレーションは、ポテンシャルとして $V(\phi) = m^2\phi^2/2 + \lambda\phi^4/4$ を採用する。前者はインフラトンの質量項 (mass term), 後者は自己相互作用 (self interaction)

[§] この条件は量子場の交換関係とも等価である。

で、λ は自己相互作用の強さをあらわすパラメターである。モデルをさらに簡単化するため、前者のみの場合と後者のみの場合を分けて考える。

4.1 mass term: $V(\phi) = m\phi^2/2$

(6.39) にスローロールの運動方程式 $-3H\dot{\phi} \approx V_{,\phi} = m\phi$, アインシュタイン方程式 $H^2 = 8\pi G V(\phi)/3 = 4\pi G m\phi^2/3$ を代入すれば

$$\sqrt{P_S^{(m)}} = \sqrt{\frac{16\pi}{3}} \left(\frac{m}{m_{pl}}\right) \left(\frac{\phi}{m_{pl}}\right)^2 \approx \sqrt{\frac{4}{3\pi}} N_m \left(\frac{m}{m_{pl}}\right). \tag{6.76}$$

ここで、(6.11) より導ける $N_m \approx 2\pi(\phi/m_{pl})^2$ を用いた。COBE の観測結果 (Bennett et al. 1996) より $\sqrt{P_S} < 5 \times 10^{-5}$ であるから、$N_m > 70$ より、$(m/m_{pl}) < 10^{-6}$。COBE はゆらぎの絶対値を測定したのだが、観測された量は $C_2^S + C_2^T$ である。偏光のデータがない限り両者を区別することは不可能であり、従って上限値とした。

4.2 self interaction: $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$

同様に、$N_\lambda \approx \pi(\phi/m_{pl})^2$,

$$\sqrt{P_S^{(\lambda)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}\lambda} \left(\frac{\phi}{m_{pl}}\right)^3 \approx \sqrt{\frac{2}{3\pi^2}\lambda} N_\lambda^{3/2} < 5 \times 10^{-5}. \tag{6.77}$$

従って、$\lambda < 10^{-13}$。

このように、観測されている CMB の小さな温度ゆらぎを説明しようとするとパラメターに不自然な微調整 (fine-tuning) が必要になってしまう。スカラー場の自己相互作用の強さ λ はオーダー 1 程度であるのが自然であり、10^{-13} もの微調整が必要ということは、このモデルは棄却されねばならないことを示している。また、カオティックインフレーションのが起こるのはプランク時間の頃であるので、インフラトンの質量がプランク質量と比べて 10^{-6} も小さいというのも不自然である。従って、単純なカオティックインフレーションモデルでは観測をうまく説明できない。カオティックインフレーションはゆきづまったかに見えたが、次章 (chapter 7) において議論するように、その後 Fakir & Unruh (1990a; 1990b), Makino & Sasaki (1991) により、スカラー場と時空との間に比較的強い「非最小結合 (nonminimal coupling)」を許せば、カオティックインフレーションの枠組みの中でパラメターの微調整の問題を回避できることが示された。

第7章　Nonminimal Coupling Theory

本章に限り、メトリックの符号を逆にとる。すなわち、

$$\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \bar{a}^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \tag{7.1}$$

理由は、無摂動次のアインシュタイン方程式を書き下す際に時間成分の添字を頻繁に気にする必要があるため、符号の煩わしさを軽減するためである。

これまで議論してきた枠組みは、最小結合 (minimal coupling) 理論と呼ばれるものである。その意味を明らかにするため、前節までの理論を導く作用積分 (action) を書けば* 、

$$A = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + V(\phi)\right]. \tag{7.2}$$

$\kappa^2 \equiv 8\pi G$ である† 。つまり、スカラー場と時空は $\sqrt{-g}$ で結合しているのみであり、これを最小結合と呼んでいるのである。しかし、理論のくりこみ可能性や、より高次元の理論 (カルーザ – クライン理論や超ひも理論など) の帰結として、スカラー場と時空との間には非最小結合 (nonminimal coupling) が必ず現われることが分かってきている。結合の仕方はいろいろあるが、もっとも単純なものとしてここでは $\xi\phi^2R$ 型の結合を考える。作用積分は、

$$A = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\xi\phi^2R - \frac{1}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + V(\phi)\right]. \tag{7.3}$$

ξ は非最小結合の強さをあらわすパラメターであり、特に $\xi = -1/6$ のとき、共形結合 (conformal coupling) と呼ばれている。この作用を $g_{\mu\nu}$ について変分することによってアインシュタイン方程式が、ϕ について変分することでスカラー場の運動方程式が得られ

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\kappa^2} + \xi\phi^2\right)G_{\mu\nu} &= (1+2\xi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \left(2\xi + \frac{1}{2}\right)g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} \\ &\quad -2\xi\phi\left(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)\phi + g_{\mu\nu}V(\phi), \qquad (7.4)\\ \Box\phi + \xi R\phi + V_{,\phi} &= 0. \qquad (7.5)\end{aligned}$$

* R はリッチテンサーであり、前節までの R と混同しないようにする。

† 曲率パラメター κ(A.3) と混同しない。

非最小結合により、場の方程式中でもスカラー場と時空が複雑にカップルしていることが分かる。

1 Original (Jordan) Frame Analysis

1.1 background equations

時空のふるまいを調べるため、アインシュタイン方程式の各成分を書き下す。今節での議論は全て無摂動次であるので、表記の簡単化のため無摂動をあらわすバーを省略することにする。また、スカラー場は無摂動次で空間的に一様であるとする。

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3(1+\kappa^2\xi\phi^2)}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - 6\xi H\phi\dot{\phi}\right], \tag{7.6}$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2\xi\phi^2}\left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \xi H\phi\dot{\phi} - \xi\dot{\phi}^2 - \xi\phi\ddot{\phi}\right]. \tag{7.7}$$

スカラー場の運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - 6\xi\left(\dot{H} + 2H^2\right)\phi + V_{,\phi} = 0. \tag{7.8}$$

(7.6), (7.7) より

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} &+ \left[\frac{\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\right]\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} \\ &= \frac{1}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\left[4\kappa^2\xi\phi V(\phi) - (1+\kappa^2\xi\phi^2)V_{,\phi}\right].\end{aligned} \tag{7.9}$$

最小結合の時と同様、スローロール近似 (6.9) を適用する。

$$\begin{aligned}H^2 &\approx \frac{\kappa^2}{3(1+\kappa^2\xi\phi^2)} \\ &\quad\left[V(\phi) - \frac{2\xi\phi}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\left\{4\kappa^2\xi\phi V(\phi) - (1+\kappa^2\xi\phi^2)V_{,\phi}\right\}\right], \qquad (7.10)\\ 3H\dot{\phi} &\approx \frac{1}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\left[4\kappa^2\xi\phi V(\phi) - (1+\kappa^2\xi\phi^2)V_{,\phi}\right]. \qquad (7.11)\end{aligned}$$

最小結合理論とは異なり方程式系は非常に複雑であるが、非最小結合の枠組みにおいてもインフレーションを起こすことは可能である。Futamase & Maeda (1989) により、非最小結合理論によるカオティックインフレーションの可能性が調べられている:

- $\xi < 0$ (Futamase & Maeda では $\xi > 0$)
  - $m^2\phi^2/2$: $|\xi| \lesssim 10^{-3}$
  - $\lambda\phi^4/4$: $|\xi| \lesssim 10^{-3}$
- $\xi > 0$ (Futamase & Maeda では $\xi < 0$)
  - $m^2\phi^2/2$: $\xi \lesssim 10^{-3}$
  - $\lambda\phi^4/4$: 全ての ξ が許される

$\xi > 0$, $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$ が、唯一特殊なケースとして全ての ξ を許しており、この解のふるまいは簡単に評価することができる。

1.2 chaotic inflation: $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$

(7.10), (7.11) より、$V(\phi) = \lambda\phi^4/4$ ポテンシャルの場合には

$$H^2 \approx \frac{\kappa^2\lambda\phi^4}{12(1+\kappa^2\xi\phi^2)}\left[1+\frac{8\xi}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\right], \tag{7.12}$$

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{\lambda\phi^3}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}. \tag{7.13}$$

方程式系を簡単化するため、$\psi \equiv \kappa^2\xi\phi^2$ という量を定義する。この量は方程式中に頻繁にあらわれる無次元量であり、さらにインフレーションの解の中で本質的な役割を果たす。今、$\psi \gg 1$ という条件のもとでインフレーションの解を求める (Fakir & Unruh 1990a)。

$$H^2 \approx \frac{\lambda\psi}{12\kappa^2\xi^2}, \qquad \frac{\dot{\psi}}{H} \approx -\frac{8\xi}{1+6\xi}. \tag{7.14}$$

(7.14) を積分することにより、解は

$$a(t) = a_i \exp\left[H_i t - \gamma(H_i t)^2\right], \tag{7.15}$$

$$H(t) = H_i\left(1-2\gamma H_i t\right), \tag{7.16}$$

$$\psi(t) = \psi_i\left(1-2\gamma H_i t\right)^2 \tag{7.17}$$

のように求まる。各々の量は

$$H_i^2 \equiv \frac{\lambda\psi_i}{12\kappa^2\xi^2}, \tag{7.18}$$

$$\gamma \equiv \frac{2\xi}{(1+6\xi)\psi_i}. \tag{7.19}$$

解 (7.15) – (7.17) より、膨張は指数関数的インフレーションであり、膨張に比べて H, ψ の変化は無視できることが分かる。

2 Conformal (Einstein) Frame Analysis

2.1 conformal transformation

前節で見たように、非最小結合理論では場の方程式は非常に複雑化する。非摂動次のふるまいを調べるだけならまだしも、線形摂動まで追おうとすればさらに複雑化する上、時空とスカラー場のカップリングのために時空構造が自明ではなく、重力場と、そのソースであるスカラー場のエネルギー密度といった基本的な物理量の定義までがあいまいとなる。そうした困難を回避するため、「共形変換 (conformal transformation) [‡] 」という数学的手法が用いられる。これは、メトリックに対する

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega(x) g_{\mu\nu} \tag{7.20}$$

というリスケーリングである。共形因子 (conformal factor) Ω は時空点の関数である。この変換によって 4 次元線素は $d\hat{s}^2 = \Omega^2(x) ds^2$ のように変換されるので、共形変換の物理的意味は「各時空点ごとに『ものさし』の尺度を変える」ことに対応することが分かる。ひらたく言えば、時空点ごとにものさしのメモリが伸び縮みするようなものである。これより、共形変換された量にはハットをつけて示す。(7.20) により、変換のセットとして

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \hat{g}_{\mu\nu}, \tag{7.21}$$

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-2} \sqrt{-\hat{g}}, \tag{7.22}$$

$$R = \Omega^2 \left[\hat{R} + 6\hat{g}^{\mu\nu} \left(\ln\Omega\right)_{;\mu\nu} - 6\hat{g}^{\mu\nu} \left(\ln\Omega\right)_{,\mu} \left(\ln\Omega\right)_{,\nu} \right] \tag{7.23}$$

が得られる。以上を用いて非最小結合の作用積分 (7.3) を共形変換すれば、

$$\hat{A} = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{\hat{R}}{2\kappa^2} - \frac{3}{\kappa^2} \hat{g}^{\mu\nu} \left(\ln\Omega\right)_{,\mu} \left(\ln\Omega\right)_{,\nu} - \frac{1}{2\Omega^2} \hat{g}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{V(\phi)}{\Omega^4} \right]. \tag{7.24}$$

変換された系 (共形系) では、時空とスカラー場が最小結合になっていることが重要である。今、$\Omega = 1 + \psi = 1 + \kappa^2 \xi \phi^2$ のように選べば

$$\hat{A} = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{\hat{R}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} F(\phi) \hat{g}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \hat{V}(\phi) \right], \tag{7.25}$$

[‡] ワイル変換 (Weyl transformation) とも呼ばれる。

$$F^2(\phi) \equiv \frac{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}{(1+\kappa^2\xi\phi^2)^2}, \tag{7.26}$$

$$\hat{V}(\phi) \equiv \frac{V(\phi)}{(1+\kappa^2\xi\phi^2)^2} = \frac{\lambda\phi^4}{4(1+\kappa^2\xi\phi^2)^2}. \tag{7.27}$$

しかし、このままでは (7.25) の第 2 項目にあるスカラー場の運動エネルギーの項が自明でない形をしているので、

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\phi} = F(\phi) = \frac{\sqrt{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}}{1+\kappa^2\xi\phi^2} \tag{7.28}$$

という変換によって新しいスカラー場 $\hat{\phi}$ を定義することにより (Futamase & Maeda 1989)

$$\hat{A} = \int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\left[\frac{\hat{R}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\hat{\phi}_{,\mu}\hat{\phi}_{,\nu} + \hat{V}(\hat{\phi})\right] \tag{7.29}$$

のように、最小結合理論の作用積分 (7.2) と同型の作用を得る。このような作用積分で記述される系を、特に「共形系 (conformal frame)」、あるいは「アインシュタイン系 (Einstein frame)」と呼び、変換前の (7.3) で記述される系を「オリジナル系 (original frame)」、あるいは「ジョルダン系 (Jordan frame)」と呼んでいる。

アインシュタイン系における線素は

$$d\hat{s}^2 = \Omega^2 dt^2 - \Omega^2 a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \tag{7.30}$$

従って、変換

$$\hat{a} = \sqrt{\Omega}a, \qquad d\hat{t} = \sqrt{\Omega}dt \tag{7.31}$$

を行なう事により、アインシュタイン系においてもロバートソン – ウォーカーメトリック:

$$d\hat{s}^2 = d\hat{t}^2 - \hat{a}^2(\hat{t})\delta_{ij}dx^i dx^j \tag{7.32}$$

を得ることができる。アインシュタイン系で物理量を計算する際には、必ず新しい線素に基づいて計算されなければならない。ただし、(7.31) は通常の意味での座標変換ではない。時間座標は変換を受けるが、空間座標は変換を受けず、スケールファクターを変換するのである。これは、共形変換が「長さは変えても角度は変えない」変換だからである。

2.2 background equations

アインシュタイン系では、最小結合理論の枠組みをそのまま使うことが可能である。膨張は

$$\hat{H}^2 = \frac{\kappa^2}{3}\left[\left(\frac{d\hat{\phi}}{d\hat{t}}\right)^2 + \hat{V}(\hat{\phi})\right] \approx \frac{\lambda}{12\kappa^2\xi^2}, \tag{7.33}$$

$$\hat{H} \equiv \frac{1}{\hat{a}}\frac{d\hat{a}}{d\hat{t}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\left(H + \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right), \tag{7.34}$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\hat{t}} = \left(\frac{d\hat{\phi}}{d\phi}\right)\left(\frac{dt}{d\hat{t}}\right)\dot{\phi} = \frac{\sqrt{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}}{\Omega^{3/2}}\dot{\phi}. \tag{7.35}$$

このように、アインシュタイン系でのポテンシャル $\hat{V}$ は $\psi \gg 1$ で十分フラットであり、指数関数的膨張を起こすことができる (Futamase & Maeda 1989)。

しかし、$\hat{V}$ はあくまでもアインシュタイン系でのポテンシャルであり、ジョルダン系での実効的なポテンシャルが (7.33) の形をしている、ということではない。そもそもアインシュタイン系での議論は、ジョルダン系の「アナロジー」であると思うことすら危険である。アインシュタイン方程式は、共形変換に対して不変ではない。従って、共形変換は物理を保存しないのである。単純な例として、$\Omega = a^{-2}$ という共形変換を考えることができる。共形変換を受けたメトリックは

$$d\hat{s}^2 = a^{-2}dt^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j \tag{7.36}$$

で、(7.31) に従って時間座標を変換すれば

$$d\hat{s}^2 = d\hat{t}^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j. \tag{7.37}$$

これはミンコフスキーメトリックである。宇宙膨張は存在せず、観測事実と矛盾する。

このように、共形変換は数学的に便利である反面、物理的解釈には極めて危険をともなう (Faraoni, Gunzig & Nardone 1998, for review) 。従って、ジョルダン系を物理的な系だと「信じて」議論をするのであれば、結果はジョルダン系に戻って示さねばならない。逆に、アインシュタイン系が物理的であるとする立場もある。共形系は Ω の取り方によって無限にあるので、結局のところ無限個の物理的に異なる理論が発生することになる。たとえジョルダン系とアインシュタイン系を特別視したとしても、依然としてそれら 2 つの系の間には物理的なあいまいさがのこったままである。これを回避する方法のひとつとして、

双方の系で同等に成り立つ、すなわち「共形不変 (conformally invariant)」な理論を扱う立場をとることができるだろう。もちろんこれは一つの立場であって物理的な根拠はないが、少なくとも得られた結果は系の選択によらない。どちらの系が物理的か (もしくはどちらも物理的でないか) がはっきり分からない以上、このような立場をとることにも意味があるだろう。本論文ではどちらの系が物理的であるかには言及せず、共形不変性に着目して議論を進める。

3 Transformations of Scalar Perturbations

メトリックの線形摂動の共形変換性を調べる。再び、無摂動次の量にはバーをつけて表すことにする。共形変換の式 (7.20) の摂動次は

$$\delta\hat{g}_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x)\delta\Omega + \delta g_{\mu\nu}(x)\bar{\Omega}. \tag{7.38}$$

さらに、$x \to \hat{x}$ の座標変換:

$$\hat{g}_{\mu\nu}(\hat{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \hat{x}^\nu}\hat{g}_{\alpha\beta}(x) \tag{7.39}$$

が必要である。メトリックの線形摂動の成分はそれぞれ[§]、

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (1-h_{00})dt^2 + 2\bar{a}h_{0i}dtdx^i - \bar{a}^2(\delta_{ij}+h_{ij})dx^i dx^j. \tag{7.40}$$

共形変換はスカラー関数であるから、ベクター/テンサーモード (Appendix D) の摂動は自動的に共形不変である。よって、スカラーモードの摂動に関してのみ変換性を調べれば良い。

$$h_{00} = -2AQ^{(0)}, \qquad h_{0i} = -B^{(0)}Q_i^{(0)}, \qquad h_{ij} = 2H_L Q^{(0)}\delta_{ij} + 2H_T^{(0)}Q_{ij}^{(0)}. \tag{7.41}$$

$Q^{(0)}$ はモード関数である (D.31 – D.33)。

3.1 lapse function: h_{00}

- 共形変換

$$-\hat{h}_{00}(x) = \delta\Omega - h_{00}(x)\bar{\Omega}. \tag{7.42}$$

[§] (A.23) との違いは、無摂動次のメトリックの符号のとりかたの違いのためである。

- 座標変換

$$\hat{g}_{00}(\hat{x}) = \frac{\partial x^0}{\partial \hat{x}^0}\frac{\partial x^0}{\partial \hat{x}^0}\hat{g}_{00}(x) = \frac{1}{\bar{\Omega}}\hat{g}_{00}(x). \tag{7.43}$$

以上より、

$$\hat{h}_{00}(\hat{x}) = h_{00}(x) - \frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}, \tag{7.44}$$

$$\hat{A} = A + \frac{1}{2}\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}. \tag{7.45}$$

3.2 shift vector: h_{0i}

- 共形変換

$$\begin{aligned} \hat{\bar{a}}\hat{h}_{0i}(x) &= \bar{a}h_{0i}(x)\bar{\Omega} \\ \hat{h}_{0i}(x) &= h_{0i}(x)\sqrt{\bar{\Omega}} \end{aligned} \tag{7.46}$$

- 座標変換

$$\hat{g}_{0i}(\hat{x}) = \frac{\partial x^0}{\partial \hat{x}^0}\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^k}\hat{g}_{0k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\Omega}}}\hat{g}_{0i}(x). \tag{7.47}$$

以上より、

$$\hat{h}_{0i}(\hat{x}) = h_{0i}(x), \tag{7.48}$$

$$\hat{B}^{(0)} = B^{(0)}. \tag{7.49}$$

従って、$B^{(0)}$ は共形不変である。

3.3 spatial metric: h_{ij}

- 共形変換

$$-\bar{a}^2\hat{h}_{ij}(x) = -\delta\Omega\delta_{ij} - h_{ij}(x)\bar{\Omega}. \tag{7.50}$$

- 座標変換

$$\hat{g}_{ij}(\hat{x}) = \frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \hat{x}^j}\hat{g}_{kl}(x) = \hat{g}_{ij}(x). \tag{7.51}$$

以上より、

$$\hat{h}_{ij}(\hat{x}) = h_{ij}(x) + \frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}\delta_{ij}, \tag{7.52}$$

$$\hat{H}_L = H_L + \frac{1}{2}\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}, \tag{7.53}$$

$$\hat{H}_T^{(0)} = H_T^{(0)}. \tag{7.54}$$

従ってメトリック摂動のトレースレスパート $H_T^{(0)}$ は、共形不変である (Mukhanov, Feldman, & Brandenberger 1992)。

3.4 geometrical quantities

メトリック摂動単独では物理的意味を持たないが、組合せによって幾何学的意味を持つ (Appendix A, D)。(D.51) – (D.53) の定義より、各幾何量の共形変換性を求められる。

- ハッブルパラメターの摂動

$$\hat{\mathcal{K}}_g = \mathcal{K}_g - \frac{1}{2}\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}. \tag{7.55}$$

- 非等方膨張のポテンシャル

$$\hat{\sigma}_g = \sigma_g. \tag{7.56}$$

- 3 次元曲率ゆらぎのポテンシャル

$$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + \frac{1}{2}\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}. \tag{7.57}$$

3.5 gauge invariants

Appendix E で定義するゲージ不変量のうち、共形不変でないものを挙げる。

- 超曲面上の加速度ポテンシャル (A と同等)

$$\hat{\Phi}_A = \Phi_A + \frac{1}{2}\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}. \tag{7.58}$$

- ニュートンポテンシャル ($\mathcal{R}$ と同等)

$$\hat{\Phi}_H = \Phi_H + \frac{1}{2}\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}. \tag{7.59}$$

4 Scalar Perturbation

非最小結合理論のインフレーションで生成される、スカラーモードのゆらぎを求める。アインシュタイン系では最小結合理論の結果を使う事ができるので、まず

$$\hat{\zeta}_\phi = \hat{\mathcal{R}} - \frac{\hat{H}}{d\hat{\phi}/d\hat{t}}\delta\hat{\phi} \tag{7.60}$$

から出発する。各々の量は全て、(7.28), (7.34), (7.35), (7.57) を用いてジョルダン系に共形変換でき、

$$\hat{\zeta}_\phi = \zeta_\phi + \frac{\dot{\bar{\Omega}}}{2\bar{\Omega}}\left(\frac{\delta\Omega}{\dot{\bar{\Omega}}} - \frac{\delta\phi}{\dot{\bar{\phi}}}\right). \tag{7.61}$$

従って、Ω が ϕ のみの関数でありさえすれば、ζ_ϕ は共形不変である (Makino & Sasaki 1991; Fakir, Habib & Unruh 1992)。共形不変性が証明されたので、アインシュタイン系で量子化を行うことができる。最小結合理論 (6.39) と全く同様にして、

$$\begin{aligned}\sqrt{\hat{P}_S} &= \frac{\hat{H}^2}{2\pi|d\hat{\phi}/d\hat{t}|} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+6\xi}}\frac{H^2}{|\dot{\phi}|} = \frac{N(t_H)}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{3\xi(1+6\xi)}} = \sqrt{P_S}.\end{aligned} \tag{7.62}$$

$N(t_H)$ は、ゆらぎがホライズンを出るときの N であり、

$$N(t_H) \equiv \int_{t_H}^{t_f} H dt = \int_{\psi(t_H)}^{\psi_f} \frac{H}{\dot{\psi}} d\psi \approx \frac{1+6\xi}{8\xi}\left[\psi(t) - \psi_f\right]. \tag{7.63}$$

最後は宇宙膨張の式 (7.14) を用いた。この結果はアインシュタイン系でもジョルダン系でも成り立つので、少なくともどちらかが物理的な系であると思うならば、観測量とあいまいさなく比較できる。COBE の観測より $\sqrt{P_S} < 5\times10^{-5}$ であるから、$N(t_H) > 70$ より

$$\frac{\lambda}{\xi^2} < 4\times10^{-10}. \tag{7.64}$$

ここで、$\xi > 1$ とした。明らかに強い非最小結合が λ の微調整を緩和している。例えば、$\lambda = 10^{-2}$ を可能にするには $\xi > 5\times10^3$ が必要である。逆にこのような大きな ξ の妥当性が問題とも思えるが、今の時点では ξ の値に対して制限を与える術はない。スカラー場の素性や等価原理に関する議論により ξ に定まった値を持たせることができるが、どれもまだ決め手に欠け、一致を見ていない (Faraoni, Gunzig & Nardone 1998)。

5 Tensor Perturbation

テンサーモードは自動的に共形不変であるから、スカラーモード同様、最小結合の結果を使える。(7.34) において $\Omega = 1 + \psi$ とすれば

$$\begin{aligned}\sqrt{\hat{P}_T} &= \frac{4\hat{\bar{H}}}{\sqrt{\pi} m_{pl}} \\ &= \frac{4\bar{H}}{\sqrt{\pi} m_{pl}} \frac{1+\beta}{\sqrt{1+\psi}} \approx \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{6\xi^2}} = \sqrt{P_T}.\end{aligned} \tag{7.65}$$

近似は $\psi \gg 1$ である。ここで、新たな「スローロールパラメター」として

$$\beta \equiv \frac{\dot{\bar{\Omega}}}{2\bar{H}\bar{\Omega}} \tag{7.66}$$

を定義した。

なお、ジョルダン系における直接の計算によっても同じ結論を得る事ができる (Komatsu & Futamase 1998; Hwang 1999)。

6 Tensor/Scalar Ratio

(7.62), (7.65) より、

$$\frac{P_T}{P_S} = 0.00245 \frac{1+6\xi}{6\xi} \left(\frac{70}{N(t_H)}\right)^2. \tag{7.67}$$

これは、非常に興味深い結果である。$\psi \gg 1$ を条件とする非最小結合理論のインフレーションでは重力波の寄与はほとんどなく、観測量である CMB のテンサー/スカラー比 r (6.46) は $r \approx 0.002$ となる。これは Planck の検出限界を 2 オーダー下回っており、観測にかかることはない。しかし一方、最小結合理論の自己相互作用によるカオティックインフレーションは $r \approx 0.2$ を予言し、これは観測可能なのである。すなわち、Planck が重力波の寄与を検出した時点で Fakir & Unruh によるこのインフレーションモデルは棄却され、もし検出されなかった場合は最小結合のカオティックインフレーションが否定されることとなる。これは、CMB の偏光観測がインフレーションモデル、ひいては重力理論に至るまで強い制限を与え得ることを示している。もちろん、議論可能なモデルはここに挙げたばかりではなく数多くあるが、基本的にここでの議論と同じ手法で観測と比較することができる。

7 Spectral Indices

7.1 conformal transformation

次に、モデルの予言するスペクトル指数を計算する。スペクトル指数の共形変換性を調べるため、スローロールパラメター (6.24), (7.66):

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \qquad \alpha = \frac{\dot{Q}}{2HQ}, \qquad \beta = \frac{\dot{\Omega}}{2H\Omega} \tag{7.68}$$

を共形変換する。ϵ は

$$\hat{\epsilon} = \frac{\epsilon + \beta}{1+\beta} - \frac{\dot{\beta}}{H(1+\beta)^2} \approx \epsilon + \beta. \tag{7.69}$$

一方 α は、対象とする量子場によって異なる。

- スカラーモード

$$Q_S = \frac{\dot{\phi}^2 + (3/2)(\dot{\Omega}^2/\Omega)}{\Big(H + (1/2)(\dot{\Omega}/\Omega)\Big)^2}, \qquad \hat{Q}_S = \left(\frac{d\hat{\phi}/d\hat{t}}{\hat{H}}\right)^2. \tag{7.70}$$

Q_S は、ジョルダン系における量子化の結果 (Hwang 1997) である。両者を見比べれば、Q_S は共形変換によって $\hat{Q}_S = Q_S/\Omega$ と変換されていることが導ける。このことは非常に意味深い。波動方程式 (6.19) にあらわれる $R = a\sqrt{Q}$ は共形不変なのである。しかも、これは Ω の選び方には依存しない結果である。$\Omega = \Omega(\phi)$ であれば $\Delta_S = \zeta_\phi$ が共形不変であることはすでに示したが、結局、波動方程式が共形不変なのである。Δ_S を記述する基礎方程式が共形不変なので、結果として Δ_S の性質は共形不変なのである。

実際、スローロールパラメター α_s は

$$\hat{\alpha}_s = \frac{\alpha_s - \beta}{1+\beta} \approx \alpha_s - \beta \tag{7.71}$$

と変換されることから、スペクトル指数 $n_s = 1 - 2\epsilon - 2\alpha$ は

$$\hat{n}_s = 1 - 2\hat{\epsilon} - 2\hat{\alpha}_s = 1 - 2\epsilon - 2\alpha_s = n_s. \tag{7.72}$$

確かに共形不変である。

- テンサーモード

$$Q_T = \frac{\Omega}{16\pi G}, \qquad \hat{Q}_T = \frac{1}{16\pi G}. \tag{7.73}$$

Q_T は、Komatsu & Futamase (1998) において求めた (Appendix K)。スカラーモード同様 $\hat{Q}_T = Q_T/\Omega$ であり、やはり波動方程式は共形不変である。従ってスペクトル指数も共形不変であり、$\hat{n}_t = n_t$ を得る。

7.2 calculations

共形不変性が証明されたので、Fakir & Unruh のシナリオにおけるスペクトル指数をアインシュタイン系において計算できる。スローロールパラメターは

$$\hat{\epsilon} \approx \frac{1}{2\kappa^2}\left(\frac{\hat{V}_{,\hat{\phi}}}{\hat{V}}\right)^2 = 1.5\times 10^{-4}\frac{1+6\xi}{6\xi}\left(\frac{70}{N(\hat{t}_H)}\right)^2, \tag{7.74}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_s &\approx \frac{1}{\kappa^2}\left[\left(\frac{\hat{V}_{,\hat{\phi}}}{\hat{V}}\right)^2 - \left(\frac{\hat{V}_{,\hat{\phi}\hat{\phi}}}{\hat{V}}\right)\right] \\ &= 1.4\times 10^{-2}\left(\frac{70}{N(\hat{t}_H)}\right) + 3.0\times 10^{-4}\frac{1+6\xi}{6\xi}\left(\frac{70}{N(\hat{t}_H)}\right)^2.\end{aligned} \tag{7.75}$$

ここで、ϵ, α_s ともに、$\xi \gg 1$ では ξ に依存しなくなることに注目されたい。カオティックインフレーションの微調整問題を回避するには $\xi \gg 1$ が必要であることはすでに見た通りであり、従って n_s, n_t は この極限で ξ に依存しないことになる。結果は 表 7.1 に示した。比較のため、最小結合理論の結果ものせてある。顕著であるのは、両方のシナリオも同じようなスペクトル指数をもつにもかかわらず、テンサーモードのパワーに大きな違いが出ることである。これは、次のように理解できる。(6.43) に見るように、テンサー/スカラー比はポテンシャルの「傾き」ϵ のみで決まるのに対し、スペクトル指数はポテンシャルの「曲率」α の寄与も存在する。結果として、最小結合理論のポテンシャルと Fakir & Unruh シナリオのアインシュタイン系におけるポテンシャルの形の違い、すなわち 後者が非常に「平坦」なポテンシャルを持つ事が原因なのである。

最小結合理論では、スペクトルが $n = 1$ からずれることは相当量のテンサーモードの存在を意味していた。しかし、今回の結果によれば、非最小結合を持つ理論では必ずしもそれがあてはまらないことが示された。逆に言えば、スペクトルが $n = 1$ からずれている

にもかかわらずテンサーモードが検出されない場合、最小結合理論のカオティックインフレーションは完全に棄却されるのである。同様に、テンサーモードの検出は即座に Fakir & Unruh のシナリオの棄却を意味する。このように、CMB の偏光観測が初期宇宙理論に与える影響は極めて大きい。今後、偏光観測からどのようにして r, n_t などの情報を精度良く引き出すかが CMB 観測の重要なポイントとなってくるだろう。

表 7.1: Fakir & Unruh のシナリオ、最小結合カオティックインフレーションシナリオによって生成されるゆらぎの特性。r は CMB の温度異方性のテンサー/スカラー比、n_s, n_t はそれぞれ、スカラー, テンサーモードのスペクトル指数、λ はスカラー場の自己相互作用の強さ、ξ は非最小結合定数である。全ての値は、$N(t_H) = 70$ で求めてある。

Parameter	Fakir-Unruh scenario	minimal chaotic scenario
r	2×10^{-3}	0.2
n_s	0.97	0.96
n_t	-3.0×10^{-4}	-2.8×10^{-2}
λ/ξ^2	4×10^{-10}	—

Epilogue

宇宙背景放射の研究は、理論研究はほぼ整備され、今や観測結果を待つフェイズに入ったと言えるだろう。しかし、データリダクションの際重要な要素となるフォアグラウンドに関しては、本論文ではほとんど触れることができなかった。また、最近話題に登っているゆらぎのガウシアンからのずれや、タイプ Ia 超新星, 大規模赤方偏移サーベイと CMB との相補的関係についても触れることができなかった。これはひとえに私の未熟さのためである。お許し頂きたい。

本論文中の図にプロットされている温度ゆらぎと偏光のパワースペクトルは、Matias Zaldarriaga (IAS) と Uroš Seljak (Princeton University) の開発したコード、CMBFAST による計算である。このような汎用性の高いコードにより、誰もが簡単に CMB のパワースペクトルを用いて定量的な議論ができるようになった。改めて敬意を表したい。

The most incomprehensible thing about the world is
that it is comprehensible.

— *Albert Einstein*

Acknowledgments

私に宇宙背景放射の研究を始めるきっかけを与え、また研究全般に渡って多くの御指導と援助を下さった二間瀬敏史 教授に心より感謝致します。また、長文で散慢になった本論文を熟読し、多くの誤りの訂正や、内容に関する助言を頂いたことを、重ねて感謝いたします。

服部誠 助手は、私にサブミリ帯のスニヤエフ – ゼルドヴィッチ効果の初検出という意義ある研究に従事するチャンスを与えて下さいました。この研究が私のその後の研究スタイルに与えた影響は測り知れません。また、野辺山での観測中やハワイ島での日々など、公私共々非常にお世話になりました。この場を借りて厚く御礼申しあげます。

須藤靖 助教授 (東京大学) は、スニヤエフ – ゼルドヴィッチ効果の観測計画を入念に練り上げ、成功へと的確にグループをリードしながらも、全くの素人で心許ない私に観測と解析を任せ、大きなチャンスと共に惜しみない議論の場と援助を頂いたことを、心より感謝いたします。このチャンスを生かせた事は今後の私の研究活動の中で自信となります。

杉山直 助教授 (京都大学) には、京都大学での宇宙背景放射の集中講義の際に貴重な議論の時間を割いて頂き、私のつたない疑問にも分かりやすく丁寧に御教授頂きましたことを深く感謝いたします。本論文の第 2 章の大部分は Wayne Hu (IAS) と 杉山助教授の共同研究による成果です。また、私の宇宙背景放射の国外での研究機会の模索に際し、多大な御尽力を頂けた事は感謝の意に絶えません。厚く御礼申しあげます。

松尾宏 助手 (野辺山宇宙電波観測所) には、御自身の多忙さも顧みず野辺山での観測の一切を御教授頂き、また国内における宇宙背景放射の観測の先駆者として貴重かつ重要なアドバイスを多々頂けたことに深く感謝いたします。

北山哲 さん (東京大学) は、スニヤエフ – ゼルドヴィッチ効果の検出を成功させる上で多大な貢献と御努力をされました。時には無理なお願いを聞いて頂き、さらに私の愚直で基本的な質問にも毎回のように懇切丁寧に答えていただいた上、常に的確なアドバイスを頂けたことに、深く感謝いたします。

川辺良平 教授、松下聡樹さん (野辺山宇宙電波観測所) には、野辺山の電波干渉計での

観測の際、観測からデータ解析に至るまでの一切の御面倒を見て頂き、素人の私に時間も惜しまず懇切丁寧な御指導と御支援を頂いたことに深く感謝いたします。

吉川耕司君 (京都大学) には、野辺山のデータ解析の際に無理なお願いを聞いて頂き、また数々の勝手な注文にも快く応じて頂いたことは、感謝の意に絶えません。厚く御礼申しあげます。

東北大学宇宙論グループの濱名崇さん、高田昌宏さん、梅津敬一さん、伊藤洋介君には、常日頃から基礎的な部分も含めて多くの相談にのって頂き、さらに数多くの貴重なアドバイスを頂いたことに深く感謝致します。

秋田谷洋君、池田優二君には、全くの素人であった観測の基礎理論から偏光の理論に関し、数多くの御教授と助言を頂きました。この場を借りて厚く御礼申しあげます。

最後になりましたが、御迷惑をおかけしながらも、日常的に様々な御配慮と御支援を頂きました東北大学天文学教室の皆様に厚く御礼申しあげます。

References

Abbott, L. F. & Wise, M. B. 1984, Nucl. Phys. B., 244, 541

Allen, B. & Koranda, S. 1994, Phys. Rev. D., 50, 3713

Alpher, R. A. & Herman, R. C. 1949, Phys. Rev., 75, 1089

Andreani, P., et al. 1996, ApJ, 459, L49

Andreani, P., et al. 1999, ApJ, in press (astro-ph/9811093)

Arnowitt, R., Deser, S. & Misner, C. W. 1962, *in: Gravitaion*, 227 – 265 (Wiley: New York), ed. Witten, L.

Atrio-Barandela, F. & Mücket, J. P. 1998, Astrophys. J., in press (astro-ph/9811158)

Bardeen, J. M. 1980, Phys. Rev. D, 22, 1882

Bardeen, J. M., Steinhardt, P. J. & Turner, M. S. 1983, Phys. Rev. D, 28, 679

Bardeen,J. M., Bond, J. R., Kaiser, N. & Szalay, A. S. 1986, Astrophys. J., 304, 15

Barger, A. J., Cowie, L. L., Sanders, D. B., Fulton, E., Taniguchi, Y., Sato, Y., Kawara, K. & Okuda, H. 1998, Nature, 394, 248

Bartlett, J. G. & Silk, J. 1994, Astrophys. J., 423, 12

Birkinshaw, M. 1998, Phys. Rep., in press (astro-ph/9808050)

Birrel, N. D. & Davies, P. C. W. 1982, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)

Bond, J. R. 1996, *Theory and Observations of the Cosmic Background Radiation*, Les Houches Session LX (Amsterdam: Elsevier Science Press), ed. R. Schaeffer

Bond, J. R., Crittenden, R., Davis, R. L., Efstathiou, G. & Steinhardt, P. J. 1994, Phys. Rev. Lett., 72, 13

Bond, J. R. & Efstathiou, G. 1987, Mon. Not. R. Astron. Soc., 226, 655

Bond, J. R., Efstathiou, G. & Tegmark, M. 1997, Mon. Not. R. Astron. Soc., 291, L33

Bond, J. R. & Myers, S. T. 1996, Astrophys. J. Suppl., 103, 1

Bower, R. G. 1997, Mon. Not. R. Astron. Soc., 288, 355

Brans, C. & Dicke, R. H. 1961, Phys. Rev., 124, 925

Bunch, T. S. & Davies, P. C. 1978, Proc. R. Soc. London A, 360, 117

Bunn, E. F. & White, M. 1997, Astrophys. J., 480, 6

Carroll, S. M., Press, W. H. & Turner, E. L. 1992, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 30, 499

Ceballos, M. T. & Barcons, X. 1994, Mon. Not. R. Astron. Soc., 271, 817

Chandrasekhar, S. 1950, *Radiative Transfer* (London: Oxford Univ. Press)

Church, S. E. 1997, Astrophys. J., 484, 523

Coble, K., et al. 1999, astro-ph/9902195

Cole, S. & Kaiser, N. 1988, Mon. Not. R. Astron. Soc., 233, 637

Crittenden, R., Bond, J. R., Davis, R. L., Efstathiou, G. & Steinhardt, P. J. 1993, Phys. Rev. Lett., 71, 324

de Olveira-Costa et al. 1997, Astrophys. J. Lett., 482, L17

de Olveira-Costa, A. 1998, Astrophys. J. Lett., in press, astro-ph/9808045

Dicke, R. H. 1962, Phys. Rev., 125, 2163

Eisenstein, D. J. & Hu, W. 1998, Astrophys. J., 496, 605

Fakir, R. & Unruh, W. G. 1990a, Phys. Rev. D., 41, 1783

Fakir, R. & Unruh, W. G. 1990b, Phys. Rev. D., 41, 1792

Fakir, R., Habib, S. & Unruh, W. G. 1992, Astrophys. J., 394, 306

Faraoni, V., Gunzig, E. & Nardone, P. 1998, gr-qc/9811047

Fixsen, D. J., et al. 1996, Astrophys. J., 486, 623

Futamase & Maeda 1989, Phys. Rev. D, 39, 399

Gamow, G. 1946, Phys. Rev., 70, 572

Grishchuk, L. & Sidorov, Y. 1990, Phys. Rev. D., 42, 3413

Guth, A. 1981, Phys. Rev. D, 23, 347

Harrison, E. 1970, Phys. Rev. D, 1, 2726

Hobson, M. P., Jones, A. W., Lasenby, A. N. & Bouchet, F. R. 1998, Mon. Not. R. Astron. Soc., 300, 1

Holzapfel, W.L., Ade, P.A.R., Church, S.E., Mauskopf, P.D., Rephaeli, Y., Wilbanks, T.M., & Lange, A.E. 1997, ApJ, 481, 35

Hu, W. 1995, Ph.D. thesis, Univ. California at Berkeley

Hu, W., Scott, D. & Silk, J. 1994, Phys. Rev. D, 49, 648

Hu, W., Scott, D., Sugiyama, N. & White, M. 1995, Phys. Rev. D., 52, 5498

Hu, W., Seljak, U., White, M. & Zaldarriaga, M. 1998, Phys. Rev. D., 57, 3290

Hu, W. & Sugiyama, N. 1995, Astrophys. J., 444, 489

Hu, W. & Sugiyama 1996, Astrophys. J., 471, 542

Hu, W., Sugiyama, N. & Silk, J. 1997, Nature, 386, 37

Hu, W. & White, M. 1997a, New Astronomy, 2, 323

Hu, W. & White, M. 1997b, Phys. Rev. D, 56, 596

Hughes, D. H., et al. 1998, Nature, 394, 241

Hwang, J. 1997, Class. Quant. Grav., 14, 1981

Hwang, J. 1999, Phys. Rev. Lett., in press

Jaffe, A. H. & Kamionkowski, M. 1998, Phys. Rev. D., 58, 043001

Jing, Y. P. 1998, Astrophys. J. Lett., 503, L9

Jones, M. E., et al. 1993, Nature, 365, 320

Jones, M. E. & Scott, P. F. 1998, astro-ph/9804175

Kaiser, N. 1983, Mon. Not. R. Astron. Soc., 202, 1169

Kaiser, D. I. 1995, Phys. Rev. D, 52, 4295

Kamionkowski, M., Kosowsky, A. & Stebbins, A. 1997, Phys. Rev. D., 55, 7368

Kitayama, T. 1998, Ph.D. thesis, Tokyo Univ.

Kitayama, T., Sasaki, S. & Suto, Y. 1998, Publ. Astron. Soc. Jpn., 50, 1

Kitayama, T. & Suto, Y. 1997, Astrophys. J., 490, 557

Knox, L. 1995, Phys. Rev. D., 52, 4307

Komatsu, E. & Futamase, T. 1998, Phys. Rev. D, 58, 023004; D, 58, 089902

Komatsu, E. & Futamase, T. 1999, Phys. Rev. D., 59, 064029

Komatsu, E., et al. 1999, Astrophys. J. Lett., in press

小玉 英雄 1991, パリティ物理学コース 相対論的宇宙論 (東京: 丸善)

Kodama, H. & Sasaki, M. 1984, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.78

Lahav, O., Rees, M. J., Lilje, P. B. & Primack, J. R. 1991, Mon. Not. R. Astron. Soc., 251, 128

Lamarre, J. M., et al. 1998, ApJ, 507, L5

Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1973, *The Classical Theory of Fields: 6th Ed.* (Tokyo: 東京図書 (和訳))

Liddle, A. R., Parsons, P. & Barrow, J. B. 1994, Phys. Rev. D, 50, 7222

Linde, A. D. 1983, Phys. Lett., 129B, 177

Lineweaver, C. H., et al. 1996, Astrophys. J., 470, 38

Ma, C. P. & Bertschinger, E. 1995, Astrophys. J., 455, 7

Makino, N. & Sasaki, M. 1991, Prog. Theor. Phys., 86, 103

Makino, N. & Suto, Y. 1993, Astrophys. J., 405, 1

Markevitch, M., Blumenthal, G. R., Forman, W., Jones, C. & Sunyaev, R. A. 1991, Astrophys. J. Lett., 378, L33

Markevitch, M., Blumenthal, G. R., Forman, W., Jones, C. & Sunyaev, R. A. 1992, Astrophys. J., 395, 326

Markevitch, M., Blumenthal, G. R., Forman, W., Jones, C. & Sunyaev, R. A. 1994, Astrophys. J., 426, 1

Mather, J. C., et al. 1990, Astrophys. J. Lett., 354, L37

松尾 宏、石黒 正人、岡保 理佳子、田原 博人 1991, 天文月報 1 月号

Matsumoto, T., Hayakawa, S., Matsuo, H., et al. 1988, Astrophys. J., 329, 567

Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A. 1973, *Gravitaion* (San Francisco: Freeman)

Mo, H. J. & White, S. D. M. 1996, Mon. Not. R. Astron. Soc., 282, 347

Mukhanov, V. F., Feldman, H. A. & Brandenberger, R. H. 1992, Phys. Rep., 215, 203

中村 卓史, 三尾 典克, 大橋 正健 1998, 重力波をとらえる – 存在の証明から検出へ (京都大学: 京都大学学術出版社)

Netterfield, C. B., Devlin, M. J., Jarosik, N., Page, L. & Wollack, E. J., Astrophys. J., 474, 47

Newman, E. T. & Penrose, R. 1966, J. Math. Phys., 7, 863

Ostriker, J. P. & Vishniac, E. T. 1986, Astrophys. J. Lett., 306, L51

Padmanabhan, T. 1993, *Structure formation in the universe* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)

Pariiskii, Yu. N. 1973, Sov. Astron., 16, 1048

Partridge, R. B. 1995, *3K: The Cosmic Microwave Background Radiation* (Cambridge:

Cambridge Univ. Press)

Partridge, R. B. 1997, Astrophys. J., 483, 38

Peacock, J. A. & Dodds, S. J. 1996, Mon. Not. R. Astron. Soc., 280, L19

Peebles, P. J. E. 1980, *The Large-Scale Structure of the Universe* (Princeton: Princeton Univ. Press)

Penzias, A. A. & Wilson, R. W. 1965, Astrophys. J., 142, 419

Persi, F. M., Spergel, D. N., Cen, R. & Ostriker, J. P. 1995, Astrophys. J., 442, 1

Readhead, A. C. S., et al. 1989, Astrophys. J., 346, 566

Rephaeli, Y. 1981, Astrophys. J., 245, 351

Rephaeli, Y. 1995, Annu. Rev. Astron. Astrophys., 33, 541

Rybicki, G. B., Lightman, A. P. 1979, *Radiative Processes in Astrophysics* (New York: Wiley)

Sachs, R. K. & Wolfe, A. M. 1967, Astrophys. J., 147, 73

Sato, K. 1981, Mon. Not. R. Astron. Soc., 195, 467

Schaeffer, R. & Silk, J. 1988, Astrophys. J., 333, 509

Schindler, S., et al. 1995, A&A, 299, L9

Schindler, S., Hattori, M., Neumann, D. M. & Böhringer, H. 1997, A&A, 317, 646

Schutz, B. F. 1980, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)

Scott, P. F. 1996, Astrophys. J., 461, L1

Schutz, B. F. 1988, *A First Course in General Relativity* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)

Seljak, U. 1994, Astrophys. J., 436, 509

Seljak, U. 1996, Astrophys. J., 460, 549

Smail, I., Ivison, R. J. & Blain, A. W. 1997, ApJ, 490, L5

Smail, I., Ivison, R. J., Blain, A. W. & Kneib, J.-P. 1998, ApJ, 507, L21

Smoot, G. F., et al. 1991, Astrophys. J., 371, L1

Smoot, G. F., et al. 1992, Astrophys. J., 396, L1

Smoot, G. F. 1997, *The CMB Anisotropy Experiments*, NATO ASI Series: The Cosmic Microwave Background (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), ed. Lineweaver, C. H. et al.

Stewart, E. D. & Lyth, D. H. 1993, Phys. Lett. B, 302, 171

Subrahmanyan, R., Kesteven, M. J., Ekers, R. D., Sinclair, M. & Silk, J. 1998, Mon. Not. R. Astron. Soc., 298, 1189

砂川 重信 1991, 量子力学 (東京: 岩波書店)

Sunyaev, R. A. & Zel'dovich, Ya. B. 1972, Comments Astrophys. Space Phys., 4, 173

Sunyaev, R. A. & Zel'dovich, Ya. B. 1980, Mon. Not. R. Astron. Soc., 190, 413

Suto, Y., Sasaki, S. & Makino, N. 1998, ApJ, 509, December 20 issue, in press (astro-ph/9807112)

Takada, M. 1998, Master thesis, Tohoku Univ.

Takada, M. & Futamase, T. 1998, Prog. Theor. Phys., 100, 315

Tegmark, M. & Efstathiou, G. 1996, Mon. Not. R. Astron. Soc., 281, 1297

Tegmark, M. 1997a, Astrophys. J. Lett., 480, L87

Tegmark, M. 1997b, Phys. Rev. D., 56, 4514

Tegmark, M., et al. 1997, Astrophys. J. Lett., 474, L77

Tegmark, M., et al. 1997, astro-ph/9711076

Tucker, G. S., Griffin, G. S., Ngyên, H. T. & Peterson, J. B. 1993, Astrophys. J., 419, L45

Tuluie, R. & Laguna, P. 1995, Astrophys. J. Lett., 445, L73

Tuluie, R., Laguna, P. & Anninos, P. 1996, Astrophys. J., 463, 15

Viana, P. T. P. & Liddle, A. 1996, Mon. Not. R. Astr. Soc., 281, 323

Vishniac, E. T. 1987, Astrophys. J., 322, 597

Yoshikawa, K., Itoh, M. & Suto, Y. 1998, Publ. Astron. Soc. Jpn., 50, 203

Yoshikawa, K. & Suto, Y. 1999, ApJ, 513, March 10 issue, in press (astro-ph/9810247)

Weinberg, S. 1972, *Gravitaion and Cosmology* (New York: Wiley)

Weinberg, S. 1995, *The Quantum Theory of Fields I* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)

White, M. 1992, Phys. Rev. D., 46, 4198

White, S. D. M., Efstathiou, G. & Frenk, C. S. 1993, Mon. Not. R. Astr. Soc., 262, 1023

Will, C. M. 1993, *Theory and Experiment in Gravitational Physics (revised ed.)* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)

Wilson, M. L. & Silk, J. 1981, Astrophys. J., 243, 14

Zaldarriaga, M. & Seljak, U. 1997, Phys. Rev. D., 55, 1830

Zaldarriaga, M. 1998, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology

Zerilli, F. L. 1970, J. Math. Phys., 7, 2203

Zel'dovich, Ya. B. & Sunyaev, R. A. 1969, Astrophys. Space. Sci., 4, 301

Zel'dovich, Ya. B. 1972, Mon. Not. R. Astron. Soc., 160, 1

Zel'dovich, Ya. B., Illarionov, A. F. & Sunyaev, R. A. 1972, Sov. Phys. JETP, 33, 643

付 録A　The ADM Formalism

一般相対論は、一般共変的なテンサー方程式で記述される。いいかえれば、方程式は一般座標変換に対して形を変えない。しかし、ひとたび我々が一般相対論の枠組みの中で、例えば流体の運動を記述しようと試みる際、この不変性はやっかいなものとなる。すなわち、我々が普段運動を測る際に用いる「時間」は特別な座標ではなく、「空間」も一意に規定されるわけではない。時空座標 4 次元はすべて対等であり、それは相対論の本質でもある。従って相対論においては「エネルギー」、「運動量」といった重要な物理量の定義も、ニュートン力学のように自明ではない。このような困難を回避し、一般相対論の枠組みで物理量の時間発展を記述し、解析的研究、さらには数値相対論にとって強力な手法として登場したのが、Arnowitt, Deser, Misner による、「ADM 形式」である (Arnowitt, Deser & Misner, 1962)。

1　Metric

ADM 形式では、4 次元座標を空間 3 次元+時間 1 次元に分割するところからはじまる。まず時間座標 τ を決め、時間一定の空間的超曲面 (spatial hypersurface; 以下 $\mathcal{S}_\tau$) を各時刻ごとに定義する。$\mathcal{S}_\tau$ は時間軸と直交するように定義される。時空は 4 次元計量テンサー (metric tensor) $\mathbf{g}$ によって決定されるが、これを $3+1$ に分割する際、以下のように時空の性質を特徴づける 3 つの量を導入する。

(1) N: ラプス関数 (Lapse function)
物理的な時間 (あるいは固有時間) の刻みが $Nd\tau$ となるように定義される。N は一般に時空点の関数であるから、時空点ごとの物理的時間の流れ方の違いを決める関数である。以降、τ による偏微分をドットで表す。物理的時間 t による偏微分は、$\partial f/\partial t = N^{-1}\dot{f}$ となる。従ってドットのあるところには N^{-1} が伴う。

(2) ${}^{(3)}g_{ij}$: 空間的計量 (spatial metric)

$\mathcal{S}_\tau$ 上における、3 次元曲率テンサー ${}^{(3)}\mathbf{R}$ を決める* 。一様等方な膨張宇宙においては、

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}R_{ijkm} &= \frac{\kappa}{a^2}\left({}^{(3)}g_{ik}{}^{(3)}g_{jm} - {}^{(3)}g_{im}{}^{(3)}g_{jk}\right), && \text{(A.1)}\\
{}^{(3)}R_{ij} &= 2\frac{\kappa}{a^2}{}^{(3)}g_{ij}, && \text{(A.2)}\\
{}^{(3)}R &= 6\frac{\kappa}{a^2}. && \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

κ は、3 元スカラー曲率を表すパラメターで、(長さ)$^{-2}$ の次元を持っている。つまり $\kappa^{-1/2}$ は曲率半径をあらわしているが、平坦な空間 ($\kappa = 0$) では曲率半径無限大、開いた空間 ($\kappa < 0$) では双曲型空間の曲率スケールである。また、a は一様等方膨張のスケールファクターである。曲率テンサーの詳しい定義は、 Appendix C において行なう。

(3) N^i: シフトベクター (shift vector)
空間座標の原点が時間座標に対して速度 N^i で運動する自由度。空間座標の原点に静止している観測者が必ずしも時間軸に沿っているわけではなく、その流線が $\mathcal{S}_\tau$ と直交しているとは限らないことを意味している。$N^i = 0$ である場合、空間座標原点の流線が $\mathcal{S}_\tau$ と直交し、全空間にわたって同時刻になるように時計を合わせることができる。

以上の量を用い、4 次元線素 ds^2 は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -N^2 d\tau^2 + {}^{(3)}g_{ij}(dx^i + N^i d\tau)(dx^j + N^j d\tau)\\
&= (-N^2 + N^k N_k)d\tau^2 + 2N_i d\tau dx^i + {}^{(3)}g_{ij}dx^i dx^j. && \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

メトリックの成分として、逆行列とともに書き下せば、

$$
\begin{aligned}
g_{00} = -N^2 + N^k N_k \quad , \qquad & g^{00} = -\frac{1}{N^2}, && \text{(A.5)}\\
g_{0i} = N_i \equiv {}^{(3)}g_{ij}N^j \quad , \qquad & g^{0i} = \frac{N^i}{N^2}, && \text{(A.6)}\\
g_{ij} = {}^{(3)}g_{ij} \quad , \qquad & g^{ij} = {}^{(3)}g^{ij} - \frac{N^i}{N}\frac{N^j}{N}. && \text{(A.7)}
\end{aligned}
$$

逆行列の各成分は、$g^{00} \equiv -1/N^2$ を定義すれば $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu$ を用いて計算される。メトリックの各成分の定義は、文献によって上記と逆符号で定義されることも多い。これは、問題

* Bardeen (1980), Kodama & Sasaki (1983) では、$\gamma_{ij} \equiv {}^{(3)}g_{ij}/a^2$ について ${}^{(3)}\mathbf{R}$ を定義している。従って、${}^{(3)}R = 6\kappa$ である。

によって計算の楽な方を選ぶためであるが、注意が必要である† 。メトリックから計算される曲率テンサー、クリストッフェル記号は、Appendix C で定義している。

2 Geometrical Quantities

メトリックを N, N^i, ${}^{(3)}g_{ij}$ を用いて定義したので、これらを用いて時空の幾何学的性質を調べることができる。「調べる」とは、すなわちある観測者を配置して幾何学を「測定する」ことである。従って配置される観測者が異なれば幾何的構造も違って見える。この観測者の任意性を利用して、最もシンプルかつクリアに時空構造を明らかにできる観測者を定義できる。ただし、ここで言う「観測者」はあくまで便宜的なものであり、これから採用する観測者の測る量が、はたして我々の観測可能量であるかどうかは全く別の問題である。

2.1 normal vector & projection tensor

時空を $3+1$ に分解したことを受け、$\mathcal{S}_\tau$ に垂直な時間的 4 元ベクター $\mathbf{n}$ を定義し、これを観測者として選ぶ。時間的とは、$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = -1$ を意味する。$\mathcal{S}_\tau$ との直交条件より、$\mathbf{n}$ の成分は

$$n^\mu = (\frac{1}{N},\ -\frac{N^i}{N})\ , \qquad n_\mu = (-N,\ 0,\ 0,\ 0) \tag{A.8}$$

と決められる。さらに、$\mathbf{n}$ から構成される演算子として、射影テンサー (projection tensor) $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{g} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n} \tag{A.9}$$

を定義できる。これは、4 元量を $\mathbf{n}$ に直交する方向、すなわち $\mathcal{S}_\tau$ 上に射影する演算子であり、4 元ベクター $\mathbf{V}$, テンサー $\mathbf{T}$ はそれぞれ、$\mathbf{V}_{(\mathcal{S}_\tau)} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{V}$, $\mathbf{T}_{(\mathcal{S}_\tau)} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}$ のように射影される。その他諸性質として、

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad \mathrm{Tr}\mathbf{P} = 3$$
$$P^0_\mu = 0, \quad P^i_0 = N^i, \quad P_{ij} = {}^{(3)}g_{ij}$$

などが挙げられ、射影された量の成分は

$$V^\mu_{(\mathcal{S}_\tau)} \ = \ (0, V^0N^i + V^i), \tag{A.10}$$

† 例えば、Landau & Lifshitz (1973) は逆符号である。

$$V_{(\mathcal{S}_\tau)\mu} = (V_k N^k, V_i), \tag{A.11}$$

$$T_{(\mathcal{S}_\tau)\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{kl}N^k N^l & T_{ki}N^k \\ T_{ik}N^k & T_{ij} \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

$$T^{\mu}_{(\mathcal{S}_\tau)\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T^0_k N^k N^i & T^0_j N^i + T^i_j \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

$$T^{\mu\nu}_{(\mathcal{S}_\tau)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^{00}N^iN^j + T^{i0}N^j + N^iT^{0j} + T^{ij} \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

と書き下せる。射影された量は空間的テンサーであるから、各成分はもはや独立ではない。しかし添字が 0 の成分も存在するため、その空間性が見にくくなっている。これは、シフトベクターの存在によって時間軸と空間座標一定 $(dx^i = 0)$ の流線が一致しないためであり、$N_i = 0$ のもとでは 0 の成分が全て消えて添字の時間性と空間性がはっきり分けられることを見ても明らかである。

シフトベクターが存在するもとにおいても、適当に基底をとりなおしてやる事によって空間的添字と時間的添字を切り離して添字に物理的意味をもたせることが可能である。この手法については Appendix B で述べる。

2.2 rotation, shear, expansion & acceleration

以上の量を用い、$3+1$ 分解の枠組みで時空構造を測定する。$\mathbf{n}$ は $\mathcal{S}_\tau$ の法線ベクターであるから、$\mathcal{S}_\tau$ 上の異なる点に立つ $\mathbf{n}$ を比較して、その変化率 $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ を測定することによって $\mathcal{S}_\tau$ の幾何学的諸量をシンプルに得る事ができる。ここで、$\boldsymbol{\nabla}$ は $\mathbf{g}$ に基づく 4 元共変微分である。

$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ は、形式的に常に

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma} + \frac{\theta}{3}\mathbf{P} - \mathbf{A}\otimes\mathbf{n}, \tag{A.15}$$

- 空間的反対称トレースレステンサー $\boldsymbol{\omega}$: 回転 (rotation)
- 空間的対称トレースレステンサー $\boldsymbol{\sigma}$: 非等方体積変化率 (shear)
- 空間的トレース θ: 等方体積変化率 (expansion)
- 空間的剰余項 $\mathbf{A}$: 加速度 (acceleration)

に分解できる。ただし、ここではまだ $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ を形式的に分解しただけにすぎず、上に記した幾何的意味は明らかではない。成分で書けば、

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(P^{\alpha}_{\mu}n_{\alpha;\beta}P^{\beta}_{\nu} - P^{\beta}_{\nu}n_{\beta;\alpha}P^{\alpha}_{\mu}\right) \tag{A.16}$$

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(P^{\alpha}_{\mu}n_{\alpha;\beta}P^{\beta}_{\nu} + P^{\beta}_{\nu}n_{\beta;\alpha}P^{\alpha}_{\mu}\right) - \frac{\theta}{3}P_{\mu\nu} \tag{A.17}$$

$$\theta \equiv P^{\alpha\beta}n_{\alpha;\beta} \tag{A.18}$$

$$A_{\mu} \equiv P^{\alpha}_{\mu}n_{\alpha;\beta}n^{\beta} \tag{A.19}$$

であり、(A.16) – (A.19) を用いて (A.15) の右辺を全て加えれば、式 (A.15) を確かめられる。各々の幾何量が全て空間的なテンサー、すなわち $\mathcal{S}_{\tau}$ 上のものとして定義されていることは、$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0$ より明らかである。

2.3 extrinsic curvature

(A.15) は自明な等式であるが、各幾何量の持つ物理的意味は、式を見ただけでは直観的に分かりにくい。従って、より基本的立場から考察する。

例として 3 次元の球体を考える。2 次元しか知覚できない者は、測定により、彼にとっての 2 次元面を平坦であると結論するだろう。しかし、我々のように 3 次元を知覚できる者は、例えば球面上に垂直に棒を立て、全ての棒は互いに平行でないことを知ることができ、そこに 3 次元曲率の存在を見出すことができる。同様に $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ は、4 次元を知覚できる者が 3 次元空間的超曲面 $\mathcal{S}_{\tau}$ 上の異なる点に立つ $\mathbf{n}$ を比較したものであるから、$\mathcal{S}_{\tau}$ の 4 次元的曲率をあらわしていると考えられる。従って、3 次元空間の曲率 ${}^{(3)}\mathbf{R}$ を内的曲率 (intrinsic curvature) と呼ぶとするならば、$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ によって測られた 4 次元的な曲率を外的曲率 (extrinsic curvature) と呼び、$\mathbf{K} \equiv -\mathbf{P}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n})\cdot\mathbf{P}$ と定義することができるだろう。ただし、$\mathbf{K}$ は $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ そのものではなく、$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ の $\mathcal{S}_{\tau}$ 上の射影成分として定義されている。なぜならば、3 次元を知覚する我々は、所詮 $\mathcal{S}_{\tau}$ 上に射影された成分を測定するしかないからである。マイナスをつけて定義するのは、比較した $\mathbf{n}$ が互いに内向きな時、つまり時間的に収縮の方向を $\mathbf{K} > 0$ として定義したためである。

$\mathbf{K}$ を成分で書き下せば、$K_{\mu\nu} \equiv -P^{\alpha}_{\mu}n_{\alpha;\beta}P^{\beta}_{\nu} = -P^{k}_{\mu}(n_{k,l} - \Gamma^{\gamma}_{kl}n_{\gamma})P^{l}_{\nu}$ である。しかし、今採用している $\mathbf{n}$ は $\mathcal{S}_{\tau}$ に直交しており、$n_{\mu} = (-N, 0, 0, 0)$ であることから第 1 項は消え、$\mathbf{K}$ は対称テンサーとなる。一方、定義より $K_{\mu\nu} - K_{\nu\mu} = -2\omega_{\mu\nu}$ であり、従って $\boldsymbol{\omega} = 0$ が結論される。これは、ADM 形式のとったある重要な要請の結果である。ADM 形式では、

まず超曲面 $\mathcal{S}_\tau$ を定義するところからはじめた。これはすなわち、いたるところで時間的な法線ベクター $\mathbf{n}$ を定義できたことと同等である。いいかえれば、$\mathcal{S}_\tau$ 上のいたるところで対称テンサー $\mathbf{K}$ が定義できるためには、$\mathcal{S}_\tau$ が大局的に「面」をなしていなければならない。結果として、ADM 形式においては原理的に $\boldsymbol{\omega}$ が存在しないことになる。

(A.15) に $\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}$ を作用させることにより、以下の式を得る。

$$\mathbf{K} = -\left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{\theta}{3}\mathbf{P}\right), \tag{A.20}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\left[\mathbf{K} - \frac{1}{3}\mathbf{P}(\mathrm{Tr}\mathbf{K})\right], \tag{A.21}$$

$$\theta = -\mathrm{Tr}\mathbf{K}. \tag{A.22}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は $\mathbf{K}$ のトレースレスの部分となっており、法線ベクターの束が非等方的に変化する、すなわち非等方的な体積変化率をあらわしている。一方、θ はトレースであり、等方的な体積変化率である。マイナス符号は $\boldsymbol{\sigma}$, θ が膨張する方向に正であることを示している。後に (A.33) で見るように、例として宇宙論的な状況を考えれば、フリードマン宇宙 ($N = 1,\ N^i = 0,\ {}^{(3)}g_{ij} = \bar{a}^2(\tau)\delta_{ij}$) では $\theta/3 = H \equiv \dot{\bar{a}}/\bar{a},\ \boldsymbol{\sigma} = 0$ であり、確かに等方的な宇宙膨張をあらわしていることがわかる。ゆらぎが存在するような場合には $\boldsymbol{\sigma} \neq 0$ となる状況も考えられるが、$\boldsymbol{\sigma}$ を構成するゆらぎの組合せは宇宙の非等方膨張に寄与していることが物理的に明らかとなる上、テンサーで書かれているため非常に見通しが良い。

3 Linear Perturbations

メトリックの各成分に線形摂動を与え、ADM 形式で定義した幾何量 $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\sigma}$, θ, $\mathbf{A}$ を摂動量で書き下す。

3.1 metric perturbations

一様等方な宇宙を背景とし、線形摂動 $h_{\mu\nu}$ を加える。その際、等方膨張を抜きだすため時間、空間座標を $\bar{N}(\tau)d\tau$, $\bar{a}(\tau)dx^i$ とスケールして、

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \bar{N}^2(-1 + h_{00})d\tau^2 + 2\bar{N}\bar{a}h_{0i}d\tau dx^i + \bar{a}^2(\gamma_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \tag{A.23}$$

と定義する。バーをつけた量は無摂動量である。$\gamma_{ij} \equiv {}^{(3)}\bar{g}_{*ij} \equiv {}^{(3)}\bar{g}_{ij}/\bar{a}^2$ は一様等方 3 次元空間を記述するメトリックで、極座標表示で

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j \equiv \frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{A.24}$$

と書き下すことができる。κ は内的曲率をあらわすパラメターであり、すなわち 3 次元スカラー曲率 (A.3) のパラメターである。特に、無摂動次でのメトリック

$$\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\bar{N}^2 d\tau^2 + \bar{a}^2\gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{A.25}$$

はロバートソン – ウォーカーメトリック (Robertson-Walker metric) と呼ばれている。

逆行列も含めて各成分を書き下せば、

$$g_{00} = -N^2 = -\bar{N}^2(1-h_{00}) \quad , \qquad g^{00} = -\frac{1}{\bar{N}^2}\left(1+h^{00}\right), \tag{A.26}$$

$$g_{0i} = N_i = \bar{N}\bar{a}h_{0i} \quad , \qquad g^{0i} = \frac{1}{\bar{N}\bar{a}}h^{0i}, \tag{A.27}$$

$${}^{(3)}g_{ij} = \bar{a}^2\,{}^{(3)}g_{*ij} \equiv \bar{a}^2(\gamma_{ij}+h_{ij}) \quad , \qquad g^{ij} = \frac{1}{\bar{a}^2}\left(\gamma^{ij}-h^{ij}\right). \tag{A.28}$$

ここで、上つきの添字を持つ摂動量を以下のように定義した。

$$h^{00} \equiv h_{00}, \qquad h^{0i} \equiv \gamma^{ik}h_{0k}, \qquad h^{ij} \equiv \gamma^{ik}\gamma^{jl}h_{kl}, \qquad h^k_k \equiv \gamma^{kl}h_{kl}. \tag{A.29}$$

注意しておくが、線形摂動量 $h_{\mu\nu}$ の添字の上下はさして意味を持たない。単に計算の便宜上、フルのメトリック g ではなく、$\bar{a}^2$ を抜いた γ を使って上つきの添字を定義しただけである。従って、テンサー計算の際混乱してはならない。

3.2 extrinsic curvature, shear & expansion

$\boldsymbol{\sigma}, \theta$ は、それぞれ **K** のトレースレス成分、トレース成分であるため、**K** を摂動量で書き下しておけば良い。**K** は空間的テンサーであるから、(A.12) のように 4 元テンサーとしての **K** の各成分は独立ではない。従って K_{ij} を摂動量で書き下せば良く、

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -N\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2N}\left(-{}^{(3)}\dot{g}_{ij} + g_{0i|j} + g_{0j|i}\right) \\ &= -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}}{}^{(3)}g_{ij} - \frac{\bar{a}^2}{2\bar{N}}\dot{h}_{ij} + \frac{\bar{a}}{2}\left(h_{0i|j} + h_{0j|i}\right) \qquad \text{(A.30)} \\ &= -\frac{\bar{a}\dot{\bar{a}}}{\bar{N}}\left[\left(1+\frac{1}{2}h_{00}\right)\gamma_{ij} + h_{ij}\right] - \frac{\bar{a}^2}{2\bar{N}}\dot{h}_{ij} + \frac{\bar{a}}{2}\left(h_{0i|j} + h_{0j|i}\right). \qquad \text{(A.31)} \end{aligned}$$

| は、${}^{(3)}g_{ij}$ にもとづく 3 元共変微分であり、ドットは τ に関する偏微分である。(A.30) をもとに、$\boldsymbol{\sigma}, \theta$ をそれぞれ求めることができる。ここで、トレースレスな空間的テンサーを表記するため、$(T')_{ij} \equiv T_{ij} - \frac{1}{3}{}^{(3)}g_{ij}{}^{(3)}g^{kl}T_{kl}$ という量を定義する。この表記に従えば、

$$\sigma_{ij} \equiv -(K')_{ij} = \frac{\bar{a}^2}{2\bar{N}}\dot{(h')}_{ij} - \frac{\bar{a}}{2}\left[(h')_{0i|j} + (h')_{0j|i}\right], \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{\theta}{3} \equiv -\frac{1}{3}{}^{(3)}g^{kl}K_{kl} \\ &= \frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^k_k - \frac{1}{\bar{a}}h^{0k}{}_{|k}\right) \qquad (A.33) \\ &= \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^k_k - \frac{1}{\bar{a}}h^{0k}{}_{|k}\right). \qquad (A.34) \end{aligned}$$

(A.32) より $\boldsymbol{\sigma}$ は無摂動で存在せず、線形のオーダーでは $\sigma_{00} = \sigma_{0i} = 0$ であることが確かめられる。(A.33) は、線形摂動が存在する宇宙におけるハッブル定数 H の定義である。$\bar{N} = 1$ とすると、無摂動時には $H = \dot{\bar{a}}/\bar{a}$ となり、これは見慣れたハッブル定数の定義と一致する。蛇足であるが、$\boldsymbol{\sigma}, \theta/3$ は、それぞれ (A.30) のトレースレス、トレース成分であることが (A.32), (A.33) を見ても分かる。

3.3 acceleration

$\mathcal{S}_\tau$ の加速度 **A** に線形摂動を加える。(A.10) より、独立成分 A_i のみを考えれば良く、

$$A_i \equiv P^\alpha_i n_{\alpha;\beta}n^\beta = (\ln N)_{|i} = -\frac{1}{2}h_{00|i}. \tag{A.35}$$

ラプス関数の空間微分 $N_{|i}$ は、単独で線形量である。また、線形のオーダーでは $A_0 = 0$ である。

付 録B　Orthonormal Tetrad Representation

Appendix A では、空間的超曲面 $\mathcal{S}_\tau$ への射影テンサー **P** を定義して時空を $3+1$ に分解し、時空構造をあらわす種々の空間的テンサーを定義した。しかし、シフトベクター N_i の存在のために、射影された空間的テンサーが 0 成分を持ってしまい、添字に関して時間性と空間性の混在を招いた。これは、N_i によって基底の直交性 (orthogonality) が失われたためである。従って、テンサーを表現する基底を、テンサーの成分が時間的ベクター **n** 方向の成分とそれと直交する $\mathcal{S}_\tau$ 上の成分に完全に分離できるように規格直交性 (orthonormality) を持たせてとりなおしてやることで添字に物理的意味を持たせることができ、テンサーの成分が持つ意味をはっきりさせることができる。

1　Tetrad

基底を構成している 4 本のベクターを、四脚場、あるいはテトラード (tetrad) と呼ぶ。Appendix A と同様、時間方向は **n** で定義する。**n** に直交する $\mathcal{S}_\tau$ 上に、空間的基底をあらわす 3 本のトライアード (triad) $\mathbf{e}_I$ を定義する。$\mathbf{e}_I$ は $\mathcal{S}_\tau$ 上でのみ定義されており、トライアードで表現される成分は空間的な意味を持つのである。**n** とトライアードを合わせてテトラード $\mathbf{e}_a$ とし、**n** で表現される成分を時間的添字 n、$\mathbf{e}_I$ で表現されるものを空間的添字 I (or J, K, ...) とする。内積を規格直交化し、

$$g_{ab} \equiv \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \equiv \eta_{ab}. \tag{B.1}$$

各成分は、

$$e^\mu_n \equiv n^\mu = (\frac{1}{N},\ -\frac{N^i}{N}) \qquad e_{n\mu} \equiv n_\mu = (-N,\ 0,\ 0,\ 0) \qquad e^n_\mu \equiv g^{na}e_{a\mu} = -e_{n\mu} \tag{B.2}$$

$$e^\mu_I = (0,\ e^i_I) \qquad e^I_\mu = (e^I_k N^k,\ e^I_i). \tag{B.3}$$

テトラード表示と、座標基底での表示を具体的に比べれば、その有用性を簡単に知る事ができる。座標基底の表示では、任意のベクター $V^\mu = (V^0, V^i)$ の各成分の持つ時間性や空間性は、このままでは全く分からない。そこで射影操作 $V_{(n)} \equiv -n_\alpha V^\alpha = NV^0$, $V^\mu_{(\mathcal{S}_\tau)} \equiv P^\mu_\alpha V^\alpha = (0, N^iV^0 + V^i)$ を行なったのであった。一方、テトラード表示でのベクター $V^a = (V^n, V^I)$ の各成分を見ると $V^n = e^n_\alpha V^\alpha = NV^0$, $V^I = e^I_\alpha V^\alpha = e^I_i(N^iV^0 + V^i)$ であり、各々は確かに時間成分、あるいは空間成分であることが確かめられる。下つき添字に関しても同様に $V_{(\mathcal{S}_\tau)\mu} = (V_kN^k, V_i)$ に対して $V_I = e^\alpha_I V_\alpha = e^i_I V_i$ である。このように、テンサーの真に物理的な成分を見る際、テトラード表示を用いておけばあいまいさなく成分が物理的意味を持つため、有効である。

$\mathbf{e}_n$ は定義にしたがって (B.2) のように書き下せるが、$\mathbf{e}_I$ の持つ意味は何であろうか。(B.1) のように基底をとったことにより、もとの座標基底での $g_{\mu\nu}$ があらわしていた時空の計量は $\mathbf{e}_a$ におしこめられたことになる。定義より $\delta_{IJ}e^I_ie^J_j = {}^{(3)}g_{ij}$ であるので、e^I_i はすなわち ${}^{(3)}g_{ij}$ の「平方根」と思って良い。この考察より、宇宙論を記述する際には次の便利な量が定義できることに気付く。

$$\mathbf{e}^I_* \equiv \frac{\mathbf{e}^I}{\bar{a}} \qquad \mathbf{e}_{*I} \equiv \bar{a}\mathbf{e}_I. \tag{B.4}$$

つまり、一様等方な宇宙論的状況では ${}^{(3)}g_{ij} = \bar{a}^2\gamma_{ij}$ のように膨張の効果と $\mathcal{S}_\tau$ の内的な幾何学を分けられるため、${}^{(3)}g_{ij}$ の「平方根」である $\mathbf{e}^I$ から $\bar{a}$ を抜きだした「共動的 (comoving)」なトライアードを定義するのである。

2 Geometrical Quantities

Appendix A で定義した幾何量をテトラードを用いて再表示する。

2.1 general expressions

$e^\alpha_n n_{\alpha;\beta} = n^\alpha n_{\alpha;\beta} = 0$ は恒等式である。従って、テトラード表示では常に $K_{nn} = K_{nI} = \sigma_{nn} = \sigma_{nI} = A_n = 0$ である。

- 外的曲率 **K**

$$\begin{aligned} K_{IJ} &\equiv e^\alpha_I e^\beta_J n_{\alpha;\beta} = e^i_I e^j_J \frac{1}{2N}\left(-{}^{(3)}\dot{g}_{ij} + g_{0i|j} + g_{0j|i}\right) \\ &= -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}}\delta_{IJ} - \frac{1}{2N}\left(\delta_{KJ}e^i_{*I} + \delta_{IK}e^i_{*J}\right)\dot{e}^K_{*\,i} + \frac{1}{2N\bar{a}^2}e^i_{*I}e^j_{*J}\left(N_{i|j} + N_{j|i}\right), \end{aligned} \tag{B.5}$$

- 非等方膨張率 $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ} &\equiv -(K')_{IJ} \\ &= \left[\frac{1}{2N}\left(\delta_{KJ}e^i_{*I}+\delta_{IK}e^i_{*J}\right)-\frac{1}{3N}\delta_{IJ}e^i_{*K}\right]\dot{e}^K_{*\ i} \\ &\quad -\left[\frac{1}{2N\bar{a}^2}e^i_{*I}e^j_{*J}\left(N_{i|j}+N_{j|i}\right)-\frac{1}{3N}N^k_{|k}\right],\end{aligned} \tag{B.6}$$

- 等方膨張率 θ

$$\begin{aligned}H &\equiv \frac{\theta}{3}\equiv -\frac{1}{3}\delta^{KL}K_{KL} \\ &= \frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}}+\frac{1}{3N}e^i_{*K}\dot{e}^K_{*\ i}-\frac{1}{3N}\delta_{IJ}N^k_{|k},\end{aligned} \tag{B.7}$$

- 加速度 $\mathbf{A}$

$$A_I \equiv e^\alpha_I n_{\alpha;\beta}n^\beta = \frac{1}{\bar{a}}e_{*I}^{\ \ i}(\ln N)_{|i}. \tag{B.8}$$

2.2 perturbations

e^I_{*i} は ${}^{(3)}g_{*ij}=\gamma_{ij}+h_{ij}$ の平方根であるから、

$$e^I_{*i}=\bar{e}^I_{*i}+\frac{1}{2}h^I_i\ , \qquad e^i_{*I}=\bar{e}^i_{*I}-\frac{1}{2}h^i_I. \tag{B.9}$$

ただし、

$$h^I_i\equiv\delta^{IK}\bar{e}^k_{*K}h_{ik}\ , \qquad \delta_{IJ}\bar{e}^I_{*i}\bar{e}^J_{*\,j}={}^{(3)}\bar{g}_{*ij}\equiv\gamma_{ij}. \tag{B.10}$$

従って、$\dot{\bar{e}}^I_{*i}=0$ である。表記の簡便化のために座標基底の添字とテトラードの添字が混在するような量を定義したわけであるが、本来そのような量には意味はなく、物理量を計算する際には、全ての添字が同一の基底で表現されねばならない。線形量の座標表示との変換は、$\bar{\mathbf{e}}_I$ で行なうのではなく $\bar{\mathbf{e}}_{*I}$ で行なうように定義してある。

- 外的曲率 $\mathbf{K}$

$$K_{IJ} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}}\delta_{IJ}-\frac{1}{2\bar{N}}\bar{e}^i_{*I}\bar{e}^j_{*J}\dot{h}_{ij}+\frac{1}{2\bar{a}}\bar{e}^i_{*I}\bar{e}^j_{*J}\left(h_{0i|j}+h_{0j|i}\right) \tag{B.11}$$

$$= -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(1+\frac{1}{2}h_{00}\right)\delta_{IJ}-\frac{1}{2\bar{N}}\bar{e}^i_{*I}\bar{e}^j_{*J}\dot{h}_{ij}+\frac{1}{2\bar{a}}\bar{e}^i_{*I}\bar{e}^j_{*J}\left(h_{0i|j}+h_{0j|i}\right), \tag{B.12}$$

- **非等方膨張率 $\boldsymbol{\sigma}$**

$$\sigma_{IJ} = \frac{1}{2\bar{N}}\bar{e}^{i}_{*I}\bar{e}^{j}_{*J}(\dot{h}')_{ij} - \frac{1}{2\bar{a}}\bar{e}^{i}_{*I}\bar{e}^{j}_{*J}\left[(h')_{0i|j} + (h')_{0j|i}\right], \tag{B.13}$$

- **等方膨張率 θ**

$$H \equiv \frac{\theta}{3} = \frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^{k}_{k} - \frac{1}{\bar{a}}h^{0k}{}_{|k}\right) \tag{B.14}$$

$$= \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^{k}_{k} - \frac{1}{\bar{a}}h^{0k}{}_{|k}\right), \tag{B.15}$$

- **加速度 $\mathbf{A}$**

$$A_I = -\frac{1}{2\bar{a}}\bar{e}_{*I}{}^{i}h_{00|i}. \tag{B.16}$$

付 録C　The Einstein Equations

アインシュタイン方程式は、時空の構造と時間発展を記述する一般共変的なテンサー方程式であり、時空、重力場を記述するアインシュタインテンサー (Einstein tensor) **G**、物質や放射など、重力場の源を記述するストレス – エネルギーテンサー (stress-energy tensor) **T** を用いて $\mathbf{G} = 8\pi G\mathbf{T}$ とあらわされる。G は万有引力定数であり、ファクター $8\pi G$ は弱い重力場の近似でニュートン理論と一致するように決められている。この章では、Appendix A で述べた $3+1$ 分解の手法をアインシュタイン方程式に適用する。

1　Riemann Tensor

一般相対性理論では、重力場を時空の歪みとして記述する。従って、アインシュタインテンサーは時空の曲率をあらわすリーマンテンサー (Riemann tensor) を用いて記述する事ができる。ただし、リーマンテンサーの定義の仕方は文献によって違いがあるため、文献にあたる際極めて注意せねばならない。ここでは、Misner, Thorne & Wheeler (1973) に従って定義する。

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}, \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\nu\rho,\mu\sigma} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\mu\rho}\right), \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}\ , \qquad R \equiv R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \tag{C.3}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(g_{\alpha\rho,\nu} + g_{\nu\alpha,\rho} - g_{\nu\rho,\alpha}\right). \tag{C.4}$$

$R_{\mu\nu}$, R はそれぞれ特に、リッチテンサー (Ricci tensor), リッチスカラー (Ricci scalar) と呼ばれる。

以上の量を、メトリック (A.5) – (A.7) を用いて全て $3+1$ に分解する。(C.1) – (C.4) を

${}^{(3)}g_{ij}$ について求めたものは、全て (3) をつけて示す。

$$
\begin{aligned}
R_{ijkm} &= {}^{(3)}R_{ijkm} + (K_{ik}K_{jm} - K_{im}K_{jk}), && \text{(C.5)}\\
R_{ijkn} &\equiv n^{\alpha}R_{ijk\alpha} = K_{ik|j} - K_{jk|i}, && \text{(C.6)}\\
R_{injn} &\equiv n^{\alpha}n^{\beta}R_{i\alpha j\beta}\\
&= K_{ik}K^{k}_{j} + \frac{1}{N}N_{|ij}\\
&\quad + \left[\frac{1}{N}\dot{K}_{ij} - \frac{1}{N}\left(N^{k}K_{ij|k} + K_{ik}N^{k}_{|j} + K_{kj}N^{k}_{|i}\right)\right], && \text{(C.7)}\\
\Gamma^{i}_{jk} &= {}^{(3)}\Gamma^{i}_{jk} + \frac{N^{i}}{N}K_{jk}, && \text{(C.8)}\\
\Gamma^{0}_{0i} &= \frac{1}{N}\left(N_{,i} - N^{k}K_{ik}\right), && \text{(C.9)}\\
\Gamma^{0}_{ij} &= -\frac{1}{N}K_{ij}, && \text{(C.10)}\\
\Gamma^{i}_{j0} &= N^{i}{}_{|j} - \frac{1}{N}\left[N^{i}N_{,j} + ({}^{(3)}g^{ik}N^{2} - N^{i}N^{k})K_{kj}\right], && \text{(C.11)}\\
\Gamma^{0}_{00} &= \frac{1}{N}\left(\dot{N} + N^{k}N_{,k} - N^{k}N^{m}K_{km}\right), && \text{(C.12)}\\
\Gamma^{i}_{00} &= {}^{(3)}g^{ik}\left[\dot{N}_{k} + \frac{1}{2}(N^{2} - N^{m}N_{m})_{,k}\right] - \frac{N^{i}}{N}\left(\dot{N} + N^{k}N_{,k} - N^{k}N^{m}K_{km}\right). && \text{(C.13)}
\end{aligned}
$$

$|$ は ${}^{(3)}g_{ij}$ に関する 3 元共変微分である。また、有用な関係式として、

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \left(\ln\sqrt{-g}\right)_{,\mu} \qquad \text{(C.14)}$$

を挙げておく。(C.5), (C.6) はガウス – コダッチ方程式 (Gauss-Codazzi equation) と呼ばれている。時間微分を含む成分と、そうでない成分があるのに注目すべきである。時間微分を含む成分は、時空の時間発展を記述する方程式にあらわれる。一方、時間微分を含まない成分 (すなわち、ガウス – コダッチ方程式) は、各時刻毎に必ず成立している制限条件 (constraint condition) をあらわしている。

リッチテンサー、リッチスカラーを求める。ただし、$K \equiv {}^{(3)}\mathrm{Tr}\mathbf{K}$ である。

$$
\begin{aligned}
R_{nn} &= {}^{(3)}g^{ij}R_{injn} = \frac{1}{N}\left(\dot{K} - N^{k}K_{|k}\right) - K_{ij}K^{ij} + \frac{1}{N}{}^{(3)}\nabla^{2}N, && \text{(C.15)}\\
R_{in} &= {}^{(3)}g^{jk}R_{jikn} = -{}^{(3)}g^{jk}R_{ijkn} = K_{|i} - K^{k}_{i\ |k}, && \text{(C.16)}\\
R_{ij} &= -R_{injn} + {}^{(3)}g^{km}R_{ikjm}\\
&= {}^{(3)}R_{ij} + \left(KK_{ij} - K_{ik}K^{k}_{j}\right) - R_{injn}, && \text{(C.17)}\\
R &= -R_{nn} + {}^{(3)}g^{ij}R_{ij}
\end{aligned}
$$

$$= {}^{(3)}R + \left(K^2 - K_{ij}K^{ij}\right) - 2R_{nn}. \tag{C.18}$$

(C.15) を導く際、

$$\frac{1}{N}{}^{(3)}g^{ij}\dot{K}_{ij} = \frac{1}{N}\dot{K} - 2K_{ij}K^{ij} + 2K_{ij}N^{i|j} \tag{C.19}$$

を用いる事ができる。

2 Einstein tensor

2.1 general expressions

前節で求めたリーマンテンサーでアインシュタインテンサー $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ を $3+1$ 分解の枠組みで求めることができるが、ここでは物理的な意味がはっきりするよう Appendix A で導入した幾何量 $\sigma_{ij} \equiv -(K')_{ij}$, $3H \equiv \theta \equiv -K$ でアインシュタインテンサーを書き下す。$(K')_{ij} \equiv K_{ij} - \frac{1}{3}{}^{(3)}g_{ij}K$ である。

$$G_{nn} = R_{nn} + \frac{1}{2}R = 3H^2 - \sigma^2 + \frac{1}{2}{}^{(3)}R, \tag{C.20}$$

$$G_{in} = R_{in} = \left(-2H\delta^k_i + \sigma^k_i\right)_{|k}, \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}{}^{(3)}g^{ij}G_{ij} &= \frac{1}{3}{}^{(3)}g^{ij}R_{ij} - \frac{1}{2}R \\ &= -\left(2e_n\left[H\right] + 3H^2 + \sigma^2 - \frac{2}{3N}{}^{(3)}\nabla^2 N\right) - \frac{1}{6}{}^{(3)}R,\end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}\left(G'\right)^i_j &= \left(R'\right)^i_j \\ &= {}^{(3)}\left(R'\right)^i_j + e_n\left[\sigma^i_j\right] + 3H\sigma^i_j + \frac{1}{N}\left(\sigma^k_j N^i_{|k} - \sigma^i_k N^k_{|i}\right) - \frac{1}{N}\left(N'\right)^{|i}{}_{|j}.\end{aligned} \tag{C.23}$$

ここで、$e_n[H] \equiv n^\alpha \partial H/\partial x^\alpha = \dot{H}/N - N^k H_{,k}/N$, $\sigma^2 \equiv \sigma_{ij}\sigma^{ij}/2$ である。また、${}^{(3)}\nabla^2$ は 3 次元共変微分によるラプラシアンであり、${}^{(3)}\nabla^2 \equiv {}^{(3)}g^{ij}{}^{(3)}\nabla_i{}^{(3)}\nabla_j = \gamma^{ij}/a^2{}^{(3)}\nabla_i{}^{(3)}\nabla_j$ と、$1/a^2$ が含まれることに注意する* 。

* この定義は、文献によって異なる。Bardeen (1980), Kodama & Sasaki (1984) は、3 元共変微分を γ について定義し、ラプラシアンは $\gamma^{ij}{}^{(3)}\nabla_i{}^{(3)}\nabla_j$ で定義されている。従って a を含まない。

2.2 background

一様等方宇宙で、無摂動次のアインシュタインテンサーを書き下す。

$$\bar{G}_{nn} = 3\bar{H}^2 + 3\frac{\kappa}{\bar{a}^2}, \tag{C.24}$$

$$\bar{G}_{in} = 0, \tag{C.25}$$

$$\frac{1}{3}{}^{(3)}\bar{g}^{ij}\bar{G}_{ij} = -\left(\frac{2}{\bar{N}}\dot{\bar{H}} + 3\bar{H}^2\right) - \frac{\kappa}{\bar{a}^2}, \tag{C.26}$$

$$\left(\bar{G}'\right)^i_j = 0. \tag{C.27}$$

κ は、(A.3) で定義した 3 元スカラー曲率をあらわすパラメターで[†] 、

$$\frac{\kappa}{\bar{a}^2} \equiv \frac{1}{6}{}^{(3)}\bar{R}. \tag{C.28}$$

2.3 perturbations

アインシュタインテンサーに線形摂動を加え、形式的に書き下せば

$$\delta G_{nn} = 6\bar{H}\left(\delta H\right) + \frac{1}{2}\left(\delta^{(3)}R\right), \tag{C.29}$$

$$\delta G_{in} = \left[-2(\delta H)\delta^k_i + \sigma^k_i\right]_{|k}, \tag{C.30}$$

$$\delta\left(\frac{1}{3}{}^{(3)}g^{ij}G_{ij}\right) = -\left\{2e_n\left[(\delta H)\right] + 6\bar{H}(\delta H) - \frac{2}{3}A_k{}^{|k}\right\} - \frac{1}{6}\left(\delta^{(3)}R\right), \tag{C.31}$$

$$(\delta G')^i_j = e_n\left[\sigma^i_j\right] + 3\bar{H}\sigma^i_j - \left(A^i{}_{|j} - \frac{1}{3}\delta^i_j A_k{}^{|k}\right) + \left(\delta^{(3)}R'\right)^i_j. \tag{C.32}$$

各々の幾何量の摂動は、メトリックであらわすことができる。(A.32), (A.34), (A.35) より

$$\sigma_{ij} = \frac{\bar{a}^2}{2\bar{N}}\dot{(h')}_{ij} - \frac{\bar{a}}{2}\left[(h')_{0i|j} + (h')_{0j|i}\right], \tag{C.33}$$

$$\delta H = \bar{H}\frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^k_k - \frac{1}{\bar{a}}h^{0k}{}_{|k}\right), \tag{C.34}$$

$$A_i = -\frac{1}{2}h_{00|i}. \tag{C.35}$$

また、3 次元曲率テンサー ${}^{(3)}\mathbf{R}$ に摂動を与えることにより

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}R^i_{jkm} &= \delta^{(3)}\Gamma^i_{jm|k} - \delta^{(3)}\Gamma^i_{jk|m} \\ &= \frac{1}{2}\left[{}^{(3)}\nabla_k, {}^{(3)}\nabla_m\right]h^i_j + \frac{1}{2}\left(h^i_{m|jk} - h^i_{k|jm}\right) + \frac{\bar{a}^2}{2}\left(h_{jk}{}^{|i}{}_{|m} - h_{jm}{}^{|i}{}_{|k}\right).\end{aligned} \tag{C.36}$$

[†] Appendix A の脚注でも触れたが、Bardeen (1980), Kodama & Sasaki (1983) が用いている ${}^{(3)}R$ は γ について定義されているため、a を含まない。

$\bar{a}^2$ の違いがあらわれるのは、h_{ij} は γ_{ij} で添字を上下するのに対し、${}^{(3)}\nabla_i$ の添字は ${}^{(3)}\bar{g}_{ij} = \bar{a}^2\gamma_{ij}$ で上下するように定義したからである‡ 。共変微分は交換しないことにも注意しなければならない。また、

$$\delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}{}^{(3)}\gamma^{il}\left(h_{lj|k} + h_{lk|j} - h_{jk|l}\right), \tag{C.37}$$

$$\left[{}^{(3)}\nabla_k, {}^{(3)}\nabla_m\right] h^i_j = {}^{(3)}\bar{R}^i_{lkm}h^l_j - {}^{(3)}\bar{R}^l_{jkm}h^i_l \tag{C.38}$$

$$= \kappa\left(\delta^i_k h_{mj} - \delta^i_m h_{kj} + \gamma_{jm}h^i_k - \gamma_{jk}h^i_m\right). \tag{C.39}$$

(C.39) は、(A.1) より導ける。(C.38) は h_{ij} がテンサーであることを暗に前提としているが、実際、h_{ij} は無摂動次のローレンツ変換に対してテンサーのようにふるまうことを示すことができる (Shutz 1988)。リッチテンサー、リッチスカラーの摂動はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
\delta^{(3)}R^i_k &= -\frac{1}{\bar{a}^2}h^{jm}\bar{R}^i_{jkm} + \frac{1}{\bar{a}^2}\gamma^{jm}\left(\delta^{(3)}R^i_{jkm}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(h_l^{i|l}{}_{|k} - h_k^{i}{}_{|l}^{|l} + h_k^{l}{}_{|l}^{|i} - h_l^{l|i}{}_{|k}\right) - \frac{\kappa}{2\bar{a}^2}\left(\delta^i_k h^l_l + h^i_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(h_l^{i|l}{}_{|k} + h^l_{k|l}{}^{|i} - h_k^{i}{}_{|l}^{|l} - h_l^{l|i}{}_{|k}\right) + \frac{\kappa}{\bar{a}^2}\left(h^i_k - \delta^i_k h^l_l\right), \qquad \text{(C.40)} \\
\delta^{(3)}R &= h_l^{k|l}{}_{|k} - h_k^{k|l}{}_{|l} - \frac{2\kappa}{\bar{a}^2}h^k_k. \qquad \text{(C.41)}
\end{aligned}$$

(C.40) は、後の計算のために共変微分の順序を入れ替えた。

3 Stress-Energy Tensor

アインシュタイン方程式の右辺は、重力場をつくっているソースを記述するストレス – エネルギーテンサー $\mathbf{T}$ である。今、ソースとして流体を考えれば

$$\mathbf{T} = \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{J}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{J} + p\mathbf{P}^{(u)} + \mathbf{\Pi}. \tag{C.42}$$

ρ, $\mathbf{J}$, p, $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{u}$ はそれぞれ、流体素片のエネルギー密度, エネルギー流束, 圧力, 非等方ストレス, 4 元速度である。$\mathbf{P}^{(u)} \equiv \mathbf{g} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ は、流体の流線に直交する面上への射影テンサーである。(C.42) を別の表現で書けば

$$\rho = u^\alpha T_{\alpha\beta}u^\beta, \tag{C.43}$$

‡ しつこいように感じるかもしれないが、このような定義は文献によってまったく任意である。よって、文献を読む際、常にどのような定義でテンサーが扱われているかに、細心の注意を払わねばならない。この Appendix の目的はまさにそこにあり、各文献とすぐに比較できるような枠組を提供している。

$$J_\mu = -u^\alpha T_{\alpha\beta} P^{(u)\beta}_{\ \ \mu}, \tag{C.44}$$

$$pP^{(u)}_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} = P^{(u)\alpha}_{\ \ \mu} T_{\alpha\beta} P^{(u)\beta}_{\ \ \nu}. \tag{C.45}$$

T の各成分を具体的に書き下すには、流体素片の 4 元速度 **u** を選ばねばならない。今、流体素片の持つ 3 元速度 (線形オーダー) を

$$v^i \equiv \bar{a} u^i \qquad \text{小玉 (1990)}$$

のように定義する。残りの成分は **u**·**u** $= -1$ の条件より求まり、

$$u^\mu = \left(\frac{1}{N},\ \frac{v^i}{\bar{a}} \right), \qquad u_\mu = \left(-N,\ \bar{a} v_i + \frac{N_i}{N} \right). \tag{C.46}$$

下つき添字の v_i は、$v_i \equiv \gamma_{ik} v^k$ で定義した。メトリックの線形摂動であらわせば、

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\bar{N}} \left(1 + \frac{1}{2} h_{00} \right),\ \frac{v^i}{\bar{a}} \right), \qquad u_\mu = \left(-\bar{N} \left(1 - \frac{1}{2} h_{00} \right),\ \bar{a} \left(v_i + h_{0i} \right) \right). \tag{C.47}$$

射影テンサーは

$$P^{(u)0}_{\ \ 0} = 0, \quad P^{(u)0}_{\ \ i} = \left(\frac{\bar{a}}{\bar{N}} \right) \left(v_i + h_{0i} \right), \quad P^{(u)i}_{\ \ 0} = -\frac{\bar{N}}{\bar{a}} v^i, \quad P^{(u)i}_{\ \ j} = \delta^i_j. \tag{C.48}$$

以上より、ストレス – エネルギーテンサーの各成分を求めれば

$$\rho = -T^0_0, \tag{C.49}$$

$$J_i = \bar{N} \left[T^0_i - \left(\frac{\bar{a}}{\bar{N}} \right) \bar{\rho} (1 + w) \left(v_i + h_{0i} \right) \right], \tag{C.50}$$

$$J^i = -\frac{1}{\bar{N}} \left[T^i_0 + \bar{\rho} (1 + w) \frac{\bar{N}}{\bar{a}} v^i \right], \tag{C.51}$$

$$p = \frac{1}{3} T^k_k, \tag{C.52}$$

$$\Pi^i_j = \left(T' \right)^i_j. \tag{C.53}$$

w は状態方程式をあらわすパラメターであり、$w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$ と定義される。今、流体素片のエネルギーは流線 **u** に沿って運ばれており、**u** に直交する面上を流れない (熱伝導による散逸がない) とするならば、$\mathbf{J}^{(u)} = 0$ であるので[§] 、ストレス – エネルギーテンサーは

$$T^0_0 = -\left(\bar{\rho} + \delta\rho \right), \tag{C.54}$$

[§] これは流体素片として完全流体を選んだことと等価であるが、**n** に垂直な面上に射影した場合には $\mathbf{J}^{(n)} \neq 0$ である。

$$T_i^0 = \left(\frac{\bar{a}}{\bar{N}}\right)\bar{\rho}(1+w)\left(v_i + h_{0i}\right), \tag{C.55}$$

$$T_0^i = -\bar{\rho}(1+w)\frac{\bar{N}}{\bar{a}}v^i, \tag{C.56}$$

$$\frac{1}{3}T_k^k = \bar{p} + \delta p, \tag{C.57}$$

$$(T')_j^i = \Pi_j^i. \tag{C.58}$$

また、**n** に関する成分に変換しておけば

$$T_n^n = e_\alpha^n e_n^\beta T_\beta^\alpha = T_0^0 = -\left(\bar{\rho} + \delta\rho\right), \tag{C.59}$$

$$T_I^n = e_\alpha^n e_I^\beta T_\beta^\alpha = e_I^i \bar{N} T_i^0 = e_I^i \bar{a}\bar{\rho}(1+w)\left(v_i + h_{0i}\right), \tag{C.60}$$

$$T_n^I = -e_i^I \bar{a}\bar{\rho}(1+w)\left(v^i + h^{0i}\right), \tag{C.61}$$

$$\frac{1}{3}T_K^K = \frac{1}{3}T_k^k = \bar{p} + \delta p, \tag{C.62}$$

$$(T')_J^I = e_i^I e_J^j (T')_j^i = e_i^I e_J^j \Pi_j^i. \tag{C.63}$$

座標成分と異なり、(C.60), (C.61) は双方ともシフトベクターを含む。(C.61) に、(C.56) に存在しなかったシフトベクターが現われたのは、時間軸に沿う観測者から見て、流体素片は速度 $v^i + N^i$ で運動しているように見えるからである。$\mathbf{e}^I$ は (B.4) で定義したトライアード (triad) である。

4 Einstein equations

前節までの結果を用い、アインシュタイン方程式の成分を全て書き下しておく。

4.1 background equations

$$\bar{H}^2 + \frac{\kappa}{\bar{a}^2} = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}, \tag{C.64}$$

$$\frac{2}{\bar{N}}\dot{\bar{H}} + 3\bar{H}^2 + \frac{\kappa}{\bar{a}^2} = -8\pi G\bar{p}. \tag{C.65}$$

これらより 3 次元曲率の項を消去すれば、宇宙膨張の加速度をあらわす式:

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\bar{H}} + \bar{H}^2 = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}(1+3w). \tag{C.66}$$

を得る。

4.2 perturbed equations

$$2\bar{H}\,(\delta H) + \frac{1}{6}\left(\delta^{(3)}R\right) = \frac{8\pi G}{3}\,(\delta\rho)\,, \tag{C.67}$$

$$(\delta H)_{|i} - \frac{1}{2}\sigma^{k}_{i|k} = 4\pi G\bar{a}\bar{\rho}(1+w)\,(v_i + h_{0i})\,, \tag{C.68}$$

$$e_n\,[\delta H] + 3\bar{H}(\delta H) - \frac{1}{3}A_k{}^{|k} + \frac{1}{12}\left(\delta^{(3)}R\right) = -4\pi G\,(\delta p)\,, \tag{C.69}$$

$$e_n\left[\sigma^i_j\right] + 3\bar{H}\sigma^i_j - \left(A^i{}_{|j} - \frac{1}{3}\delta^i_j A_k{}^{|k}\right) + \left(\delta^{(3)}R'\right)^i_j = 8\pi G\Pi^i_j. \tag{C.70}$$

(C.67), (C.69) は等方膨張率の制限条件と発展方程式を、(C.68), (C.70) は非等方膨張に対するそれを、それぞれ記述している。このように、方程式をメトリックそのものではなく、幾何的に意味のある量で書き下すことにより、ストレス – エネルギーテンサーの各成分が重力場のどの部分に寄与するかが、明らかとなる。

(C.67), (C.69) より 3 次元曲率の項を消去すれば

$$e_n\,[\delta H] + 2\bar{H}\,(\delta H) - \frac{1}{3}A_k{}^{|k} = -\frac{4\pi G}{3}\,[(\delta\rho) + 3(\delta p)]. \tag{C.71}$$

付 録D　Gauge

1　Gauge Transformation

アインシュタイン方程式は、任意の座標系をとることが可能である。従って、問題を解くのに最も適した座標系を用いることで計算の見通しを良くしたり、計算効率を上げることができる。しかし、一方で座標変換の任意性は、何が一体物理的な結果であって何が座標に依存した非物理的な結果であるのかをあいまいにする困難を含んでいる。そのような座標変換の中で、特に良く知られているのが「ゲージ変換」である。

ゲージ変換とは、座標 $\{x^\mu\}$ に対する微小変換 $\xi \ll 1$:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{D.1}$$

の意味で使われている言葉である* 。座標に依存するスカラー, ベクター, テンサーはそれぞれ座標変換によって変換を受けてその関数形を変える事になるが、アインシュタイン方程式は **G** の変換によって生じた項と **T** の変換が相殺しあうため座標変換に対して不変であり、これが任意の座標変換を許すのである。

ゲージ変換が問題にされるのは、特に摂動解析においてである。例えば、メトリックに対する座標変換:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x') \;=\; \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \approx g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha_{,\mu} g_{\alpha\nu}(x) - \xi^\beta_{,\nu} g_{\mu\beta}(x)$$

を考える。ここで、混乱を防ぐため特に記号に注意をはらい、ダッシュは「座標系の変換」を、チルダーは「関数形の変化」を示している。メトリックに線形摂動 $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ を与えれば

$$\begin{aligned} & \tilde{\bar{g}}_{\mu\nu}(x') + \widetilde{\delta g}_{\mu\nu}(x') \\ \approx\; & \tilde{\bar{g}}_{\mu\nu}(x) + \xi^\alpha \tilde{\bar{g}}_{\mu\nu,\alpha}(x) + \widetilde{\delta g}_{\mu\nu}(x') = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha_{,\mu}\bar{g}_{\alpha\nu}(x) - \xi^\alpha_{,\nu}\bar{g}_{\mu\alpha}(x). \end{aligned} \tag{D.2}$$

* Weinberg (1972) では $x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$. (Weinberg 1972, pp.291)

対応するオーダーをとれば

$$\tilde{\bar{g}}_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x), \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta g}_{\mu\nu}(x') &= \delta g_{\mu\nu}(x) - \xi^{\alpha}_{,\mu} g_{\alpha\nu}(x) - \xi^{\alpha}_{,\nu} g_{\mu\alpha}(x) - \xi^{\alpha} \tilde{\bar{g}}_{\mu\nu,\alpha}(x) \\ &= \delta g_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}.\end{aligned} \tag{D.4}$$

; は 4 元共変微分である。すなわち、非摂動次はゲージ変換で「関数形」を変えないが、摂動次は ξ によって「関数形」が変化してしまうことになる。新たに加わった ξ も摂動として作用するため、任意のゲージ変換は無限個の可能な摂動のパターンをつくる事ができ、摂動の物理的なモードを同定することが難しくなってしまうのである。

1.1 Lie derivative

ゲージ変換による関数形の変化は、違った視点から定式化することが可能である (Weinberg 1972, pp.291)。そのための数学的準備として、リー微分 (Lie derivative) を定義する。

一般相対論は、曲がった時空の幾何学である。曲がった時空では異なる 2 つの時空点で定義されたテンサーの和および差を定義することはできないため、片方をもう片方と同じ時空点まで平行移動し、同一時空点において比較せねばならない。平行移動の方法は用途に応じていくつかあるが、ここではそのうちの一つである「リー移動 (Lie dragging)」をとりあげる。

まず、時空上の異なる 2 点 A, B を考える。AB 間をパラメター λ で表されるなめらかな曲線 $\mathbf{x}(\lambda)$ で結び、曲線上の接ベクター $\boldsymbol{\xi} \equiv d\mathbf{x}/d\lambda$ を定義する。今、AB 間は微小間隔 $\delta\lambda$ だけ離れているとすると、A, B の座標はそれぞれ $\mathbf{x}_A \equiv \mathbf{x}(\lambda_0)$, $\mathbf{x}_B \equiv \mathbf{x}(\lambda_0+\delta\lambda) = \mathbf{x}_A + \boldsymbol{\xi}\delta\lambda + O(\delta\lambda^2)$ となる。

今、時空点の関数であるベクター $\mathbf{V}(x)$ を考える。$\mathbf{V}(x_A)$ と $\mathbf{V}(x_B)$ の差を測るためには同一時空点で両者を比較せねばならないため、$\mathbf{V}(x_B)$ を x_A まで平行移動させたものを $\tilde{\mathbf{V}}(x_A)$ とする。この平行移動によって関数形は変化するはずであり、従ってチルダーを付与した。

リー移動は、$\tilde{\mathbf{V}}(x_A)$ と $\mathbf{V}(x_A)$ の差を以下のように与える。

$$\tilde{\mathbf{V}}(x_A) - \mathbf{V}(x_A) = \left\{ (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\xi} \right\}\big|_A \delta\lambda \equiv [\boldsymbol{\xi}, \mathbf{V}]\,\delta\lambda \tag{D.5}$$

ここで $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ は「リー括弧」と呼ばれている。リー括弧がゼロであれば、$\mathbf{V}(x_A)$ と $\mathbf{V}(x_B)$ は互いにリー移動の関係、すなわち平行という事になる。

これで、異なる時空点にあるベクター **V** をリー移動によって移動し、同一時空点で比較できるようになった。これをリー微分 (Lie derivative) と定義し、成分で書けば

$$\mathcal{L}_\xi V^\mu(x) \equiv \lim_{\delta\lambda\to 0} \frac{\tilde{V}^\mu(x) - V^\mu(x)}{\delta\lambda} = \xi^\alpha V^\mu_{;\alpha} - V^\alpha \xi^\mu_{;\alpha}. \tag{D.6}$$

リー微分の意味はすなわち、「微小変換 ξ によって生じた『関数形』の変化の、同一時空点における比較」ということになる。ベクター以外のものについても同様な議論の結果、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi \Psi &= \xi^\alpha \Psi_{,\alpha}, && \text{(D.7)}\\
\mathcal{L}_\xi V_\mu &= \xi^\alpha V_{\mu;\alpha} + V_\alpha \xi^\alpha_{;\mu}, && \text{(D.8)}\\
\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} &= \xi^\alpha T_{\mu\nu;\alpha} + T_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{;\nu} + T_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{;\mu}, && \text{(D.9)}\\
\mathcal{L}_\xi T^\mu_\nu &= \xi^\alpha T^\mu_{\nu;\alpha} - T^\alpha_\nu \xi^\mu_{;\alpha} + T^\mu_\alpha \xi^\alpha_{;\nu}, && \text{(D.10)}\\
\mathcal{L}_\xi T^{\mu\nu} &= \xi^\alpha T^{\mu\nu}_{;\alpha} - T^{\alpha\nu}\xi^\mu_{;\alpha} - T^{\mu\alpha}\xi^\nu_{;\alpha}. && \text{(D.11)}
\end{aligned}$$

を得る。規則は「上つきはマイナス, 下つきはプラス」である。共変微分の規則とは逆であるから気をつける。また、リー微分の中の共変微分は、全て偏微分にすることができる (もちろんその逆も可能)。ここで、(D.9) と (D.4) の類似性に気付くであろうか[†] 。事実、線形摂動量のゲージ変換 $x \to x' = x + \xi$: $\delta Q(x) \to \widetilde{\delta Q}(x')$ に対して常に

$$-\mathcal{L}_\xi \bar{Q}(x) = \widetilde{\delta Q}(x') - \delta Q(x) \tag{D.12}$$

である。線形摂動量の、ゲージ変換による「関数形の変化」は、すなわちリー微分なのである。注意せねばならないが、$\widetilde{\delta Q}(x')$ と $\delta Q(x)$ は同一時空点の量であり、x, x' は、単なる座標の張りかえである。

(D.12) を証明することは重要である。例として、再びベクターを考える。

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta Q}^\mu(x') - \delta Q^\mu(x) &= \left[\tilde{Q}^\mu(x') - \bar{Q}^\mu(x')\right] - \left[Q^\mu(x) - \bar{Q}^\mu(x)\right] \\
&= \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} Q^\alpha(x) - \bar{Q}^\mu(x) - \xi^\alpha \bar{Q}^\mu_{,\alpha}\right] - \left[Q^\mu(x) - \bar{Q}^\mu(x)\right] && \text{(D.13)}\\
&= Q^\alpha \xi^\mu_{,\alpha} - \xi^\alpha \bar{Q}^\mu_{,\alpha} = -\mathcal{L}_\xi \bar{Q}(x). && \text{(D.14)}
\end{aligned}$$

(D.13) の座標変換はゲージ変換であってリー移動ではない。(D.14) が意味するところは何であろうか。摂動を受けた時空で摂動量を定義する際には、無摂動時空において対応する

[†] メトリックの共変微分は、常にゼロである。$g_{\mu\nu;\alpha} \equiv 0$.

ものとの比較 (および差) で定義する。しかし、この対応関係はゲージに依存するのである。言いかえれば、摂動時空で同一点だと思っていた点は、ゲージ変換後、対応する無摂動時空において必ずしも同一点ではないため、リー微分によって差をとらねばならないのである。

1.2 gauge transformation: metric perturbations

メトリックの線形摂動 (A.23) をゲージ変換する。処方箋は、リー微分 $\mathcal{L}_\xi \bar{g}$ を求め、$\widetilde{\delta g} = \delta g - \mathcal{L}_\xi \bar{g}$ に代入するだけである。

$$\tilde{h}_{00} = h_{00} + \frac{2}{\bar{N}}\left(\bar{N}\xi^0\right)^{\cdot}, \tag{D.15}$$

$$\tilde{h}_{0i} = h_{0i} + \frac{\bar{N}}{\bar{a}}\xi^0_{|i} - \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\dot{\xi}_i, \tag{D.16}$$

$$\frac{1}{3}\tilde{h}^k_k = \frac{1}{3}h^k_k - 2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\xi^0 - \frac{2}{3}\xi^k_{|k}, \tag{D.17}$$

$$\left(\tilde{h}'\right)_{ij} = (h')_{ij} - (\xi')_{i|j} - (\xi')_{j|i}\,. \tag{D.18}$$

線形量である ξ^i の添字は、h_{ij} と同様に宇宙膨張を抜いた 3 次元メトリック $\gamma_{ij} \equiv {}^{(3)}\bar{g}_{ij}/\bar{a}^2$ で上下するように定義した。$\xi_i \equiv \gamma_{ik}\xi^k$。また、$(h')_{ij} \equiv h_{ij} - \gamma_{ij}h^k_k/3$ である。

1.3 gauge transformation: stress-energy perturbations

ストレスー – エネルギーテンサーも同様にゲージ変換を行なうことができる。リー微分は (D.10) で行ない、摂動量 (C.54) – (C.58) を変換すれば

$$\widetilde{\delta\rho} = \delta\rho - \dot{\bar{\rho}}\xi^0, \tag{D.19}$$

$$\tilde{v}^i = v^i + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\dot{\xi}^i, \tag{D.20}$$

$$\widetilde{\delta p} = \delta p - \dot{\bar{p}}\xi^0, \tag{D.21}$$

$$\tilde{\Pi}^i_j = \Pi^i_j. \tag{D.22}$$

Π^i_j は、ゲージ変換でその「関数形」を変えず、従って「ゲージ不変 (gauge invariant)」と呼ばれる。

1.4 gauge invariance

ゲージ自由度は、宇宙論的な摂動論を展開する際、常に問題であった。なぜならば、ゲージ自由度が問題となるのは一般相対論的取り扱いが必要な場合であり、ホライズンを超えるようなスケールの摂動の進化を追う場合には避けては通れない問題だからである。ゲージ自由度が適切に扱われないと物理的でない摂動のモードがあらわれてしまい、物理的解釈に混乱を招く。このような困難を回避するため、1980 年に Bardeen (Bardeen 1980) によってゲージ不変 (gauge invariant) 摂動論が提唱された。これは、いかなる ξ のゲージ変換に対しても摂動量の関数形が不変に保たれるようなセットを選びだし、それを物理的なものとして扱う手法である。

「ゲージ不変」であるとはすなわち、$x \to x' = x + \xi$ に対し摂動量 δQ が「関数形を変えない」、すなわち (D.12) より

$$-\mathcal{L}_\xi \bar{Q}(x) = \widetilde{\delta Q}^\mu(x') - \delta Q^\mu(x) = 0 \tag{D.23}$$

を満たす、ということである。

2 Family of Perturbations

摂動はスカラー (S), ベクター (V), テンサー (T) モードに一意に分けることができ、微分演算子に対する各々の性質はモード関数 (ラプラシアンの固有関数) Q [‡] によって特徴づけることができる。この節で定義する摂動量の記法は基本的に Bardeen (1980) に沿っているが、他の文献との比較が容易なように Appendix J に対応表をのせておく。

- メトリック

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\bar{N}^2\left[1 - h_{00}^{(S)}\right] d\tau^2 \\ &\quad +2\bar{N}\bar{a}\left[h_{0i}^{(S)} + h_{0i}^{(V)}\right] d\tau dx^i \\ &\quad +\bar{a}^2\left[\gamma_{ij} + h_{ij}^{(S)} + h_{ij}^{(V)} + h_{ij}^{(T)}\right] dx^i dx^j. \end{aligned} \tag{D.24}$$

- ストレス – エネルギーテンサー

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho^{(S)} = \bar{\rho}\left(1 + \delta^{(S)}\right), \tag{D.25}$$

[‡] Kodama & Sasaki (1984) では Y。

$$p = \bar{p} + \delta p^{(S)}, \tag{D.26}$$
$$v_i = v_i^{(S)} + v_i^{(V)}, \tag{D.27}$$
$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(S)} + \Pi_{ij}^{(V)} + \Pi_{ij}^{(T)}. \tag{D.28}$$

- ゲージ変換

$$\xi^0 = \xi^{0(S)}, \tag{D.29}$$
$$\xi_i = \xi_i^{(S)} + \xi_i^{(V)}. \tag{D.30}$$

2.1 scalar mode

- モード関数

$${}^{(3)}\nabla_*^2 Q^{(0)} = -k^2 Q^{(0)}, \tag{D.31}$$
$$Q_i^{(0)} = -\frac{1}{k}{}^{(3)}\nabla_{*i} Q^{(0)}, \tag{D.32}$$
$$Q_{ij}^{(0)} = \left(\frac{1}{k^2}{}^{(3)}\nabla_{*i}{}^{(3)}\nabla_{*j} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}\right) Q^{(0)}. \tag{D.33}$$

k は摂動をフーリエ展開したときの共動波数 (comoving wavenumber) であり、$*$ のついた ${}^{(3)}\nabla_*$ は全て一様等方膨張 $\bar{a}$ を抜いて定義された 3 元共変微分演算子である[§]。具体的に書けば、

$${}^{(3)}\nabla_{*i} = {}^{(3)}\nabla_i, \tag{D.34}$$
$${}^{(3)}\nabla_*^i = \bar{a}^2{}^{(3)}\nabla^i = \gamma^{ik}{}^{(3)}\nabla_k, \tag{D.35}$$
$${}^{(3)}\nabla_*^2 = \bar{a}^2{}^{(3)}\nabla^2 = \gamma^{ij}{}^{(3)}\nabla_i{}^{(3)}\nabla_j. \tag{D.36}$$

また、$Q_i^{(0)}$, $Q_{ij}^{(0)}$ の微分は

$$Q_k^{(0)|k} = \frac{k}{\bar{a}^2} Q^{(0)}, \tag{D.37}$$
$$Q_i^{(0)|k}{}_{|k} = -\frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 - 2\kappa\right) Q_i^{(0)}, \tag{D.38}$$
$$Q_{ik}^{(0)|k} = \frac{2}{3\bar{a}^2} k^{-1}\left(k^2 - 3\kappa\right) Q_i^{(0)}, \tag{D.39}$$
$$Q_{ik}^{(0)|k}{}_{|j} = -\frac{2}{3\bar{a}^2}\left(k^2 - 3\kappa\right)\left(Q_{ij}^{(0)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij} Q^{(0)}\right), \tag{D.40}$$
$$Q_{ij}^{(0)|k}{}_{|k} = -\frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 - 6\kappa\right) Q_{ij}^{(0)}. \tag{D.41}$$

[§] 従って Q は、Bardeen (1980) の Q、Kodama & Sasaki (1984) の Y と同じ定義である。

$\bar{a}^{-2}$ は、上付き添字の共変微分に含まれているものである。∇_* に関する微分であれば $\bar{a}^{-2}$ は必要ない[¶] 。

- ゲージ変換

$$\xi^{0(S)} = TQ^{(0)}, \tag{D.42}$$
$$\xi_i^{(S)} = L^{(0)}Q_i^{(0)}. \tag{D.43}$$

- メトリック
  - 定義

$$h_{00}^{(S)} = -2AQ^{(0)}, \tag{D.44}$$
$$h_{0i}^{(S)} = -B^{(0)}Q_i^{(0)}, \tag{D.45}$$
$$h_{ij}^{(S)} = 2H_L Q^{(0)}\gamma_{ij} + 2H_T^{(0)}Q_{ij}^{(0)}. \tag{D.46}$$

  - ゲージ変換性

$$\tilde{A} = A - \frac{\dot{\bar{N}}}{\bar{N}}T - \dot{T}, \tag{D.47}$$
$$\tilde{B}^{(0)} = B^{(0)} + k\frac{\bar{N}}{\bar{a}}T + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\dot{L}^{(0)}, \tag{D.48}$$
$$\tilde{H}_L = H_L - \bar{N}\bar{H}T - \frac{k}{3}L^{(0)}, \tag{D.49}$$
$$\tilde{H}_T^{(0)} = H_T^{(0)} + kL^{(0)}. \tag{D.50}$$

- 幾何量
  - 定義[‖]

$$\mathcal{K}_g \equiv -A + \frac{1}{\bar{N}\bar{H}}\dot{H}_L + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)B^{(0)}, \tag{D.51}$$
$$\sigma_g^{(0)} \equiv -B^{(0)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\frac{\dot{H}_T^{(0)}}{k}, \tag{D.52}$$
$$\mathcal{R} \equiv H_L + \frac{1}{3}H_T^{(0)}. \tag{D.53}$$

[¶] Kodama & Sasaki (1984) と比較のこと。

[‖] 添字の上下に注意する。幾何量はフルのメトリック ${}^{(3)}g$ で上下させるが、モード関数は γ で上下するように定義している。

それぞれのテンサーとの対応は、

$$\delta H = \bar{H}\mathcal{K}_g Q^{(0)}, \tag{D.54}$$
$$\sigma^{(S)}_{ij} = \bar{a}k\sigma^{(0)}_g Q^{(0)}_{ij}, \tag{D.55}$$
$$\sigma^{(S)i}_{\ \ j} = \frac{k}{\bar{a}}\sigma^{(0)}_g Q^{(0)i}_{\ \ j}, \tag{D.56}$$
$$A_i = -kAQ^{(0)}_i, \tag{D.57}$$
$$\left(\delta^{(3)}R'\right)^{(S)}_{ij} = -k^2\mathcal{R}Q^{(0)}_{ij}, \tag{D.58}$$
$$\left(\delta^{(3)}R'\right)^{(S)\ i}_{\ \ j} = -\left(\frac{k}{\bar{a}}\right)^2\mathcal{R}Q^{(0)i}_{\ \ j}, \tag{D.59}$$
$$\delta^{(3)}R = \frac{4}{\bar{a}^2}\left(k^2-3\kappa\right)\mathcal{R}Q^{(0)}. \tag{D.60}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{\mathcal{K}}_g = \mathcal{K}_g - \frac{\dot{\bar{H}}}{\bar{H}}T + \frac{\bar{N}}{3\bar{H}}\left(\frac{k}{\bar{a}}\right)^2 T, \tag{D.61}$$
$$\tilde{\sigma}^{(0)}_g = \sigma^{(0)}_g - \frac{\bar{N}}{\bar{a}}kT, \tag{D.62}$$
$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \bar{N}\bar{H}T. \tag{D.63}$$

$\mathcal{K}_g$ は等方膨張率の摂動の大きさを、σ_g は非等方膨張率のポテンシャルを、それぞれあらわしている。また、A はそのまま加速度 A_i のポテンシャルとなっており、$h^{(S)}_{00}$ は単独で「超曲面 $\mathcal{S}_\tau$ 上の加速度をになうポテンシャル」という物理的な意味を持っている。$\mathcal{R}$ は内的曲率 (intrinsic curvature) のゆらぎのポテンシャルである。このように、メトリック摂動は単独で物理的意味を持たず、あるコンビネーションで幾何学的/物理的な意味を持っているのである。従って、摂動方程式もメトリックそのもので書くのではなく、これらの幾何学的諸量で書くことによって見通しが良くなるし、間違いも犯しにくい。

- ストレス – エネルギーテンサー

– 定義

$$\delta^{(S)} = \sum_f \delta_f Q^{(0)}, \tag{D.64}$$
$$v^{(S)}_i = \sum_f v^{(0)}_f Q^{(0)}_i, \tag{D.65}$$

$$\delta p^{(S)} = \sum_f \delta p_f Q^{(0)}, \tag{D.66}$$

$$\Pi^{(S)i}_{\ j} = \sum_f \bar{p}_f \pi_f^{(0)} Q^{(0)i}_{\ j}. \tag{D.67}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{\delta}_f = \delta_f - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} T, \tag{D.68}$$

$$\tilde{\delta} = \delta + 3(1+w)\bar{N}\bar{H}T, \tag{D.69}$$

$$\tilde{v}_f^{(0)} = v_f^{(0)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}} \dot{L}^{(0)}, \tag{D.70}$$

$$\widetilde{\delta p}_f = \delta p_f - \dot{\bar{p}}_f T, \tag{D.71}$$

$$\tilde{\pi}_f^{(0)} = \pi_f^{(0)}. \tag{D.72}$$

2.2 vector mode

- モード関数

$$^{(3)}\nabla_*^2 Q_i^{(1)} = -k^2 Q_i^{(1)}, \tag{D.73}$$

$$^{(3)}\nabla_*^i Q_i^{(1)} = 0, \tag{D.74}$$

$$Q_{ij}^{(1)} = -\frac{1}{2k}\left(\nabla_{*i} Q_j^{(1)} + \nabla_{*j} Q_i^{(1)}\right). \tag{D.75}$$

$$Q_{ik}^{(1)|k} = \frac{1}{2\bar{a}^2} k^{-1}\left(k^2 - 2\kappa\right) Q_i^{(1)}, \tag{D.76}$$

$$Q_{ik}^{(1)|k}{}_{|j} + Q_{jk}^{(1)|k}{}_{|i} = -\frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 - 2\kappa\right) Q_{ij}^{(1)}, \tag{D.77}$$

$$Q_{ij}^{(1)|k}{}_{|k} = -\frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 - 4\kappa\right) Q_{ij}^{(1)}. \tag{D.78}$$

- ゲージ変換

$$\xi_i^{(V)} = L^{(1)} Q_i^{(1)}. \tag{D.79}$$

- メトリック

– 定義

$$h_{0i}^{(V)} = -B^{(1)} Q_i^{(1)}, \tag{D.80}$$

$$h_{ij}^{(V)} = 2H_T^{(1)} Q_{ij}^{(1)}. \tag{D.81}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{B}^{(1)} = B^{(1)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\dot{L}^{(1)}, \tag{D.82}$$

$$\tilde{H}_T^{(1)} = H_T^{(1)} + kL^{(1)}. \tag{D.83}$$

- 幾何量

– 定義

$$\sigma_g^{(1)} \equiv -B^{(1)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\frac{\dot{H}_T^{(1)}}{k}. \tag{D.84}$$

$$\sigma_{ij}^{(V)} = \bar{a}k\sigma_g^{(1)}Q_{ij}^{(1)}, \tag{D.85}$$

$$\sigma^{(V)i}{}_j = \frac{k}{\bar{a}}\sigma_g^{(1)}Q^{(1)i}{}_j, \tag{D.86}$$

$$\delta^{(3)}R^{(V)i}{}_j = 0. \tag{D.87}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{\sigma}_g^{(1)} = \sigma_g^{(1)}. \tag{D.88}$$

従って、ベクターモードの非等方膨張率のポテンシャル $\sigma_g^{(1)}$ はゲージ不変である。ベクターモードでは、$\delta^{(3)}R_j^i$ は消える。

- ストレス – エネルギーテンサー

– 定義

$$v_i^{(V)} = \sum_f v_f^{(1)}Q_i^{(1)}, \tag{D.89}$$

$$\Pi^{(V)i}{}_j = \sum_f \bar{p}_f\pi_f^{(1)}Q^{(1)i}{}_j. \tag{D.90}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{v}_f^{(1)} = v_f^{(1)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\dot{L}^{(1)}, \tag{D.91}$$

$$\tilde{\pi}_f^{(1)} = \pi_f^{(1)}. \tag{D.92}$$

2.3 tensor mode

- モード関数

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}\nabla_*^2 Q_{ij}^{(2)} &= -k^2 Q_{ij}^{(2)}, && \text{(D.93)}\\
\gamma^{ij} Q_{ij}^{(2)} &= {}^{(3)}\nabla_*^i Q_{ij}^{(2)} = 0. && \text{(D.94)}
\end{aligned}
$$

- メトリック

$$
h_{ij}^{(T)} = 2 H_T^{(2)} Q_{ij}^{(2)}. \qquad \text{(D.95)}
$$

- 幾何量

$$
\sigma_g^{(2)} \equiv \frac{\bar{a}}{\bar{N}} \frac{\dot{H}_T^{(2)}}{k}. \qquad \text{(D.96)}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(T)} &= \bar{a} k \sigma_g^{(2)} Q_{ij}^{(2)}, && \text{(D.97)}\\
\sigma^{(T)i}{}_j &= \frac{k}{\bar{a}} \sigma_g^{(2)} Q^{(2)i}{}_j, && \text{(D.98)}\\
\delta^{(3)} R_{ij}^{(T)} &= \left(k^2 + 2\kappa \right) H_T^{(2)} Q_{ij}^{(2)}, && \text{(D.99)}\\
\delta^{(3)} R^{(T)i}{}_j &= \frac{1}{\bar{a}^2} \left(k^2 + 2\kappa \right) H_T^{(2)} Q^{(2)i}{}_j, && \text{(D.100)}
\end{aligned}
$$

ゲージ変換に 2 階のテンサーの成分は存在しないため、$H_T^{(2)}$ は自動的にゲージ不変であり、従って $\sigma_g^{(2)}$ もゲージ不変である。

- ストレス – エネルギーテンサー
  - 定義

$$
\Pi^{(T)i}{}_j = \sum_f \bar{p}_f \pi_f^{(2)} Q^{(2)i}{}_j. \qquad \text{(D.101)}
$$

  - ゲージ変換性

$$
\tilde{\pi}_f^{(2)} = \pi_f^{(2)}. \qquad \text{(D.102)}
$$

付 録E　Gauge Invariant Perturbations

アインシュタイン方程式、物質の運動方程式を、スカラー, ベクター, テンサーモード それぞれについてゲージ不変量で書き下す。ここでのゲージ不変量の表記と他の文献との対応は、Appendix J を参照のこと。

1　Equations of Motion

ストレス – エネルギーテンサーの発散 $T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0$ をとることにより、重力場の源に対する運動方程式が導かれる。ただし、この節で導く運動方程式は、源の組成同士 (物質と光子など) の相互作用による、エネルギーや運動量のやりとりは一切考慮されていない。$T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0$ は保存則であり、全体としての収支しか記述していない。

1.1　continuity equation

$T^{\alpha}_{0;\alpha} = 0$ より、エネルギー密度の保存則、「連続の式 (continuity equation)」が導かれる。状態方程式をあらわすパラメターを $w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$ として、

- 無摂動次

$$\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = -3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}(1+w). \tag{E.1}$$

  従って無摂動次の解は、$\bar{\rho} \propto \bar{a}^{-3(1+w)}$ である。

- 線形摂動次

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\delta} = -(1+w)\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^{k}_{k} + \frac{1}{\bar{a}}v^{k}{}_{|k}\right) - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}(\delta w). \tag{E.2}$$

  ここで、

$$\delta w \equiv w\left(\frac{\delta p}{\bar{p}} - \delta\right) = \left(\frac{\delta p}{\delta\rho} - w\right)\delta \tag{E.3}$$

はエントロピーゆらぎ (entropy fluctuation) である。複数の種類の流体が存在し、各々の状態方程式が異なる場合、エントロピーゆらぎが生成される。特に $\delta w = 0$ のケースを、断熱ゆらぎ (adiabatic fluctuation) と呼ぶ。

1.2 Euler equation

$T^{\alpha}_{i;\alpha} = 0$ より、運動量の保存則、「オイラーの式 (Euler equation)」が導かれる。

- 線形摂動次

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_{ci} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(c_s^2 - \frac{1}{3}\right)V_{ci} - \frac{1}{\bar{a}}A_i - \frac{1}{\bar{a}}\frac{w}{1+w}\left[\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right)_{,i} + \frac{1}{\bar{p}}\Pi^k_{i|k}\right]. \tag{E.4}$$

無摂動次は存在しない。ここで、V_c は時間軸 **n** から見た流体素片の相対速度であり、

$$V_{ci} \equiv v_i + \frac{1}{\bar{a}}\frac{N_i}{\bar{N}} = v_i + h_{0i}. \tag{E.5}$$

c_s^2 は音速で、$c_s^2 \equiv \dot{\bar{p}}/\dot{\bar{\rho}}$ と定義される。式を見やすくするため共形時間を採用すれば* 、$\bar{N} = \bar{a}$ より

$$\dot{V}_{ci} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\left(c_s^2 - \frac{1}{3}\right)V_{ci} - A_i - \frac{w}{1+w}\left[\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right)_{,i} + \frac{1}{\bar{p}}\Pi^k_{i|k}\right]. \tag{E.6}$$

オイラーの式は、ダスト流体 $(w = 0)$, 光子流体 $(w = 1/3)$ の時、特徴的なふるまいを知ることができる。

- ダスト: $c_s^2 = 0$

$$\dot{V}_{ci} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}V_{ci} - A_i. \tag{E.7}$$

従って、宇宙膨張とともに速度は $V_{ci} \propto \bar{a}^{-1}$ と落ちる。圧力やストレスの寄与も存在しない。

- 光子: $c_s^2 = 1/3$

$$\dot{V}_{ci} = -A_i - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right)_{,i} + \frac{1}{\bar{p}}\Pi^k_{i|k}\right]. \tag{E.8}$$

宇宙膨張の効果は存在しない。光子のエネルギーは赤方偏移をうけて $\propto \bar{a}^{-1}$ で落ちるが、V_{ci} は双極的な温度ゆらぎをあらわしており、宇宙膨張の効果とは無関係なのである。

* このように、必要に応じてラプス関数を選べるように定式化を行なった。多くの文献では始めから $\bar{N} = \bar{a}$ として計算を行なっているが、場合によっては $\bar{N} = 1$ と選ぶこともある。(小玉 1991, pp.150; Takada 1998)

2 Scalar-Mode Equations

2.1 Poisson equation

アインシュタイン方程式の $n-n$ 成分 (C.67), $n-i$ 成分 (C.68) を、モード関数 $Q^{(0)}$ で展開した後 δH の項を消去すれば

$$\left(k^2-3\kappa\right)\left[\mathcal{R}-\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\sigma_g^{(0)}\right]=4\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}\left[\delta+3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)\left(v^{(0)}-B^{(0)}\right)\right]. \quad \text{(E.9)}$$

ハッブルホライズンよりも十分小さい極限 $(k/\bar{a}\bar{H}\gg 1)$ では、

$$k^2\mathcal{R}=4\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}\delta. \quad \text{(E.10)}$$

このような極限では一般相対論的な効果は無視でき、ニュートン理論の結果と一致するはずである。従って、(E.10) はポアソン方程式であり、$\mathcal{R}$ をニュートンポテンシャルと同定することができる。

さらに (E.9) の構造を詳しく調べる。左辺の [ ] をそっくり

$$\Phi_H\equiv\mathcal{R}-\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\sigma_g^{(0)} \quad \text{(E.11)}$$

と定義する。これは、ゲージ不変量である。(D.62), (D.63) より、たやすく $\tilde{\Phi}_H=\Phi_H$ を確かめることができる。同様に、右辺の [ ] の中をそっくり

$$\epsilon_m\equiv\delta+3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)\left(v^{(0)}-B^{(0)}\right) \quad \text{(E.12)}$$

と定義すれば、(D.48), (D.69), (D.70) より $\tilde{\epsilon}=\epsilon$ が導け、これもゲージ不変であることが分かる。従って、

$$\left(k^2-3\kappa\right)\Phi_H=4\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}\epsilon_m \quad \text{(E.13)}$$

という、ニュートン理論でのポアソン方程式に「類似した」方程式が得られる。括弧の中が全てゲージ不変量であったことは、実は偶然ではない。そもそもアインシュタイン方程式はゲージ不変な方程式であり、このことがゲージ自由度を許していたのである。従って、方程式は必ず何らかのゲージ不変量の組合せで書くことができる。問題は、いかにしてゲージ不変量に物理的な意味を持たせるか、ということである。例えば今の場合であれば、

- *Newtonian slicing*: $\sigma_g^{(0)}=0$
  $\Phi_H\longrightarrow$ ニュートンポテンシャル

- *Velocity-orthogonal slicing*: $v^{(0)} = B^{(0)}$
  $\epsilon_m \longrightarrow$ 密度ゆらぎ

ただし、ハッブホライズンよりも十分小さいスケールでは、(E.11), (E.12) は自然にニュートンポテンシャル、密度ゆらぎに帰着する。

2.2 dynamical equation

トレースレスパート (C.70) のモード関数展開より

$$k^2 \left\{ \left[\mathcal{R} - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}} \right)^{-1} \sigma_g^{(0)} \right] + \left[A - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}} \right)^{-1} \left(\sigma_g^{(0)} + \frac{1}{\bar{N}\bar{H}} \dot{\sigma}_g \right) \right] \right\} = -8\pi G \bar{a}^2 \bar{p} \pi^{(0)}. \quad \text{(E.14)}$$

作為的な書き換えであるが、(E.11) においてゲージ不変量 Φ_H を見つけていることと、$\pi^{(0)}$ のゲージ不変性、さらに方程式全体のゲージ不変性より、[ ] 内は全てゲージ不変でなければならないのである。従って、

$$\Phi_A \equiv A - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}} \right)^{-1} \left(\sigma_g^{(0)} + \frac{1}{\bar{N}\bar{H}} \dot{\sigma}_g \right) \quad \text{(E.15)}$$

を定義でき、

$$k^2 \left(\Phi_H + \Phi_A \right) = -8\pi G \bar{a}^2 \bar{p} \pi^{(0)}. \quad \text{(E.16)}$$

A は (D.57) より、超曲面上の加速度のポテンシャルである。従って、

- *Newtonian slicing*: $\sigma_g^{(0)} = 0$
  $\Phi_A \longrightarrow$ 加速度のポテンシャル

と言える。特に、流体素片の非等方ストレスがないような場合 ($\pi^{(0)} = 0$) には $\Phi_A = -\Phi_H$ となり、Φ_A も密度ゆらぎによるニュートンポテンシャルと解釈することができる。また、(E.15) にもスケールをあらわす $(k/\bar{a}\bar{H})^{-1}$ が含まれており、ハッブルホライズンよりも十分小さいスケールで加速度のポテンシャルに帰着するようになっている。

トレースパート (C.71) より、$\mathcal{K}_g$ についてもアインシュタイン方程式を書き下すことができるが、$\mathcal{K}_g$, Φ_H, Φ_A は独立ではなく、真に独立な自由度は Φ_H, Φ_A のみである。

2.3 momentum constraint

アインシュタイン方程式の $n-i$ 成分 (C.68) はポテンシャルの時間微分を含む比較的単純な式であるため、有用である。(D.51), (D.54) より

$$\begin{aligned}\delta H &\equiv \bar{H}\mathcal{K}_g Q^{(0)} = \left(-\bar{H}A + \frac{1}{\bar{N}}\dot{H}_L + \frac{k}{3\bar{a}}B^{(0)}\right)Q^{(0)} \\ &= \left\{-\bar{H}\Phi_A + \frac{1}{\bar{N}}\dot{\Phi}_H - \frac{k}{3\bar{a}}\left[1 - \frac{3\bar{a}\dot{\bar{H}}}{k^2}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{N}}\right)\right]\sigma_g^{(0)}\right\}Q^{(0)}. \end{aligned} \tag{E.17}$$

(C.68) に代入すれば

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\Phi}_H - \bar{H}\Phi_A = -4\pi G\bar{a}\bar{\rho}(1+w)\frac{V_s^{(0)}}{k} \tag{E.18}$$

を得る。

2.4 continuity equation

(E.2) より

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\delta} = -3(1+w)\left(\frac{1}{\bar{N}}\dot{H}_L + \frac{k}{3\bar{a}}v^{(0)}\right) - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}(\delta w). \tag{E.19}$$

この式を、適当なゲージ不変量について書き換える。まず、(D.53) より

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{H}_L + \frac{k}{3\bar{a}}v^{(0)} = \frac{1}{\bar{N}}\dot{\mathcal{R}} + \frac{k}{3\bar{a}}\left(v^{(0)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}\right) \tag{E.20}$$

と変形すれば、( ) 内はゲージ不変量であることが確かめられ、

$$V_s^{(0)} \equiv v^{(0)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}. \tag{E.21}$$

従って

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\delta} = -\frac{3}{\bar{N}}(1+w)\dot{\mathcal{R}} - (1+w)\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}(\delta w). \tag{E.22}$$

さらに、

$$\epsilon_\zeta \equiv \delta + 3(1+w)\mathcal{R} \tag{E.23}$$

はゲージ不変であるので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{N}}\dot{\epsilon}_\zeta &= \frac{3}{\bar{N}}\dot{w}\mathcal{R} - (1+w)\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}(\delta w) \\ \frac{1}{\bar{N}}\left(\frac{\epsilon_\zeta}{1+w}\right)^{\cdot} &= -\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\frac{\delta w}{1+w} - \frac{\bar{N}^{-1}\dot{w}}{(1+w)^2}\delta. \end{aligned} \tag{E.24}$$

最後に、$\dot{w} = 3(1+w)(w-c_s^2)\dot{\bar{a}}/\bar{a}$ より

$$\frac{1}{\bar{N}}\left(\frac{\epsilon_\zeta}{1+w}\right)^{\cdot} = -\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\frac{w}{1+w}\Gamma. \tag{E.25}$$

Γ はゲージ不変なエントロピーゆらぎであり、

$$w\Gamma \equiv \left(\frac{\delta p}{\delta\rho} - c_s^2\right)\delta. \tag{E.26}$$

(E.25) は、各項が全てゲージ不変量で書けている。ϵ_ζ, $V_s^{(0)}$ の持つ意味はそれぞれ、

- *Uniform curvature gauge*: $\mathcal{R} = 0$
  $\epsilon_\zeta \longrightarrow$ 密度ゆらぎ
- *Longitudinal gauge*: $B^{(0)} = \dot{H}_T^{(0)} = 0$
  $V_s^{(0)} \longrightarrow 3$ 元固有速度のポテンシャル

また、後に定義する *Newtonian slicing* における密度ゆらぎ ϵ_g (E.33) を用いれば $\epsilon_\zeta = \epsilon_g + 3(1+w)\Phi_H$ より

$$\frac{1}{\bar{N}}\left(\frac{\epsilon_g}{1+w}\right)^{\cdot} = -\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - \frac{3}{\bar{N}}\dot{\Phi}_H - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\frac{w}{1+w}\Gamma. \tag{E.27}$$

2.5 Euler equation

(E.4) より、

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_c^{(0)} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(c_s^2 - \frac{1}{3}\right)V_c^{(0)} + \frac{k}{\bar{a}}A + \frac{w}{1+w}\frac{k}{\bar{a}}\left[\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3\kappa}{k^2}\right)\pi^{(0)}\right]. \tag{E.28}$$

各項を、ひとつひとつゲージ不変量に書き換える。

- $V_c^{(0)}$
  $$V_c^{(0)} = v^{(0)} - B^{(0)} \tag{E.29}$$
  はゲージ不変ではないので、ゲージ不変な速度ポテンシャル $V_s^{(0)}$ を用いて
  $$V_c^{(0)} = \left(v^{(0)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}\right) + \left(\frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)} - B^{(0)}\right) = V_s^{(0)} + \sigma_g^{(0)}. \tag{E.30}$$
- A
  ゲージ不変な加速度ポテンシャル Φ_A (E.15) に書き換える。

- δp

  圧力の摂動は、系の音速と密度ゆらぎに比例する断熱的なパートと、複数の流体同士の状態方程式の違いに起因するエントロピーゆらぎに分けられる。

$$\frac{w}{1+w}k\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right) = \frac{1}{1+w}k\delta\left(\frac{\delta p}{\delta\rho}\right) = \frac{c_s^2}{1+w}k\delta + \frac{w}{1+w}k\Gamma. \tag{E.31}$$

以上より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_s^{(0)} &= 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(c_s^2-\frac{1}{3}\right)V_s^{(0)} \\ &\quad +\frac{k}{\bar{a}}\left(\Phi_A+\frac{c_s^2}{1+w}\epsilon_g\right) \\ &\quad +\frac{w}{1+w}\frac{k}{\bar{a}}\left[\Gamma-\frac{2}{3}\left(1-\frac{3\kappa}{k^2}\right)\pi^{(0)}\right].\end{aligned} \tag{E.32}$$

ϵ_g はゲージ不変な密度ゆらぎであり、

$$\epsilon_g \equiv \delta + 3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)\sigma_g^{(0)}. \tag{E.33}$$

- *Newtonian slicing*: $\sigma_g^{(0)} = 0$

  $\epsilon_g \longrightarrow$ 密度ゆらぎ

また、*velocity-orthogonal slicing* における密度ゆらぎ ϵ_m (E.12) を用いれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_s^{(0)} &= -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}V_s^{(0)} \\ &\quad +\frac{k}{\bar{a}}\left(\Phi_A+\frac{c_s^2}{1+w}\epsilon_m\right) \\ &\quad +\frac{w}{1+w}\frac{k}{\bar{a}}\left[\Gamma-\frac{2}{3}\left(1-\frac{3\kappa}{k^2}\right)\pi^{(0)}\right].\end{aligned} \tag{E.34}$$

3 Vector-Mode Equations

3.1 Poisson equation

アインシュタイン方程式 $n-i$ 成分 (C.68) より

$$\left(k^2-2\kappa\right)\sigma_g^{(1)} = -16\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}(1+w)\left(v^{(1)}-B^{(1)}\right). \tag{E.35}$$

(D.88) より、$\sigma_g^{(1)}$ は単独でゲージ不変。(D.82), (D.91) より

$$V_c^{(1)} \equiv v^{(1)} - B^{(1)} \tag{E.36}$$

がゲージ不変であることを示せる。従って、ベクターモードの「ポアソン方程式」は

$$\left(k^2 - 2\kappa\right)\sigma_g^{(1)} = -16\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}(1+w)V_c^{(1)}. \tag{E.37}$$

$V_c^{(1)}$ は、定義より時間軸 **n** に対する流体素片の相対速度である。従って (E.37) は、相対速度の存在がベクターモードの非等方膨張の源になっていることを表している。つまり、流体素片が **n** に沿っている場合には $\sigma_g^{(1)}$ は存在しないのである。

3.2 dynamical equation

トレースレスパート (C.70) より

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\sigma}_g^{(1)} + 2\bar{H}\sigma_g^{(1)} = 8\pi G\bar{a}\bar{p}\frac{\pi^{(1)}}{k}. \tag{E.38}$$

ベクターモードの非等方ストレスが存在すれば非等方膨張も生成されるが、もし $\pi^{(1)} = 0$ であれば $\sigma_g^{(1)} \propto \bar{a}^{-2}$ で減衰する。これは、「圧力」項に相当する $\delta^{(3)}R_j^i$ がベクターモードの場合存在しないためである。

時間 τ として共形時間 (conformal time) を選べば、$\bar{N} = \bar{a}$ より

$$\dot{\sigma}_g^{(1)} + 2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\sigma_g^{(1)} = 8\pi G\bar{a}^2\bar{p}\frac{\pi^{(1)}}{k}. \tag{E.39}$$

3.3 Euler equation

$V_c^{(1)}$ がゲージ不変であるので、(E.4) より直接、

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_c^{(1)} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(c_s^2 - \frac{1}{3}\right)V_c^{(1)} - \frac{w}{2(1+w)}\left(1 - \frac{2\kappa}{k^2}\right)\frac{k}{\bar{a}}\pi^{(1)}. \tag{E.40}$$

ベクターモードはソースタームに乏しく、非等方ストレスがなければ宇宙膨張とともに減衰する。

4 Tensor-Mode Equations

トレースレスパート (C.70) より

$$\frac{1}{\bar{N}^2}\ddot{H}_T^{(2)} + \frac{1}{\bar{N}}\left(3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}} - \frac{\dot{\bar{N}}}{\bar{N}^2}\right)\dot{H}_T^{(2)} + \frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 + 2\kappa\right)H_T^{(2)} = 8\pi G\bar{p}\pi^{(2)}. \tag{E.41}$$

共形時間 ($\bar{N} = \bar{a}$) で

$$\ddot{H}_T^{(2)} + 2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\dot{H}_T^{(2)} + \left(k^2 + 2\kappa\right)H_T^{(2)} = 8\pi G\bar{a}^2\bar{p}\pi^{(2)}. \tag{E.42}$$

テンサーモードには「圧力」項が存在するので、(E.42) は H_T に関する波動方程式となっている。すなわち、H_T は重力波のモードである。

5 Summary of Gauge Invariants

5.1 scalar mode

- scalar potentials

$$\Phi_H = \mathcal{R} - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\sigma_g^{(0)}, \tag{E.43}$$

$$\Phi_A = A - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\left(\sigma_g^{(0)} + \frac{1}{\bar{N}\bar{H}}\dot{\sigma}_g^{(0)}\right). \tag{E.44}$$

- density perturbations

$$\epsilon_g = \delta + 3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)\sigma_g^{(0)}, \tag{E.45}$$

$$\epsilon_m = \delta + 3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)V_c^{(0)}, \tag{E.46}$$

$$\epsilon_\zeta = \delta + 3(1+w)\mathcal{R}, \tag{E.47}$$

$$\epsilon_\zeta - \epsilon_g = 3(1+w)\Phi_H, \tag{E.48}$$

$$\epsilon_m - \epsilon_g = 3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)V_s^{(0)}. \tag{E.49}$$

- velocity perturbation

$$V_s^{(0)} = v^{(0)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}. \tag{E.50}$$

5.2 vector mode

- velocity perturbations

$$V_c^{(0)} = v^{(1)} - B^{(0)}, \tag{E.51}$$

$$V_s^{(1)} = v^{(1)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}, \tag{E.52}$$

$$V_c^{(1)} - V_s^{(1)} = \sigma_g^{(1)}. \tag{E.53}$$

付 録F　The Boltzmann Transport Equation

重力場中における衝突系、あるいは無衝突系の粒子の集団運動を記述する輸送方程式 (transport equation) として、一般相対論的に拡張されたボルツマン方程式 (Boltzmann equation) を使う事ができる。この章では、Appendix A で定義した座標基底での表現と Appendix B で定義したテトラードでの表現を、比較しつつ議論してゆく。座標基底の添字は μ, ν, ..., i, j, ..., 0, 1, ... であり、テトラードの添字は a, b, ..., I, J, ..., n, $\hat{1}$, ... である。

1　Distribution Function

4 次元時空座標 $\mathbf{x}$ において、4 元運動量 $\mathbf{p}$ で運動する粒子を記述する分布関数 (distribution function) $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ を定義する。ある座標空間体積要素 $dV_{(x)}$, 運動量空間体積要素 $dV_{(p)}$ を占める粒子数 dN は、

$$dN \equiv f(\mathbf{x},\mathbf{p}) dV_{(x)} dV_{(p)} \tag{F.1}$$

として定義される。$f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ はスカラーであり、$(\mathbf{x},\mathbf{p})$ に関するローレンツ変換に対して不変なように定義される。なぜならば、粒子数 dN は測定者によらないので定義としてスカラーであり、位相空間内の体積要素 $dV_{(x)}dV_{(p)}$ はローレンツ変換により

$$dV_{(x')} \equiv dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \left(\sqrt{1-v^2}dx^1\right) dx^2 dx^3 = \sqrt{1-v^2} dV_{(x)}, \tag{F.2}$$

$$dV_{(p')} \equiv dp'^1 dp'^2 dp'^3 = \frac{dp^1}{\sqrt{1-v^2}} dp^2 dp^3 = \frac{dV_{(p)}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{F.3}$$

と変換されるので、$dV_{(x')}dV_{(p')} = dV_{(x)}dV_{(p)}$ 、すなわちスカラーである。従って $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ もスカラーである。しかし、一般相対論の枠組みで、一般座標変換に対して不変な体積を定義する際、上のような単純な定義では実は不十分である。従って、次節で一般相対論的に意味のある体積を定義する。

1.1 invariant volume element: coordinate space

平坦な 3 次元空間に張られた 2 本の線素ベクター $d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{x}'$ がつくる平行四辺形の面積要素ベクターは $\boldsymbol{S} = (1/2)d\boldsymbol{x} \times d\boldsymbol{x}'$ と与えられる。成分で書けば $dS_i = (1/2)\varepsilon_{ijk}dx^j dx^k$ であり、ε_{ijk} は $\varepsilon_{123} = 1$ で定義される反対称テンサーである。もちろんベクターの方向は、面の法線方向である。同様に、平坦な 4 次元空間中に 3 本の線素ベクターで張られる 3 次元体積要素ベクター $d\boldsymbol{\Sigma}$ (あるいは超曲面の面積要素ベクターとも言える) は、$\varepsilon_{0123} = 1$ を成分に持つ 4 階の反対称テンサーを用いて

$$d\Sigma_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\nu dx^\rho dx^\sigma. \tag{F.4}$$

これを曲がった時空に変換すれば良い。平坦な時空での座標を x' とし、曲がった時空での座標 x に一般座標変換 $x' \to x$ を行なえば、

$$\begin{aligned} d\Sigma_\mu &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}d\Sigma_{\alpha'} \\ &= \frac{1}{3!}\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda'}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\sigma}dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \\ &= \frac{1}{3!}\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\nu dx^\rho dx^\sigma. \end{aligned} \tag{F.5}$$

従って体積要素の座標変換は、座標変換の行列 $\partial x^{\alpha'}/\partial x^\mu$ のヤコビアン $\partial(x')/\partial(x)$ を生じることが分かる。このヤコビアンは 4 次元時空のメトリックの変換性

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu}g_{\alpha'\beta'} \tag{F.6}$$

を用いて求めることができ、

$$g = \left[\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right]^2 g'. \tag{F.7}$$

ここで、$g \equiv \det(g)$ である。平坦な時空においては $g' = -1$ であるから、$\partial(x')/\partial(x) = \sqrt{-g}$ と求める事ができる。以上より、曲がった時空中における 3 次元体積要素ベクターは

$$d\Sigma_\mu = \frac{1}{3!}\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\nu dx^\rho dx^\sigma. \tag{F.8}$$

法線方向を決めるベクター $\mathbf{n}$ とのスカラー積 $\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ をとり、(F.2) より、$V_{(x)}$ の変換性とうまく打ち消しあうように粒子のエネルギー $p^n \equiv -\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}$ との積をつくれば、$V_{(x)} = p^n\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ は、単独で一般座標変換に対してスカラーである。ただしこの「体積」は、$p^n\sqrt{-g}dx^1dx^2dx^3$ であることを忘れてはならない。また、$\mathbf{n}$ は勝手にとれるものではなく、次節で定義する $dV_{(p)}$ と矛盾がないようにしなければならない。

1.2 invariant volume element: momentum space

4 元運動量ベクター **p** のつくる空間には、**p** が従わねばならない条件 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}+m^2=0$ で定義される超曲面が存在する。従って、運動量空間においては超曲面を選べる自由度は存在せず、体積要素は

$$dV_{(p)}=2\vartheta(p^0)\delta(p^\alpha p_\alpha+m^2)\frac{1}{4!}\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dp^\mu dp^\nu dp^\rho dp^\sigma. \tag{F.9}$$

ϑ はヘヴィサイド (Heaviside) 関数であり、ファクター 2 は $\vartheta(p^0)$ による物理的要請 $p^0>0$ のためである。(F.7) より、$\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dp^\mu dp^\nu dp^\rho dp^\sigma$ がスカラーであることが確かめられる。

(F.9) がどのような体積要素であるかは、Appendix B で導入したテトラード表示で明らかにすることができる。$\delta(p^\alpha p_\alpha+m^2)$ は、テトラード $\mathbf{e}^a$ 系において (B.1) より

$$\begin{aligned}\delta(\eta_{ab}p^ap^b+m^2) &= \delta(-(p^n)^2+p^2+m^2)\\ &= \frac{1}{\left|2\sqrt{p^2+m^2}\right|}\delta(p^n-\sqrt{p^2+m^2})\\ &\quad+\frac{1}{\left|-2\sqrt{p^2+m^2}\right|}\delta(p^n+\sqrt{p^2+m^2}).\end{aligned} \tag{F.10}$$

ただし、$p\equiv\delta_{IJ}p^Ip^J$ である。このように、条件 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}+m^2=0$ は規格直交化されたテトラード表示において、非常に単純な結果 $(p^n=\sqrt{p^2+m^2})$ を与える。これが座標表示においてどれほど困難であるかは、試して見ると良く分かるだろう。以上より、

$$dV_{(p)}=\frac{dp^{\hat1}dp^{\hat2}dp^{\hat3}}{\sqrt{p^2+m^2}}. \tag{F.11}$$

数字の上のハットは、テトラード表示の成分であることを示すためにつけた。このように不変運動量体積要素は、$d^3p\equiv dp^{\hat1}dp^{\hat2}dp^{\hat3}$ に加えて分母にエネルギーが入っている。(F.11) の不変性を簡単に解釈してみる。$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}+m^2=0$ で定義される超曲面の法線ベクターは、**p** の方向を向いている。そして d^3p は、$d^3p=\varepsilon_{nabc}dp^adp^bdp^c$ で分かるように、運動量空間における 3 次元体積要素ベクターの **n** 方向の成分である。一方 $p^n=\sqrt{p^2+m^2}$ も同様に、**p** の **n** 方向の成分である。従って (F.11) は同じベクターの同じ成分の比であり、同じ変換性を示すため、変換係数が分子と分母でキャンセルして不変に保たれるわけである。言いかえれば、「同じベクターの同じ成分の比の値」というのは誰が測定しても同じなので、不変なのである。

以上のように不変体積要素を定義したが、$V_{(x)}$, $V_{(p)}$ ともに「本当の意味での」体積ではなく、エネルギーがかかっていることは常に頭に置いておかねばならない。

1.3 Boltzmann equation: coordinate representation

粒子の集団運動を記述する基礎方程式として、ボルツマン方程式を用いる。粒子の軌跡に沿うアフィンパラメター λ を導入すれば、衝突項 $C[f]$ のもとでのボルツマン方程式は、座標表示で

$$\frac{Df}{D\lambda} \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\bigg|_p + \frac{dp^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p^\mu}\bigg|_x = p^0 C[f]. \tag{F.12}$$

Appendix G で見るように、$p^0 C[f]$ がスカラーであるように衝突項を定義する。

重力場中での個々の粒子の運動は、重力以外の外力がないもとでは測地線に従うため、$dx^\mu/d\lambda$, $dp^\mu/d\lambda$ はそれぞれ測地線の式

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu \ , \qquad \frac{dp^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \tag{F.13}$$

から決められる。ここで、$f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ は座標空間 4 次元、運動量空間 4 次元の位相空間内で定義された分布関数のように見えるが、実はそうではない。運動量空間で実際に独立な次元は 3 つであり、残りの 1 次元は $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -m^2$ から決められるのである。

現在興味があるのは光子の分布関数の発展方程式なので、$m = 0$ である。p^i の変化に対する寄与は、赤方偏移 (redshift) による光子のエネルギー変化と、光子の軌跡が曲げられる効果 (bending) に分けられる。従って、独立変数をさらに変換し

$$\frac{dp^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p^i}\bigg|_x = \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p}\bigg|_{x,\gamma} + \frac{d\gamma^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial \gamma^i}\bigg|_{x,p}. \tag{F.14}$$

p は光子のエネルギー、γ^i は光子の進行方向を示す方向余弦である。

1.4 Boltzmann equation: tetrad representation

テトラード表示では

$$p^a e_a[f] + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p}\bigg|_{x,\gamma} + \frac{d\gamma^I}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial \gamma^I}\bigg|_{x,p} = p^n C[f], \tag{F.15}$$

$$\frac{dp^a}{d\lambda} = -\Gamma^a_{bc} p^b p^c \ , \qquad e_a[f] \equiv e^\alpha_a \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\bigg|_p . \tag{F.16}$$

$p^n C[f]$ はローレンツスカラーである。注意しなければならないのは、テトラードは非座標基底であるため、その接続係数 (connection coefficient) は添字に関して対称でないことである。この非対称性は構造係数 (structure coefficient) C^c_{ab} であらわされ、

$$[\mathbf{e}_a, \ \mathbf{e}_b] \equiv C^c_{ab}\mathbf{e}_c \ , \qquad C^c_{ab} = \Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab}. \tag{F.17}$$

2 Temperature Fluctuation

光子の分布関数はボーズ – アインシュタイン (Bose-Einstein) 分布で記述でき、唯一のパラメターである温度 T によって決められる。

$$f_{\rm BE}(p) \equiv \frac{1}{\exp(p/T)-1}. \tag{F.18}$$

一様等方な膨張宇宙を光子が伝播すると、波長が膨張によって伸ばされ、$p \propto \bar{a}^{-1}$ のようにエネルギーを失う。一方 f の不変性より、p/T は宇宙膨張のもとで一定に保たれねばならない。以上の考察より、$T \propto \bar{a}^{-1}$ が導かれる。

一般に、物質との相互作用や重力との相互作用により、光子のエネルギーは一様等方成分からずれて $p = \bar{p} + \Delta p(x^i, \tau, p, \gamma^i)$ のように変化する。しかし、この場合も同様に f は一定に保たれねばならないので、温度変化 $T = \bar{T} + \Delta T(x^i, \tau, p, \gamma^i)$ が定義できて両者の関係は $\Delta p/\bar{p} = \Delta T/\bar{T}$ である。今 p は独立変数なので、相互作用による分布関数の変化は温度変化として扱う。温度ゆらぎ $\Theta \equiv \Delta T/\bar{T}$ を定義すれば

$$\begin{aligned} f_t(x^i, \tau, p, \gamma^i) &= \frac{1}{\exp(p/T)-1} \\ &= \frac{1}{\exp\left[p/\bar{T}\,(1+\Theta(x^i, \tau, p, \gamma^i))\right]-1}. \end{aligned} \tag{F.19}$$

分布関数と温度ゆらぎを変換する式は、$z \equiv p/T$ とおけば*

$$\Delta f_t \equiv f_t - \bar{f}_t \approx \bar{T}\frac{\partial \bar{f}_t}{\partial \bar{T}}\Theta = \bar{z}\bar{f}_t(1+\bar{f}_t)\Theta. \tag{F.20}$$

2.1 transport equation: coordinate representation

分布関数 f_t に対するボルツマン方程式 (F.12) を Θ に対する方程式に書き換えることができる。まず、

$$\frac{Df_t}{D\lambda} = \frac{Dz}{D\lambda}\frac{\partial f_t}{\partial z}. \tag{F.21}$$

ここで、$z = \bar{z}/(1+\Theta)$ より

$$\frac{Dz}{D\lambda} = p^\alpha \frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\bigg|_{p,\gamma} + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial z}{\partial p}\bigg|_{x,\gamma} + \frac{d\gamma^k}{d\lambda}\frac{\partial z}{\partial \gamma^k}\bigg|_{x,p}, \tag{F.22}$$

* ほとんどの文献では $x \equiv p/T$ という表記をしているが、ここでは座標 x との混同を避けるため、あえて z を選んだ。Mukhanov et al. (1992) では、v を用いている。

$$p^\alpha \left.\frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\right|_{p,\gamma} = p^0 \frac{\bar{z}}{1+\Theta}\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} - p^\alpha \frac{\bar{z}}{(1+\Theta)^2}\frac{\partial \Theta}{\partial x^\alpha}, \tag{F.23}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial p}\right|_{x,\gamma} = \frac{\bar{z}}{1+\Theta}\frac{1}{p} - \frac{\bar{z}}{(1+\Theta)^2}\frac{\partial \Theta}{\partial p}, \tag{F.24}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \gamma^k}\right|_{x,p} = -\frac{\bar{z}}{(1+\Theta)^2}\frac{\partial \Theta}{\partial \gamma^k}. \tag{F.25}$$

今 p は独立変数であるから、$\bar{z}$ は分母の $\bar{T}$ の赤方偏移によって $\bar{z} \propto \bar{a}$ となることに注意する。一方、もし $q \equiv \bar{a}p$ のように宇宙膨張を切り離した「共動運動量 (comoving momentum)」を独立変数に選べば、$\bar{z} = \text{constant}$ である[†]。$\partial f_t/\partial z = -f_t(1+f_t)$ より最終的に

$$\begin{aligned}\frac{Df_t}{D\lambda} &= f_t(1+f_t)\frac{\bar{z}}{1+\Theta} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{1+\Theta}\left(p^0\dot{\Theta} + p^k\frac{\partial\Theta}{\partial x^k} + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + \frac{d\gamma^k}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma^k}\right) - \frac{1}{\bar{a}p}\frac{d(\bar{a}p)}{d\lambda}\right].\end{aligned} \tag{F.26}$$

ドットは時間 τ に関する偏微分である。以上より、温度ゆらぎの輸送方程式は

$$\dot{\Theta} + \frac{p^k}{p^0}\frac{\partial\Theta}{\partial x^k} = \mathcal{G}_{SW} + \mathcal{G}_{bend} + \mathcal{G}_C, \tag{F.27}$$

$$\mathcal{G}_{SW} \equiv -\frac{1}{p^0}\frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + \frac{1}{\bar{a}pp^0}\frac{d(\bar{a}p)}{d\lambda}, \tag{F.28}$$

$$\mathcal{G}_{bend} \equiv -\frac{1}{p^0}\frac{d\gamma^k}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma^k}, \tag{F.29}$$

$$\mathcal{G}_C \equiv \frac{(1+\Theta)^2}{\bar{z}f_t(1+f_t)}C[f_t]. \tag{F.30}$$

この式は非線形まで使える式であり、各ソースの物理的意味は

- $\mathcal{G}_{SW}$: 重力赤方偏移 $dp/d\lambda$ による寄与。後述のように、ザクス – ヴォルフェ (Sachs-Wolfe) 効果として知られている。
- $\mathcal{G}_{bend}$: 重力レンズによる、光線の経路 γ^i の変化。
- $\mathcal{G}_C$: コンプトン散乱による衝突項 $C[f]$ を通じた、電子との相互作用による寄与。Appendix G において扱う。

[†] 例えば Bond (1996) では q を独立変数として扱っている。

しかし、CMB ゆらぎの主要な特徴は線形オーダーの項から得られる。線形オーダーでは、Θ の波長依存性、すなわち p 依存性は無視して良く、さらに $\mathcal{G}_{bend}$ も 2 次であるから

$$\mathcal{G}_{SW} = \frac{1}{\bar{a}pp^0}\frac{d(\bar{a}p)}{d\lambda} = \frac{1}{\bar{a}p}\frac{d(\bar{a}p)}{d\tau}, \tag{F.31}$$

$$\mathcal{G}_{bend} = 0, \tag{F.32}$$

$$\mathcal{G}_C = \frac{1}{\bar{z}\bar{f}_t(1+\bar{f}_t)}C[f_t]. \tag{F.33}$$

2.2 transport equation: tetrad representation

多少蛇足ではあるが、座標表示で導いた温度ゆらぎの輸送方程式をテトラード表示に書き直しておく。

$$e_n[\Theta] + \frac{p^K}{p^n}e_K[\Theta] = \mathcal{G}_{SW} + \mathcal{G}_{bend} + \mathcal{G}_C, \tag{F.34}$$

$$\mathcal{G}_{SW} = -\frac{1}{p^n}\frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + \frac{1}{\bar{a}pp^n}\frac{d(\bar{a}p)}{d\lambda}, \tag{F.35}$$

$$\mathcal{G}_{bend} = -\frac{1}{p^n}\frac{d\gamma^K}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma^K}, \tag{F.36}$$

$$\mathcal{G}_C = \frac{(1+\Theta)^2}{\bar{z}f_t(1+f_t)}C[f_t]. \tag{F.37}$$

3 Sachs-Wolfe Effect & Momentum Transformation

3.1 photon energy & observer

重力赤方偏移による寄与は $\mathcal{G}_{SW}$ によって決定される。(F.31) を計算するにはまず、光子のエネルギー p を定義、言いかえればエネルギーを測定する観測者を決めねばならない。「観測者を選ぶ」という作業は、観測者が乗っている流線の 4 元ベクター $\mathbf{U}^{\rm obs}$ を選ぶということである。観測者が選ばれれば、彼によって測定されるエネルギーは $p \equiv -\mathbf{U}^{\rm obs}\cdot\mathbf{p}$ で決定される。ひとたび観測者が選ばれて p が定義されると、これはローレンツスカラーであるが、観測者を変えてしまうと観測されるエネルギーももちろん変わる。

それでは、我々はどのような観測者を選ぶべきなのだろうか。Appendix A で用いた、空間的超曲面 $\mathcal{S}_\tau$ に直交する時間的ベクター $\mathbf{n}$ は、時空の幾何学を調べるのに非常に適した

観測者であった。しかし一方で、**n** の測定する光子のエネルギー:

$$p^n \equiv -\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} = -n_0 p^0 = N p^0 \tag{F.38}$$

は「我々にとって」観測可能なエネルギーではない。我々は物質と共に運動する系の流線 **u** に乗っており、一般的には $\mathcal{S}_\tau$ に直交しているとは限らない。従って、観測量と比較する際には $p^u \equiv -\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$ を用いなければならない。

以上をふまえ、以下のような手法をとることにする。重力場の効果を **n** で測定すれば、物理的意味がクリアな幾何量で定量化することができるので、まず始めに **n** の視点で赤方偏移を定量化する。そして、運動量空間において変換 $p^n \to p^u$ を行ない、観測量を計算する。

3.2 observer 1: normal vector

(F.38) の両辺を λ で全微分する事により、**n** の測定するエネルギー p^n の発展方程式:

$$\frac{dp^n}{d\lambda} = -\mathbf{p}\cdot(\nabla\mathbf{n})\cdot\mathbf{p} = -\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} - \frac{\theta}{3}\mathbf{P}(\mathbf{p},\mathbf{p}) + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) \tag{F.39}$$

を得る。**P** は空間的超曲面への射影テンサー、$\boldsymbol{\sigma}$, θ はそれぞれ $\mathcal{S}_\tau$ の非等方体積変化率 (shear), 等方体積変化率 (expansion)、**A** は加速度 (acceleration) である。Appendix A より、$\boldsymbol{\sigma}$, **A** は線形オーダーであることが示される。座標表示の場合、線形オーダーに限り $\sigma_{00} = \sigma_{0i} = A_0 = 0$ であるが、テトラード表示ならば任意のオーダーで $\sigma_{nn} = \sigma_{nI} = A_n = 0$ である。

(F.39) を成分表示するため、方向余弦を

$$\gamma^I \equiv \frac{p^I}{p^n} = \frac{1}{p^n} e^I_\alpha p^\alpha = \bar{a} e^I_{*i}\left(\frac{N^i}{N} + \frac{p^i}{N p^0}\right) \tag{F.40}$$

と定義する。$\eta_{ab} p^a p^b = 0$ より、$\delta_{IJ}\gamma^I\gamma^J = 1$ であることが確かめられる。従って、対応する座標表示は

$$\gamma^i = \bar{a}\left(\frac{N^i}{N} + \frac{p^i}{N p^0}\right) \tag{F.41}$$

であり、同様に $g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0$ より ${}^{(3)}g_{*ij}\gamma^i\gamma^j = 1$ を満たすことが確かめられる。次に、アフィンパラメター λ を時間 τ に変換し、左辺を

$$\frac{dp^n}{d\lambda} = p^0 \frac{dp^n}{d\tau} = p^n \frac{dp^n}{N d\tau} \tag{F.42}$$

と書き直せば、(F.39) はテトラード、座標基底をもちいてそれぞれ

$$\frac{1}{p^n}\frac{dp^n}{Nd\tau} = -\frac{\theta}{3} - \sigma_{KL}\gamma^K\gamma^L - A_K\gamma^K, \tag{F.43}$$

$$= -\frac{\theta}{3} - \frac{1}{\bar{a}^2}\sigma_{kl}\gamma^k\gamma^l - \frac{1}{\bar{a}}A_k\gamma^k. \tag{F.44}$$

と書き直せる。(F.44) では、(A.12), (F.41) を用いた。$\bar{a}$ の違いは、σ_{kl}, A_k は $\mathbf{e}_K$ で変換するのに対し、γ^k は $\mathbf{e}_{*K}$ を用いるためである。ここで、(F.43), (F.44) を導く際、線形近似を一切用いていないことは注目せばならない。この式はたとえ非線形オーダーであっても適用できるのである。(F.43), (F.44) が、**n** が測った重力赤方偏移による光子のエネルギー変化を決めている。ADM 形式で書いた事により、赤方偏移に寄与している物理量をあらわにできているのが大きな特徴である。第 1 項は等方膨張 (収縮) による赤方 (青方) 偏移、第 2 項は同じく非等方膨張 (収縮) の効果である。第 3 項目は加速度による効果であり、加速 (減速) は赤方 (青方) 偏移として寄与する。このように、重力赤方偏移によって引き起こされる CMB のゆらぎはザクス – ヴォルフェ (Sachs-Wolfe; 以下 SW) 効果 (Sachs & Wolfe 1966) と呼ばれており、CMB ゆらぎを理解する上で最も重要な効果のひとつである。

(F.43) を、メトリックの摂動 (A.26) – (A.28) について線形化する。幾何量 $\boldsymbol{\sigma}$, θ, **A** は、テトラード表示で (B.13) – (B.16) のように書けているので、

$$\frac{1}{p^n}\frac{dp^n}{Nd\tau} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} - \frac{1}{2\bar{N}}\bar{e}^k_{*K}\bar{e}^l_{*L}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^K\bar{\gamma}^L + \frac{1}{\bar{a}}\bar{e}^k_{*K}\bar{e}^l_{*L}h_{0k|l}\bar{\gamma}^K\bar{\gamma}^L + \frac{1}{2\bar{a}}\bar{e}^k_{*K}h_{00|k}\bar{\gamma}^K. \tag{F.45}$$

座標表示においても、(A.32) – (A.35) を用いて

$$\frac{1}{p^n}\frac{dp^n}{Nd\tau} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} - \frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{1}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{1}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.46}$$

以上より、線形オーダーで SW 効果のソース $\mathcal{G}_{SW}$(F.31) を書き下せば、座標表示において

$$\mathcal{G}^n_{SW} = \frac{1}{\bar{a}p}\frac{d(\bar{a}p)}{d\tau} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{\bar{N}}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{\bar{N}}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.47}$$

特に、時間座標 τ として摂動解析の際によく使われる共形時間 (conformal time) を選べば、$\bar{N} = \bar{a}$ より

$$\mathcal{G}^n_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{1}{2}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.48}$$

テトラード表示へは、$\bar{\mathbf{e}}_{*K}$ を用いて変換できる。(すなわち、$k \to K$ のように小文字を大文字に変換するだけである。)

3.3 observer 2: realistic observer

観測者として、物質と共に動く流線 **u** を考える。空間座標原点は時間軸に対しシフトベクター N^i の「速度」で動いているため、$N^i = 0$ という座標をとらない限り **n** と一致しない。しかし、**n** → **u** の変換はローレンツ変換ではない。N^i は重力的な場であり、通常使われる意味での「速度場」ではないのである。今、重力による効果のみを考えるため、固有運動に起因するドップラー効果は考慮しない。従って、我々の乗る流線 **u** は空間座標の原点に静止しているものとする。ただし、3 元固有速度 v^i を持つ系には通常のローレンツ変換によっていつでも移ることができるため、これは一般性を失っていない。$u^i \equiv 0$ を定義し、**u**·**u** $= -1$ を用いて各成分を計算すると、

$$u^\mu = \left(\frac{1}{N},\ 0,\ 0,\ 0\right)\ , \qquad u_\mu = \left(-N,\ \frac{N_i}{N}\right). \tag{F.49}$$

従って、**u** の測るエネルギー p^u は

$$\begin{aligned} p^u &\equiv -\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} = -u_0 p^0 - u_k p^k = N p^0 - \frac{N_k}{N} p^k \\ &= p^n \left(1 - \frac{N_k}{N}\frac{p^k}{p^n}\right) \end{aligned} \tag{F.50}$$

のように p^n と関係している。メトリックの摂動量 $h_{\mu\nu}$ と方向余弦 γ^i を用いて書けば、

$$p^u = p^n \left(1 - h_{0k}\bar{\gamma}^k\right). \tag{F.51}$$

この関係式を用いて $p^n \to p^u$ の変換を行なうと、

$$\frac{1}{p^u}\frac{dp^u}{Nd\tau} = \frac{1}{p^n}\frac{dp^n}{Nd\tau} - \frac{1}{\bar{N}}\dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k - \frac{1}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l. \tag{F.52}$$

従って (F.46) より、

$$\frac{1}{p^u}\frac{dp^u}{Nd\tau} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} - \frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \frac{1}{\bar{N}}\dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k + \frac{1}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k, \tag{F.53}$$

$$\mathcal{G}^u_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k + \frac{\bar{N}}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.54}$$

p の変換は、f の不変性から導かれる $\Theta = \Delta p/p$ を用いると温度ゆらぎの変換としてもあらわすことができる。

$$\Theta^u = \Theta^n - h_{0k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.55}$$

従って、ソースの変換は実は形式的に全く自明の操作であって、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\bar{N}}{\bar{a}}\bar{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\Theta^n &= \mathcal{G}^n_{SW}\\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\bar{N}}{\bar{a}}\bar{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)(\Theta^n-h_{0k}\bar{\gamma}^k) &= \mathcal{G}^n_{SW}-\dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k-\frac{\bar{N}}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l\\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\bar{N}}{\bar{a}}\bar{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\Theta^u &= \mathcal{G}^u_{SW}\end{aligned}$$

しかしこれは、何をソースと思い、何を温度ゆらぎと定義するか、という問題であり、本質的には観測者の選択の問題である。

3.4 any observers: momentum space gauge transformation

前節で行なった変換は、運動量空間における微小変換、すなわちゲージ変換である。そして、SW 効果が観測者の違い、すなわち運動量空間内でのゲージ変換に依存することが示された。従って、適切に問題を解くためには、空間座標のゲージ変換だけではなく運動量空間の自由度をも考慮しなければならない。

共形変換 (conformal transformation) とローレンツ変換 (Lorentz transformation) を含めた運動量空間における変換、$\tilde{\mathbf{p}}=\Omega(x)\mathbf{\Lambda\cdot p}$ を考える。共形因子 (conformal factor) Ω は座標の任意関数で、ローレンツ変換の行列 $\mathbf{\Lambda}$ の成分は

$$\Lambda^\mu_\nu=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma v_i\\ -\gamma v^i & \delta^i_j+(\gamma-1)\hat{v}^i\hat{v}_j\end{pmatrix}. \tag{F.56}$$

γ はローレンツ因子[‡] (Lorentz factor) で $\gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}$ 、また $v^i\equiv v\hat{v}^i$ である。

線形摂動を与え、$\Omega=\bar{\Omega}+\delta\Omega$、$v\ll1$ より $\gamma\approx1$ とすれば、$\tilde{\mathbf{p}}=\bar{\Omega}(1+\delta\Omega/\bar{\Omega})\mathbf{\Lambda\cdot p}$ を得る。両辺に $\mathbf{U}^{\rm obs}$ を作用させれば、

$$\begin{aligned}\tilde{p}^{\rm obs} &= \bar{\Omega}\left(1+\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}\right)\left(-\mathbf{U}^{\rm obs}\mathbf{\cdot\Lambda\cdot p}\right)\\ &= \bar{\Omega}\left(1+\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}\right)\left(p^{\rm obs}+U_0^{\rm obs}v_kp^k+U_k^{\rm obs}v^kp^0\right) &\text{(F.57)}\\ &\approx \bar{\Omega}p^{\rm obs}\left(1+\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}+\frac{U_0^{\rm obs}}{\bar{a}}v_k\bar{\gamma}^k\right), &\text{(F.58)}\end{aligned}$$

[‡] γ を多用しているが、混乱しないようにして欲しい。

または、$\tilde{\bar{T}} = \bar{\Omega}\bar{T}$ 及び

$$\tilde{\Theta}^{\rm obs} = \Theta^{\rm obs} + \frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}} + \frac{U_0^{\rm obs}}{\bar{a}} v_k \bar{\gamma}^k \tag{F.59}$$

ただし、U_k, U^k は線形量である。(F.58) と前節の (F.52) を見比べれば、共形因子の摂動項の選び方により、変換 $\tilde{\mathbf{p}} = \Omega\mathbf{p}$ は観測者が変わることによるローレンツ変換以外の重力的な効果を及ぼすことが分かる。

もう一つ簡単かつ有用な例として、$\bar{\Omega} = \bar{a}$, $\delta\Omega/\bar{\Omega} = 0$, $v^i = 0$、すなわち $\tilde{\mathbf{p}} = \bar{a}\mathbf{p}$ を挙げる。光子のエネルギーは宇宙の一様等方膨張と共に赤方偏移する ($p \propto \bar{a}^{-1}$) ので、$\tilde{\mathbf{p}}$ は膨張を抜きだした共動運動量 (comoving momentum) である。この変換により、

$$\frac{1}{\tilde{p}}\frac{d\tilde{p}}{Nd\tau} = \frac{1}{p}\frac{dp}{Nd\tau} + \frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} \tag{F.60}$$

よって、$\tilde{p}$ の発展方程式から一様等方膨張による寄与はなくなる。

3.5 Summary of SW effect

代表的な観測者に対する SW 効果を、座標表示でまとめておく。

- Normal Observer

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^n_{SW} &= -\bar{N}(\delta H) - \frac{\bar{N}}{\bar{a}^2}\sigma_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \frac{\bar{N}}{\bar{a}}A_k\bar{\gamma}^k & \text{(F.61)} \\ &= -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{\bar{N}}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{\bar{N}}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. & \text{(F.62)} \end{aligned}$$

- Realistic Observer

$$p^u = p^n\left(1 - h_{0k}\bar{\gamma}^k\right), \tag{F.63}$$

$$\mathcal{G}^u_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k + \frac{\bar{N}}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.64}$$

- Specific Observer

$$p^s = p^n\left(1 - \frac{1}{2}h_{00} - h_{0k}\bar{\gamma}^k\right), \tag{F.65}$$

$$\mathcal{G}^s_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k - \frac{1}{2}\dot{h}_{00}. \tag{F.66}$$

最後の変換は、$\mathcal{G}_{SW}$ が時間微分のみにする狙いで行なったもので、メトリックの時間変動が無視できる場合光子はフリーに飛ぶことになる。しかし現実には、このような観測者を実現できる 4 元速度ベクター $\mathbf{U}^{\rm obs}$ は存在しない。従って、得られる温度ゆらぎ $\Theta^s = \Theta^n \left(1 - \frac{1}{2}h_{00} - h_{0k}\bar{\gamma}^k\right)$ は、物理的なものではないことに注意する。あくまで、計算の簡便化のために採用されているだけである[§] 。

[§] Hu (1995) において、「実効温度 (effective temperature)」と呼ばれている。

付 録G　Scattering & Polarization

1　Collision Integral

光子は、電子とコンプトン散乱 (Compton scattering) を通じて相互作用を行う。4 元運動量をそれぞれ $\gamma(\mathbf{p}') + e^-(\mathbf{q}') \leftrightarrow \gamma(\mathbf{p}) + e^-(\mathbf{q})$ と定義すれば、$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}' = 0$, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}' = -m_e^2$ である。電子を記述する分布関数 $g(\mathbf{q})$ を用い、$C[f_t]$ は形式的に

$$\begin{aligned} C[f_t(\mathbf{p})] &= \int q^n dV_{(q)} \int dW \left[\mathcal{C}_{\rm in}(\mathbf{p}' \to \mathbf{p}) - \mathcal{C}_{\rm out}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}')\right] \\ &= \int q^n dV_{(q)} dW \left[g(\mathbf{q}') f_t(\mathbf{p}') \left(1 + f_t(\mathbf{p})\right) - g(\mathbf{q}) f_t(\mathbf{p}) \left(1 + f_t(\mathbf{p}')\right)\right] \end{aligned} \tag{G.1}$$

と書き下せ、衝突積分 (collision integral) と呼ばれる。$dV_{(q)}$ は Appendix F で定義した不変運動量積分、q^n は $\mathbf{n}$ が観測する電子のエネルギー、dW は散乱確率、$\mathcal{C}_{\rm in}, \mathcal{C}_{\rm out}$ の $1 + f_t$ は光子の従うボーズ統計による誘導項である (フェルミ統計に従う粒子であれば $1 - f_t$) 。電子は陽子とクーロン相互作用 (Coulomb interaction) によってカップルしており、約 2000 倍重い陽子の集団的運動 (bulk motion) v_b^I の中でランダムな熱運動 (thermal motion) を行なっていると考えられる。従って分布関数をマクスウェル分布 (Maxwellian) で定義でき、

$$g(\mathbf{q}) \equiv x_e n_e (2\pi m_e T_e)^{-3/2} \exp\left(\frac{-(q^I - m_e v_b^I)^2}{2 m_e T_e}\right). \tag{G.2}$$

電離度 x_e、電子数密度 n_e、電子温度 T_e を定義すれば、電子の分布関数のモーメントは

$$\int q^n dV_{(q)} g(\mathbf{q}) = x_e n_e, \tag{G.3}$$

$$\int q^n dV_{(q)} q^I g(\mathbf{q}) = x_e n_e m_e v_b^I, \tag{G.4}$$

$$\int q^n dV_{(q)} q^I q^J g(\mathbf{q}) = x_e n_e m_e^2 \left(v_b^I v_b^J + \delta^{IJ} \frac{T_e}{m_e}\right). \tag{G.5}$$

コンプトン散乱の物理過程は量子電磁力学理論 (Quantum Electro Dynamics; QED) によって良く理解されており、量子効果を考慮に入れてフルに dW を計算することが可能である。このような計算で威力を発揮するのは、やはり Appendix B で定義したテトラード

表示であり、この章は全てテトラード表示を用いる事とする。散乱の前後でエネルギーは保存しなければならないので δ 関数を用い、また終状態の運動量空間の不変積分をかけて

$$dW = (2\pi)^4 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{q}' - \mathbf{p}') \left|M\right|^2 p'^n dV_{(p')} q'^n dV_{(q')}. \tag{G.6}$$

$|M|^2$ は散乱振幅であり、電子のスピン状態に関し始状態で平均し、終状態で和をとったものとする。

1.1 invariance of collision integral

ここで、座標変換に関する不変性をまとめておく。まず、$|M|^2 p^n p'^n q^n q'^n$ はスカラーであるように定義される (Weinberg 1995, pp.137)。散乱確率 dW と散乱断面積 $d\sigma$ との関係式は $d\sigma = v_{\rm rel}^{-1} dW$ であり、$v_{\rm rel}$ は始状態での相対速度である。2 粒子の相対速度は、観測者を $\mathbf{U}$ とすると一般に

$$v_{\rm rel} = \frac{\sqrt{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2 - m_p^2 m_q^2}}{(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{p})(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{q})}. \tag{G.7}$$

従って、$v_{\rm rel}(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{p})(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{q})$ は観測者 $\mathbf{U}$ の選び方によらない量である。今はテトラード系なので $\mathbf{U} = \mathbf{n}$ である。一方、定義より $d\sigma$ はスカラーであるから、

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{q}' - \mathbf{p}') \frac{\left|M\right|^2 p^n q^n p'^n q'^n}{v_{\rm rel} p^n q^n} dV_{(p')} dV_{(q')} \tag{G.8}$$

のように、両辺は矛盾なくスカラーで書けていることが確かめられる。また、

$$p^n q^n dW = p^n q^n v_{\rm rel} d\sigma = |\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}|\, d\sigma \tag{G.9}$$

より $p^n q^n dW$ は観測者によらないので、(G.1) より $p^n C[f_t]$ のコンビネーションがスカラーであることが分かる。Appendix F において、ソースの形を (F.12), (F.15) のように選んだ理由はここにある。

1.2 cross section (electron rest-frame)

$p^n C[f_t]$ の不変性を明らかにしたので、これより問題を単純にできる系として電子の静止系 (electron rest-frame) $\tilde{q}^a = (m_e, 0, 0, 0)$ を選ぶ。電子の静止系での量は全てチルダーをつけてあらわす。テトラード表示で、光子の 4 元運動量の成分は $\tilde{p}^a = (\tilde{p}, \tilde{p}\tilde{\gamma}^I)$ と書ける。ここで $(\tilde{p}^n)^2 = \delta_{KL}\tilde{p}^K\tilde{p}^L \equiv \tilde{p}^2$, 方向余弦のなす角 $\delta_{KL}\tilde{\gamma}^K\tilde{\gamma}'^L = \cos\tilde{\beta}$ を定義する。

(G.8) において、$\tilde{q}'^n dV_{(\tilde{q}')}$ を使って $\delta(\tilde{\mathbf{q}}+\tilde{\mathbf{p}}-\tilde{\mathbf{q}}'-\tilde{\mathbf{p}}')$ のうち 3 次元部分を積分すれば、運動量の空間成分に対する保存則 $\tilde{q}'^I = \tilde{p}^I - \tilde{p}'^I$ を得る。残ったデルタ関数は、$\tilde{q}'^n = \sqrt{\delta_{KL}\tilde{q}'^K\tilde{q}'^L + m_e^2}$ を使って p' について解くと

$$\begin{aligned}
& \delta\left(\tilde{q}'^n + \tilde{p}'^n - \tilde{q}^n - \tilde{p}^n\right) \\
= \;& \delta\left(\sqrt{\delta_{KL}(\tilde{p}^K - \tilde{p}'^L)(\tilde{p}^L - \tilde{p}'^L) + m_e^2} + \tilde{p}' - m_e - \tilde{p}\right) \\
= \;& \delta\left(\sqrt{\tilde{p}^2 - 2\tilde{p}\tilde{p}'\cos\tilde{\beta} + \tilde{p}'^2 + m_e^2} + \tilde{p}' - m_e - \tilde{p}\right) \qquad \text{(G.10)} \\
= \;& \frac{\delta\left(\tilde{p}' - \tilde{p}_c(\tilde{\beta})\right)}{\left|(\tilde{p}' - \tilde{p}\cos\tilde{\beta})/\tilde{q}'^n + 1\right|} \\
= \;& \frac{\tilde{q}'^n\tilde{p}'}{m_e\tilde{p}}\delta\left(\tilde{p}' - \tilde{p}_c(\tilde{\beta})\right). \qquad \text{(G.11)}
\end{aligned}$$

$\tilde{p}_c(\tilde{\beta})$ は、エネルギー保存のデルタ関数 (G.10) を $\tilde{p}'$ について解いた解であり、

$$\tilde{p}' = \frac{\tilde{p}}{1 + (\tilde{p}/m_e)(1-\cos\tilde{\beta})} \equiv \tilde{p}'_c(\tilde{\beta}). \qquad \text{(G.12)}$$

すなわち、エネルギー $\tilde{p}$ の入射光子は、入射方向に対して $\tilde{\beta}$ の方向にエネルギー $\tilde{p}'_c$ で散乱されるのである。特に、$\tilde{p} \ll m_e$ の時は $\tilde{p}' \approx \tilde{p}$ であり、電子の静止系では弾性散乱 (erastic scattering) が良い近似で成り立つ。以上より (G.8) は、

$$\begin{aligned}
d\sigma = d\tilde{\sigma} &= (2\pi)^4 \frac{\tilde{q}'^n\tilde{p}'_c}{m_e\tilde{p}}\delta\left(\tilde{p}' - \tilde{p}_c(\tilde{\beta})\right)\left|\tilde{M}\right|^2 \tilde{p}' dV_{(\tilde{p}')} \\
&= (2\pi)^4 \frac{\tilde{q}'^n\tilde{p}'^3_c}{m_e\tilde{p}}\left|\tilde{M}\right|^2 d\Omega_{\tilde{p}'}. \qquad \text{(G.13)}
\end{aligned}$$

散乱振幅 $|M|^2$ は QED で計算できる (Weinberg 1995, pp.367) * 。

$$|M|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{e^4}{64(2\pi)^6 p^n p'^n q^n q'^n}\left[\frac{8(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}')^2}{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{q})} + 32(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}')^2\right]. \qquad \text{(G.14)}$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ は入射光子、$\boldsymbol{\epsilon}'$ は放射光子の偏光ベクター、ファクター $1/2$ は電子の始状態のスピンに関する平均である。

(G.14) の各スカラー積は

$$\tilde{\mathbf{p}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}' = -\tilde{p}\tilde{p}' + \tilde{p}\tilde{p}'\delta_{KL}\tilde{\gamma}^K\tilde{\gamma}'^L$$

* p, q はそれぞれ、Weinberg (1995) の k, p に対応している。

$$= \tilde{p}\tilde{p}'(\cos\tilde{\beta}-1) = m_e\tilde{p}\tilde{p}'\left(\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{\tilde{p}'}\right), \tag{G.15}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}\cdot\tilde{\mathbf{q}} = -m_e\tilde{p}, \tag{G.16}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}'\cdot\tilde{\mathbf{q}} = -m_e\tilde{p}'. \tag{G.17}$$

(G.15) の最後の等号は、(G.12) を用いて $\cos\tilde{\beta}-1$ を消去することによって得られる。(G.14) – (G.17) より

$$\left|\tilde{M}\right|^2 = \frac{\alpha^2}{4(2\pi)^4\tilde{p}\tilde{p}'m_e\tilde{q}'^n}\left[\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}'}+\frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}}-2+4(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}')^2\right]. \tag{G.18}$$

$\alpha\equiv e^2/4\pi$ は、微細構造定数 (fine structure constant) である。従って微分散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\tilde{p}'}} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2}\left(\frac{\tilde{p}'_c}{\tilde{p}}\right)^2\left[\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}'_c}+\frac{\tilde{p}'_c}{\tilde{p}}-2+4(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}')^2\right]. \tag{G.19}$$

これは、クライン – 仁科 (Klein-Nishina) の公式と呼ばれている (Klein & Nishina 1929)。特に、前述のような弾性散乱の場合はトムソン散乱 (Thomson scattering) と呼ばれており、トムソン散乱の断面積 $\sigma_T\equiv 8\pi\alpha^2/3m_e^2$ を用いて

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\tilde{p}'}} = \frac{3}{8\pi}\sigma_T(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}')^2 \tag{G.20}$$

とあらわされる。もし入射光子、放射光子の偏光を問わないとするならば、偏光ベクターを入射について平均し、放射について和をとらねばならない。

$$\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega_{\tilde{p}'}}\right\rangle = \frac{3}{8\pi}\sigma_T\left\langle(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}')^2\right\rangle = \frac{3}{16\pi}\sigma_T(1+\cos^2\tilde{\beta}) = \frac{\sigma_T}{4\pi}\left(1+\frac{1}{2}P_2(\cos\tilde{\beta})\right). \tag{G.21}$$

$P_\ell(x)$ はルジャンドル関数 (Legendre function; Appendix I) である。最右辺第 1 項は等方散乱、第 2 項は角依存性による非等方散乱で、$l=2$ であることより四重極 (quadrupole) であることが分かる。このように、トムソン散乱は四重極の異方性を生成する。

(G.20) は弾性散乱の場合にのみ正しい式である。もちろん完全弾性散乱というのは理想化された場合であり、現実には非弾性散乱である。しかし、トムソン散乱の近似が悪くなるのは $\tilde{p}\gtrsim m_e = 511\ \mathrm{keV}\sim 6\times10^9\ \mathrm{K}$ の場合であり、CMB ゆらぎの寄与を生成するような時期 ($\lesssim 10^4\ \mathrm{K}$) では、十分トムソン散乱で良い。ただしこれは全て電子の静止系での話しであり、ローレンツ変換によって電子が速度 v_e で動いている系へ移れば、

$$1 = \frac{\tilde{p}'_c}{\tilde{p}} = \frac{p'_c(1-\gamma'_I v_e^I)}{p(1-\gamma^I v_e^I)}$$

$$\frac{p'_c}{p} = 1+(\gamma'_I-\gamma_I)v^I+(\gamma'_J v^J)(\gamma'_I-\gamma_I)v^I+O(v^3). \tag{G.22}$$

のように光子はエネルギー変化を生じる。

2 Polarization

トムソン散乱の断面積 (G.20) は偏光ベクターの依存性 $(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}')^2$ を持っているため、偏光を考慮に入れて解析をしなければならない。偏光をフルに考慮した散乱問題は、Chandrasekhar (1950, pp.35, §16) に詳しい。この節は全て電子の静止系で議論しているが、表記を簡単にするためチルダーは外す。

2.1 Stokes parameters

光子の偏光状態は、ストークスパラメター (Stokes parameter) と呼ばれる量 Q, U, V によって完全に記述される。Q, U は直線偏光をあらわし、V は円偏光をあらわす。Q, U を定義するには、まず光子の振動面を測定する基準となる座標系を設定せねばならない。座標系を決めれば、N-S (南北) の振動を $Q > 0$, E-W を $Q < 0$、NE-SW (NW-SE) を $U > 0$ $(U < 0)$ と定義できる。直線偏光度は $P \equiv \sqrt{Q^2 + U^2}$ である。また、設定した座標上における振動面の位置は、N から測った位置角 $\alpha \equiv \frac{1}{2}\tan^{-1}(U/Q)$ で決められる。なぜ Q, U の 2 つが必要であったかと言えば、偏光状態を決めるには偏光度 P と位置角 α が必要であり、その 2 つの自由度を同じ次元を持つスカラー量 Q, U に振り分けたためである。すなわち、本質的に直線偏光は 2 つの自由度をもって記述されねばならない。一方、円偏光は自由度が 1 つである。ストークスパラメターにより、光の強度は I は $I = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$ と求められる。このように和で記述できるのがストークスパラメターの利点である。

以上の定義より、Q, U は座標系の「反時計まわり (右ねじ)」ϕ 回転:

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1' \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} \tag{G.23}$$

に対して

$$\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} \tag{G.24}$$

のように変換されるため、複素ベクター $Q + iU$ を定義すれば

$$(Q \pm iU)' = e^{\mp 2i\phi}(Q + iU). \tag{G.25}$$

すなわち、複素偏光ベクター $Q \pm iU$ は、スピン ± 2 を持つ場である[†]。一方、Θ, V は回

[†] この定義は、例えば Weinberg (1995, pp.72), 砂川 (1991, pp.154) に詳しい。ただし、『座標系』の「反時計まわり」回転は、『状態ベクター』に対する「時計まわり」回転であることに十分注意する。

転不変であるからスピン 0 である。

ところで、Chandrasekhar は座標系の「時計まわり」回転に対して (G.24) を定義している[‡]。この場合、$Q \pm iU$ は定義からスピン ∓ 2 を持つことになる。ここでは符号の不必要な混乱を避けるため、Chandrasekhar とは逆の定義 (G.23), (G.24) を用いる。

2.2 scattering matrix: $\mathsf{S}(\beta)$

入射光子と放射光子の方向が同一平面にのるような散乱面 (scattering plane) を定義する。散乱面に対して垂直な偏光ベクターをもつものを $\Theta_\perp$、平行なものを $\Theta_\parallel$ とすれば、トムソン散乱によって各々の偏光成分は

$$\begin{pmatrix} \Theta'_\parallel \\ \Theta'_\perp \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos^2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_\parallel \\ \Theta_\perp \\ U \\ V \end{pmatrix} \tag{G.26}$$

と変換される。β は散乱角であり、各々の散乱角依存性は $(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}')^2$ によって計算される。係数は、$d\sigma = (3/2)(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}')^2(d\Omega/4\pi)$ に由来する。$\Theta_\perp$, $\Theta_\parallel$ を、$\Theta = \Theta_\parallel + \Theta_\perp$, $Q = \Theta_\parallel - \Theta_\perp$ に関して書き直せば、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}' &= \mathsf{S}(\beta)\boldsymbol{I} \\ \begin{pmatrix} \Theta' \\ (Q+iU)' \\ (Q-iU)' \\ V' \end{pmatrix} &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos^2\beta) & -\frac{1}{4}\sin^2\beta & -\frac{1}{4}\sin^2\beta & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin^2\beta & \frac{1}{4}(1+\cos\beta)^2 & \frac{1}{4}(1-\cos\beta)^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin^2\beta & \frac{1}{4}(1-\cos\beta)^2 & \frac{1}{4}(1+\cos\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ Q+iU \\ Q-iU \\ V \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{G.27}$$

これまでの議論は、全て「散乱面」という特殊な平面上でのみ正しい。しかし、我々の座標系はもちろん散乱面そのものではないため、変換を行なわねばならない。

(1) 電子を中心とする天球座標 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ [§] を考え、$\boldsymbol{I}$ をこの座標系において定義する。

[‡] Chandrasekhar (1950, pp.35, §16) では、回転行列を $\mathsf{L}(\phi)$ と表記しているが、これは"left-handed" と言う意味で使っているのだろう。

[§] ここでのチルダーは「散乱前の座標」を示しており、電子の静止系を示しているわけではない。そもそも、この節の議論は全て電子の静止系で行なわれている。

(2) 散乱面に直交する座標系へ移る。散乱面は子午面に対して反時計まわり (右ねじ) に α の角をなしているとする。Θ, V は回転に対して不変なので、$Q \pm iU$ に対して回転行列 (G.24) を用い、$\mathbf{R}(\alpha) = \mathrm{diag}\,[1, e^{-2i\alpha}, e^{2i\alpha}, 1]$ ¶ 。

(3) トムソン散乱。散乱行列 $\mathbf{S}(\beta)$ をかける。

(4) 天球座標系に戻る。散乱後の球座標 (θ, ϕ) において、時計まわり (反右ねじ) に $\pi - \gamma$ 回転: $\mathbf{R}\,(-(\pi-\gamma)) = \mathrm{diag}\left[1, e^{2i(\pi-\gamma)}, e^{-2i(\pi-\gamma)}, 1\right] = \mathrm{diag}\,[1, e^{-2i\gamma}, e^{2i\gamma}, 1] = \mathbf{R}(\gamma)$.

以上の操作より、位相行列 (phase matrix) $\mathbf{P}$ を

$$\mathbf{P}(\theta, \phi; \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \equiv \mathbf{R}(\gamma)\mathbf{S}(\beta)\mathbf{R}(\alpha) \tag{G.28}$$

と定義すれば、衝突によるソース項 $\mathfrak{S}(\theta, \phi)$ は

$$\mathfrak{S}(\theta, \phi) \equiv \int \mathbf{P}(\theta, \phi; \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \boldsymbol{I}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \frac{d\tilde{\Omega}}{4\pi}. \tag{G.29}$$

従って、散乱過程における衝突積分は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}_C^{\Theta} \\ \mathcal{G}_C^{Q+iU} \\ \mathcal{G}_C^{Q-iU} \\ \mathcal{G}_C^{V} \end{pmatrix} = -\dot{\tau_c} \boldsymbol{I}(\theta, \phi) + \dot{\tau_c} \mathfrak{S}(\theta, \phi) \tag{G.30}$$

と書き下せる。$\dot{\tau_c} \equiv x_e n_e \sigma_T$ は光学的深さ (optical depth) であり、電子による散乱確率をあらわす。ここで、(G.1) と見比べてみる。(G.30) は電子の静止系での議論であり、かつ完全弾性散乱のもとでの輸送方程式である。従って電子 – 光子間のエネルギー輸送はなく、単なる衝突の問題として扱うことができるのである。第 1 項は流出項、第 2 項が流入項に対応しており、$\dot{\tau_c}$ はトムソン散乱断面積と電子の分布関数 g (G.2) の 0 次のモーメントの積である。

¶ Hu & White (1997b) では $\mathbf{R}$ を「状態」を変換する行列として定義しているので、時計まわり回転 $-\alpha$ を施している。

2.3 phase matrix: $\mathbf{P}(\theta,\phi;\tilde{\theta},\tilde{\phi})$

位相行列 $\mathbf{P}(\theta,\phi;\tilde{\theta},\tilde{\phi})$ には、(G.21) に現われた等方、非等方散乱に加え、偏光モード毎の散乱の情報まで全て含まれている。具体的に書き下せば、

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\theta,\phi;\tilde{\theta},\tilde{\phi}) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(1+\cos^2\beta) & -\frac{3}{8}\sin^2\beta e^{-2i\alpha} & -\frac{3}{8}\sin^2\beta e^{2i\alpha} & 0 \\ -\frac{3}{4}e^{-2i\gamma}\sin^2\beta & \frac{3}{8}e^{-2i\gamma}(1+\cos\beta)^2e^{-2i\alpha} & \frac{3}{8}e^{-2i\gamma}(1-\cos\beta)^2e^{2i\alpha} & 0 \\ -\frac{3}{4}e^{2i\gamma}\sin^2\beta & \frac{3}{8}e^{2i\gamma}(1-\cos\beta)^2e^{-2i\alpha} & \frac{3}{8}e^{2i\gamma}(1+\cos\beta)^2e^{2i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\begin{pmatrix} Y_2^0+2\sqrt{5}Y_0^0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}Y_2^{-2} & -\sqrt{\frac{3}{2}}Y_2^2 & 0 \\ -\sqrt{6}e^{-2i\gamma}{}_2Y_2^0 & 3e^{-2i\gamma}{}_2Y_2^{-2} & 3e^{-2i\gamma}{}_2Y_2^2 & 0 \\ -\sqrt{6}e^{2i\gamma}{}_{-2}Y_2^0 & 3e^{2i\gamma}{}_{-2}Y_2^{-2} & 3e^{2i\gamma}{}_{-2}Y_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{15}Y_1^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{G.31}$$

${}_sY_\ell^m = {}_sY_\ell^m(\beta,\alpha)$ はスピン調和関数 (spin harmonics) であり、Appnedix I に具体的に書き下してある。

$$\mathbf{P}(\theta,\phi;\tilde{\theta},\tilde{\phi}) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \tag{G.32}$$

$$\mathbf{P}_0 = \sqrt{4\pi}\begin{pmatrix} Y_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{G.33}$$

$$\mathbf{P}_1 = 4\pi\sum_{m=-1}^{1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Y}_1^{m*}Y_1^m \end{pmatrix}, \tag{G.34}$$

$$\mathbf{P}_2 = 4\pi\sum_{m=-2}^{2}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \tilde{Y}_2^{m*}Y_2^m & -\sqrt{\frac{3}{2}}{}_2\tilde{Y}_2^{m*}Y_2^m & -\sqrt{\frac{3}{2}}{}_{-2}\tilde{Y}_2^{m*}Y_2^m & 0 \\ -\sqrt{6}\tilde{Y}_2^{m*}{}_2Y_2^m & 3{}_2\tilde{Y}_2^{m*}{}_2Y_2^m & 3{}_{-2}\tilde{Y}_2^{m*}{}_2Y_2^m & 0 \\ -\sqrt{6}\ \tilde{Y}_2^{m*}{}_{-2}Y_2^m & 3{}_2\tilde{Y}_2^{m*}{}_{-2}Y_2^m & 3{}_{-2}\tilde{Y}_2^{m*}{}_{-2}Y_2^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{G.35}$$

ただし、今度は ${}_sY_\ell^m = {}_sY_\ell^m(\theta,\phi),\ {}_s\tilde{Y}_\ell^{m*} = {}_sY_\ell^{m*}(\tilde{\theta},\tilde{\phi})$ である。(G.34), (G.35) は、スピン調和関数の加法定理 (I.33) を用いて導ける。$\mathbf{P}_0,\ \mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2$ は、それぞれパターンの単極

(monopole), 双極 (dipole), 4 重極 (quadrupole) に寄与する成分である。明らかに、V は双極のみ、$Q \pm iU$ は 4 重極のみに寄与していることが分かる。

位相行列は $\boldsymbol{I}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \to \boldsymbol{I}(\theta, \phi)$ のマッピングを与える行列である。従って、$(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \to (\theta, \phi)$ という「回転」を施していると思えば良い。実際 ${}_sY_\ell^m(\theta, \phi)$ は、(ℓ, m, s) を持つ量の回転 $(0, 0) \to (\theta, \phi)$ であり、逆にその複素共役 ${}_sY_\ell^{m*}(\theta, \phi)$ は $(\theta, \phi) \to (0, 0)$ である。従って、積 ${}_sY_\ell^{m*}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}){}_sY_\ell^m(\theta, \phi)$ は $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \to (0, 0) \to (\theta, \phi)$ を与える。(G.33) – (G.35) の対角成分は $\boldsymbol{I}$ の各成分をそのまま回転させるが、非対角成分によって Θ, $Q \pm iU$ は互いに混合されることになる。一方、V は他の成分との混合が一切ないため、初期条件として $V = 0$ ならば、以降 V は生成されることはない。トムソン散乱は円偏光を生成できないのである。

また $\mathbf{P}_2$ には、計算のチェックも兼ねて重要な規則を見出すことができる。スピン 2 の $Q + iU$ にからむ行列の成分 (2 行目と 2 列目) には、必ずスピン 2 の調和関数 ${}_2Y_\ell^m$ がある。2 列目は散乱前の $\tilde{Q} + i\tilde{U}$ にかかる ${}_2\tilde{Y}_\ell^{m*}$ が、2 行目は散乱後の $Q + iU$ を記述する ${}_2Y_\ell^m$ が、それぞれ必ず存在せねばならない。その他の成分についても同様である。さしずめ、${}_2\tilde{Y}_2^{m*}{}_{-2}Y_2^m$ の意味は「散乱前の $\tilde{Q} + i\tilde{U}$ を散乱後の $Q - iU$ にする変換」というところであろう。

3 Energy Transfer

前節ではエネルギー輸送を考えない場合の衝突積分を求めた。実際、最終散乱面 (last scattering surface) ではまだ電子と光子は熱平衡状態にあるため、電子から光子へのエネルギー輸送は全く問題にならない。しかし、光子が後に高温電子ガス中を通過するような状況が実現されれば、電子の温度が光子の温度を上回り、エネルギー輸送が起こる可能性がある。このような問題を解くためには、衝突積分をエネルギー輸送も考慮して求めねばならない。フルにコンプトン散乱による衝突積分を求める事は不可能であるため、エネルギー輸送の 2 次のオーダー、すなわち、$C[f_t]$ を光子のエネルギー変化 $\delta p = p' - p$ について 2 次まで展開し、近似的な衝突積分が Kompaneets によって求められた (Kompaneets 1957) [‖]。これは Kompaneets 方程式と呼ばれており、後に Sunyaev & Zel'dovich によって天文学的に応用され、スニヤエフ – ゼルドヴィッチ (SZ) 効果と呼ばれる重要な効果を発見するに至った (Zel'dovich & Sunyaev 1969; Sunyaev & Zel'dovich 1972)。また、再イ

[‖] 電子の静止系では常に弾性散乱 ($\tilde{p}' = \tilde{p}$) は良い近似であるが、電子が動く系においては (G.22) のようにエネルギー輸送 ($p' > p$) が起こり得る。

オン化した宇宙を光子が通過する場合、イオンのクランプは重力不安定性によって集団運動をしており、「運動的」エネルギー輸送が起こる可能性がある (Zel'dovich, Illarionov & Sunyaev 1972)。

Hu, Scott & Silk (1994) は、$C[f_t]$ を $p'-p$ に関してテイラー展開して各々のオーダーの項を順に拾い出してゆくことで、0 次の等方的トムソン散乱、非等方散乱、1 次のドップラー効果、2 次の Kompaneets 方程式とドップラー効果を系統的に導出している。ただし、偏光は無視する。

$$C[f_t] = C_0[f_t] + C_{v_b}[f_t] + C_{v_b^2}[f_t] + C_K[f_t] + O\left((p'-p)^3\right), \tag{G.36}$$

$$\begin{aligned}
C_0[f_t] &= \dot{\tau_c}\left[(f_{t0}-f_t) + \frac{1}{2}P_2(\cos\theta)f_{t2}\right], && \text{(G.37)}\\
C_{v_b}[f_t] &= -\dot{\tau_c}\gamma_I v_b^I\left(p\frac{\partial f_t}{\partial p}\right), && \text{(G.38)}\\
C_{v_b^2}[f_t] &= \dot{\tau_c}\left\{\left[(\gamma_I v_b^I)^2 + v_b^2\right]\left(p\frac{\partial f_t}{\partial p}\right) + \left[\frac{11}{20}(\gamma_I v_b^I)^2 + \frac{3}{20}v_b^2\right]\left(p^2\frac{\partial^2 f_t}{\partial p^2}\right)\right\}, && \text{(G.39)}\\
C_K[f_t] &= \dot{\tau_c}\frac{1}{m_e p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{p^4\left[T_e\frac{\partial f_t}{\partial p} + f_t(1+f_t)\right]\right\}. && \text{(G.40)}
\end{aligned}$$

ただし、$f_{t\ell} \equiv \int P_\ell(\cos\theta) f_t (d\Omega/4\pi)$ で、これは ℓ 重極のモーメントである。CMB のスペクトルの、ボーズ – アインシュタイン分布 (F.18) からのズレは非常に小さいので、f_t の p 微分に関しては

$$\begin{aligned}
p\frac{\partial f_t}{\partial p} &= -zf_t(1+f_t) = -\frac{ze^z}{(e^z-1)^2}, && \text{(G.41)}\\
p^2\frac{\partial^2 f_t}{\partial p^2} &= z^2 f_t(1+f_t)(1+2f_t) = \frac{z^2e^z}{(e^z-1)^2}\coth\frac{z}{2} && \text{(G.42)}
\end{aligned}$$

を使うことができる。ここで、$z \equiv p/T$ である。Θ に関するボルツマン方程式の衝突項 (F.30) を求めれば、

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \dot{\tau_c}\left[(\Theta_0-\Theta) + \frac{1}{2}P_2(\cos\theta)\Theta_2\right], && \text{(G.43)}\\
\mathcal{G}_{v_b} &= \dot{\tau_c}\gamma_I v_b^I, && \text{(G.44)}\\
\mathcal{G}_{v_b^2} &= z(1+2f_t)\dot{\tau_c}\left[\frac{11}{20}(\gamma_I v_b^I)^2 + \frac{3}{20}v_b^2\right] - \dot{\tau_c}\left[(\gamma_I v_b^I)^2 + v_b^2\right], && \text{(G.45)}\\
\mathcal{G}_K &= \left[z(1+2f_t) - 4\right]\left(\dot{\tau_c}\frac{T_e - T}{m_e}\right). && \text{(G.46)}
\end{aligned}$$

(G.43) は前節の結果と同じであり、偏光を無視した極限でのトムソン散乱による等方、非等方散乱の寄与である。(G.44) は、電子の静止系からのローレンツ変換によって生じた項である。光子はドップラー効果による赤方偏移、もしくは青方偏移を受けるが、ネットでのエネルギー輸送は起こらずスペクトルの形を変えることはない。(G.45) は 2 次のドップラー効果による寄与であり、電子の集団運動に起因するエネルギー輸送が存在する。(G.46) は Kompaneets 方程式であり、電子の熱的運動によってエネルギー輸送が存在する。ただし、電子と光子が熱平衡状態にある時は $T_e = T$ であるため、エネルギーの輸送は起こらない。

(G.45) と (G.46) は、電子の運動形態こそ違うが、本質的には同じ現象である。このことをよりはっきり見るため、再イオン化した宇宙において、光子がイオンクランプに多数回散乱を受けるような状況を考える。この時、$\mathcal{G}$ を v_b^I について平均化することが意味を持つ。まず、1 次のドップラー効果は $\left\langle \gamma_I v_b^I \right\rangle = 0$ で残らない。2 次は、$\left\langle (\gamma_I v_b^I)^2 \right\rangle = \langle v_b^2 \rangle / 3$ より

$$\mathcal{G}_{v_b^2} = [z(1+2f_t) - 4] \left(\dot{\tau}_c \frac{\langle v_b^2 \rangle}{3} \right). \tag{G.47}$$

従って (G.45) と (G.46) は、電子が「集団運動的」か「熱運動的」かの違いだけで本質的には同じ寄与であり、光子にエネルギーを輸送し、スペクトルを変形させる効果であることが分かる。しかし、多数回散乱が起きるような状況では光子と電子の速度は同じになり、ドップラー効果の寄与はなくなってしまう。また、電子と光子のカップリングが不完全であっても、クランプの速度が非常に相対論的でなければ観測可能な影響を与えることができないため、$\mathcal{G}_{v_b^2}$ によるスペクトルの変形は常に無視しうる。

付 録H　Multipole Expansion

天球上の温度や偏光のパターンを解析する際、パターンを多重極展開 (multipole expansion) する手法が広く使われている。この章では、Hu & White (1997b), Hu, Seljak, White & Zaldarriaga (1998) らによって定式化された「全角運動量法 (total angular momentum method)」に従ってモード関数を定義する。

スピン s を持つ関数 ${}_sF(\tau,\boldsymbol{x},\gamma)$ を、モード関数 ${}_sG_\ell^m$ で多重極展開する。

$$ {}_sF(\tau,x^i,\gamma^i)=\sum_\ell\sum_m {}_sF_\ell^{(m)}(\tau){}_sG_\ell^m(x^i,\gamma^i). \tag{H.1} $$

- orthonormality

$$ \int d\Omega\ {}_sG_{\ell'}^{m'*}{}_sG_\ell^m=\frac{4\pi}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}. \tag{H.2} $$

1　Mode Function in Flat Space

平坦な時空では、ラプラシアンの固有関数が $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ なので

$$ {}_sG_\ell^m=(-i)^\ell\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}{}_sY_\ell^m(\gamma^i)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}). \tag{H.3} $$

- recursion relation

$$ \begin{aligned} \gamma^i\left({}_sG_\ell^m\right)_{|i} &= i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}kY_1^0{}_sG_\ell^m \\ &= k\left[\frac{{}_sc_\ell^m}{2\ell+1}{}_sG_{\ell-1}^m-\frac{{}_sc_{\ell+1}^m}{2\ell+1}{}_sG_{\ell+1}^m-i\frac{ms}{\ell(\ell+1)}{}_sG_\ell^m\right], \end{aligned} \tag{H.4} $$

$$ {}_sc_\ell^m=\sqrt{\frac{(\ell^2-m^2)(\ell^2-s^2)}{\ell^2}}. \tag{H.5} $$

異なる「角運動量量子数」を持つ Y_1^0 と ${}_sY_\ell^m$ の合成には、「クレブシュ – ゴルダン関係 (Clebsh-Gordan relation)」(I.38) を用いた。

2 Mode Function in Curved Space

$$ {}_sG^m_j = \sum_\ell (-i)^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\, {}_s\alpha^{(jm)}_\ell(\chi, q)\, {}_sY^m_\ell(\gamma^i), \tag{H.6} $$

$$ \gamma_{ij}dx^i dx^j = (-\kappa)^{-1}\left[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right], \tag{H.7} $$

$$ q^2 = k^2 + (|m|+1)\kappa, \tag{H.8} $$

$$ \gamma^i \left({}_s\alpha^{(jm)}_\ell\right)_{|i} = q\left[\frac{{}_s\kappa^m_\ell}{2\ell+1}{}_s\alpha^{(jm)}_{\ell-1} - \frac{{}_s\kappa^m_{\ell+1}}{2\ell+1}{}_s\alpha^{(jm)}_{\ell+1} - i\frac{ms}{\ell(\ell+1)}{}_s\alpha^{(jm)}_\ell\right], \tag{H.9} $$

$$ {}_s\kappa^m_\ell = {}_sc^m_\ell \frac{k}{q}\sqrt{1-(\ell^2-|m|-1)\kappa/k^2}. \tag{H.10} $$

- recursion relation

$$ \begin{aligned} \gamma^i \left({}_sG^m_\ell\right)_{|i} &= k\left[\frac{{}_sc^m_\ell}{2\ell+1}\sqrt{1-(\ell^2-|m|-1)\kappa/k^2}\ {}_sG^m_{\ell-1}\right. \\ &\quad -\frac{{}_sc^m_{\ell+1}}{2\ell+1}\sqrt{1-((\ell+1)^2-|m|-1)\,\kappa/k^2}\ {}_sG^m_{\ell+1} \\ &\quad \left. -i\frac{ms}{\ell(\ell+1)}\sqrt{1+(|m|+1)\kappa/k^2}\ {}_sG^m_\ell\right]. \end{aligned} $$

3 Relations between Mode Functions: $Q^{(m)}$ & G^m_ℓ

Appendix D で定義したモード関数 $\mathbf{Q}^{(m)}$ との関係は、

- スカラーモード

$$ Q^{(0)} = G^0_0, \tag{H.11} $$

$$ \gamma^i Q^{(0)}_i = G^0_1, \tag{H.12} $$

$$ \gamma^i\gamma^j Q^{(0)}_{ij} = \frac{2}{3}\sqrt{1-3\kappa/k^2}\ G^0_2. \tag{H.13} $$

- ベクターモード

$$ \gamma^i Q^{(\pm1)}_i = G^{\pm1}_1, \tag{H.14} $$

$$ \gamma^i\gamma^j Q^{(\pm1)}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2\kappa/k^2}\ G^{\pm1}_2. \tag{H.15} $$

- テンサーモード

$$ \gamma^i\gamma^j Q^{(\pm2)}_{ij} = G^{\pm2}_2. \tag{H.16} $$

付 録I Hyper Geometrical Functions

1 Legendre Polynominals

1.1 Legendre function: $P_\ell(x)$

$$P_0(x) = 1, \tag{I.1}$$
$$P_1(x) = x, \tag{I.2}$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \tag{I.3}$$
$$P_\ell(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^0(\theta). \tag{I.4}$$

- parity flip
$$P_\ell\left(\cos(\pi-\theta)\right) = (-1)^\ell P_\ell(\cos\theta). \tag{I.5}$$

- orthonormality
$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\ \delta_{\ell\ell'}. \tag{I.6}$$

- recursion relations
$$(\ell+1)P_{\ell+1}(x) - (2\ell+1)xP_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0, \tag{I.7}$$
$$(2\ell+1)P_\ell(x) = P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x), \tag{I.8}$$
$$(1-x^2)P'_\ell(x) + \ell x P_\ell(x) = \ell P_{\ell-1}(x), \tag{I.9}$$
$$(1-x^2)P'_\ell - (\ell+1)xP_\ell(x) = -(\ell+1)P_{\ell+1}(x). \tag{I.10}$$

1.2 generalized Legendre function: $P_\ell^m(x)$

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_\ell(x), \tag{I.11}$$

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x). \tag{I.12}$$

- parity flip

$$P_\ell^m\left(\cos(\pi-\theta)\right) = (-1)^{\ell+m}P_\ell^m(\cos\theta). \tag{I.13}$$

- orthonormality

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell^m(x)P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\,\delta_{\ell\ell'}, \tag{I.14}$$

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell^m(x)P_{\ell'}^{-m}(x) = (-1)^m\frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell\ell'}. \tag{I.15}$$

2 Spin Harmonics: ${}_sY_\ell^m(\theta,\phi)$

スピン s の調和関数 ${}_sY_\ell^m$ は、スピン 0 の調和関数 (球面調和関数) Y_ℓ^m にスピン昇降演算子を s 回作用させることで得られる (Newman & Penrose 1966)。

$${}_sY_\ell^m(\theta,\phi) = \left[\frac{(\ell-s)!}{(\ell+s)!}\right]^{1/2}\eth^s\left(Y_\ell^m\right) \qquad (0\le s\le l), \tag{I.16}$$

$$= (-1)^s\left[\frac{(\ell+s)!}{(\ell-s)!}\right]^{1/2}\bar{\eth}^{-s}\left(Y_\ell^m\right) \qquad (-l\le s\le 0). \tag{I.17}$$

$\eth$, $\bar{\eth}$ は、それぞれスピンを一つ上げ下げする昇降オペレーターである。

$$\eth\left({}_sY_\ell^m\right) = \sqrt{(\ell-s)(\ell+s+1)}\ {}_{s+1}Y_\ell^m, \tag{I.18}$$

$$\bar{\eth}\left({}_sY_\ell^m\right) = -\sqrt{(\ell+s)(\ell-s+1)}\ {}_{s-1}Y_\ell^m, \tag{I.19}$$

$$\bar{\eth}^p\eth^p\left({}_sY_\ell^m\right) = (-1)^p\frac{(\ell-s)!(\ell+s+p)!}{(\ell+s)!(\ell-s-p)!}\ {}_sY_\ell^m. \tag{I.20}$$

具体的に書き下せば、スピン s を持つ関数 ${}_sF$ に対し

$$\eth\left({}_sF\right) = -\sin^s\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\sin^{-s}\theta\,{}_sF, \tag{I.21}$$

$$\bar{\eth}\left({}_sF\right) = -\sin^{-s}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\sin^{s}\theta\,{}_sF. \tag{I.22}$$

- complex conjugate

$$ {}_sY_\ell^{m*} = (-1)^{s+m}\,{}_{-s}Y_\ell^{-m}. \tag{I.23}$$

- parity flip

$$ {}_sY_\ell^m(\pi-\theta,\phi-\pi) = (-1)^\ell\,{}_{-s}Y_\ell^m(\theta,\phi). \tag{I.24}$$

- orthonormality

$$ \int d\Omega\ {}_sY_{\ell'}^{m'*}(\theta,\phi)\,{}_sY_\ell^m(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}. \tag{I.25}$$

- completeness

$$ \sum_{l,m} {}_sY_\ell^{m*}(\theta',\phi')\,{}_sY_\ell^m(\theta,\phi) = \delta\left(\cos\theta-\cos\theta'\right)\delta\left(\phi-\phi'\right). \tag{I.26}$$

- rotation matrix

  ${}_sY_\ell^m$ は、スピン s を持つ量を回転させる行列でもある。

$$ \mathcal{D}^\ell_{-s,m}(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,{}_sY_\ell^m(\beta,\alpha)e^{-is\gamma}. \tag{I.27}$$

  α, β, γ は、座標系の任意の回転変換をあらわす「オイラー角 (Euler angle)」である (砂川 1991, pp.152)。ただし、回転は反時計まわり (右ねじ) にとってある。例としてスピン 1 を持つ状態をオイラー角 (α,β,γ) だけ回転させれば、状態に作用する回転行列は (砂川 1991, pp.164):

$$ \begin{aligned} U^{-1}(\alpha,\beta,\gamma) &= e^{-i\alpha\hat{J}_3}e^{-i\beta\hat{J}_2}e^{-i\gamma\hat{J}_3}, & \text{(I.28)}\\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\begin{pmatrix} {}_1Y_1^1e^{-i\gamma} & Y_1^1 & {}_{-1}Y_1^1e^{i\gamma}\\ {}_1Y_1^0e^{-i\gamma} & Y_1^0 & {}_{-1}Y_1^0e^{i\gamma}\\ {}_1Y_1^{-1}e^{-i\gamma} & Y_1^{-1} & {}_{-1}Y_1^{-1}e^{i\gamma}\end{pmatrix}. & \text{(I.29)}\end{aligned}$$

  ${}_{\pm1}Y_\ell^m = {}_{\pm1}Y_\ell^m(\beta,\alpha)$, $Y_\ell^m = Y_\ell^m(\beta,\alpha)$ であり、

$$ \begin{aligned} {}_1Y_1^0(\beta,\alpha) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\beta, & \text{(I.30)}\\ {}_1Y_1^{\pm1}(\beta,\alpha) &= \sqrt{\frac{3}{16\pi}}(1\mp\cos\beta)e^{\pm i\alpha}, & \text{(I.31)}\\ {}_{-1}Y_1^{\pm1}(\beta,\alpha) &= \sqrt{\frac{3}{16\pi}}(1\pm\cos\beta)e^{\pm i\alpha}. & \text{(I.32)}\end{aligned}$$

- addition theorem

  ${}_sY_\ell^m$ は回転行列であることが確かめられたので、加法定理を導くことができる。

$$\sum_m {}_{s_1}Y_\ell^{m*}(\tilde{\theta},\tilde{\phi})_{s_2}Y_\ell^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}{}_{s_2}Y_\ell^{-s_1}(\beta,\alpha)e^{-is_2\gamma}. \tag{I.33}$$

  (α,β,γ) は、$(\tilde{\theta},\tilde{\phi})$ と (θ,ϕ) を結ぶ回転変換のオイラー角である。特に $s_1 = s_2 = 0$ の時、良く知られた式:

$$\sum_m Y_\ell^{m*}(\tilde{\theta},\tilde{\phi})Y_\ell^m(\theta,\phi) = \frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\beta). \tag{I.34}$$

  を得る。

- Clebsch-Gordan relation 量子力学の言葉では、スピン調和関数 ${}_sY_\ell^m$ は「軌道角運動量量子数」ℓ,「磁気量子数」m,「スピン角運動量量子数」s を持つ状態の固有関数である。異なる軌道/スピン角運動量を持つ状態を合成する処方箋は量子力学の枠組みの中で定式化されており、「クレブシュ – ゴルダン係数 (Clebsch-Gordan coeffecient)」を用いて合成された状態を展開することができる (砂川 1991, pp.167)。

$$|\ell_1,\ell_2;\ell,m\rangle = \sum_{m_1,m_2} |\ell_1,\ell_2;m_1,m_2\rangle \langle \ell_1,\ell_2;m_1,m_2|\ \ell_1,\ell_2;\ell,m\rangle, \tag{I.35}$$

$$|\ell_1,\ell_2;\ell,-s\rangle = \sum_{s_1,s_2} |\ell_1,\ell_2;-s_1,-s_2\rangle \langle \ell_1,\ell_2;-s_1,-s_2|\ \ell_1,\ell_2;\ell,-s\rangle. \tag{I.36}$$

  ここで、$|\ell_1,\ell_2;m_1,m_2\rangle$ は 2 つの状態の軌道角運動量オペレータ $\boldsymbol{L}_1^2$, $\boldsymbol{L}_2^2$、その 3 軸成分のオペレータ $L_{1,z}$, $L_{2,z}$ の同時固有状態であり、$|\ell_1,\ell_2;\ell,m\rangle$ は $\boldsymbol{L}_1^2$, $\boldsymbol{L}_2^2$ と合成された軌道角運動量 $\boldsymbol{L}^2$, L_z の同時固有状態である。$m \to -s$ は、スピンオペレータに関する同様の定義である。ただし、軌道角運動量とスピン角運動量は合成しない。

$$\begin{aligned} & {}_{s_1}Y_{\ell_1}^{m_1}{}_{s_2}Y_{\ell_2}^{m_2} \\ = & \sqrt{\frac{2\ell_1+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{2\ell_2+1}{4\pi}} \\ & \times \sum_{\ell,m,s} \langle \ell_1,\ell_2;m_1,m_2|\ \ell_1,\ell_2;\ell,m\rangle \langle \ell_1,\ell_2;-s_1,-s_2|\ \ell_1,\ell_2;\ell,-s\rangle \\ & \times \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}{}_sY_\ell^m. \end{aligned} \tag{I.37}$$

  ボルツマン方程式の左辺で必要になる例は、

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0{}_sY_\ell^m$$

$$= \frac{{}_sc_\ell^m}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell-1)}}{}_sY_{\ell-1}^m + \frac{{}_sc_{\ell+1}^m}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}}{}_sY_{\ell+1}^m - \frac{ms}{\ell(\ell+1)}{}_sY_\ell^m, \quad \text{(I.38)}$$

$${}_sc_\ell^m = \sqrt{\frac{(\ell^2-m^2)(\ell^2-s^2)}{\ell^2}}. \quad \text{(I.39)}$$

2.1 spin-0 (spherical harmonics): $Y_\ell^m(\theta,\phi)$

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{1/2} P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \quad \text{(I.40)}$$

$$Y_\ell^{m*} = (-1)^m\ Y_\ell^{-m}. \quad \text{(I.41)}$$

文献によっては、

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \epsilon\left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{1/2} P_\ell^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}, \quad \text{(I.42)}$$

$$\epsilon = \begin{cases} (-1)^m & (m>0), \\ 1 & (m\le 0), \end{cases} \quad \text{(I.43)}$$

$$Y_\ell^{m*} = Y_\ell^{-m}. \quad \text{(I.44)}$$

m が奇数の時、両者は符号が異なるので注意する。

- $m=0$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \text{(I.45)}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad \text{(I.46)}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right). \quad \text{(I.47)}$$

- $m=\pm 1$

$$Y_1^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, \quad \text{(I.48)}$$

$$Y_2^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}. \quad \text{(I.49)}$$

- $m=\pm 2$

$$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}. \quad \text{(I.50)}$$

2.2 spin-2: ${}_{\pm2}Y_\ell^m(\theta,\phi)$

$$ {}_{\pm2}Y_\ell^m(\theta,\phi) = \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\right]^{1/2} (W_\ell^m \pm iX_\ell^m)\,, \tag{I.51} $$

$$ W_\ell^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) Y_\ell^m, \tag{I.52} $$

$$ X_\ell^m = \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\right) Y_\ell^m. \tag{I.53} $$

ここで、W_ℓ^m は $(-1)^\ell$ のパリティを持つが、 X_ℓ^m は パリティ$(-1)^{\ell+1}$ であることは重要である (Kamionkowski, Kosowski & Stebbins 1997) * 。すなわち、(I.51) から明らかなように ${}_{\pm2}Y_\ell^m$ の線形結合

$$ \left({}_2Y_\ell^m + {}_{-2}Y_\ell^m\right)/2 = \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\right]^{1/2} W_\ell^m, \tag{I.54} $$

$$ \left({}_2Y_\ell^m - {}_{-2}Y_\ell^m\right)/2 = i\left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\right]^{1/2} X_\ell^m \tag{I.55} $$

より、異なるパリティを持つ調和関数をつくることができるのである。

- $m = 0$

$$ {}_{\pm2}Y_2^0 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta. \tag{I.56} $$

- $m = \pm1$

$$ {}_2Y_2^{\pm1} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\sin\theta\,(1\mp\cos\theta)\,e^{\pm i\phi}, \tag{I.57} $$

$$ {}_{-2}Y_2^{\pm1} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\sin\theta\,(1\pm\cos\theta)\,e^{\pm i\phi}. \tag{I.58} $$

- $m = \pm2$

$$ {}_2Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{5}{64\pi}}\,(1\mp\cos\theta)^2\,e^{\pm2i\phi}, \tag{I.59} $$

$$ {}_{-2}Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{5}{64\pi}}\,(1\pm\cos\theta)^2\,e^{\pm2i\phi}. \tag{I.60} $$

* Zerilli (1970); 中村, 三尾, 大橋 (1998, pp.101) では、X_ℓ^m の定義は $\sin\theta$ 異なり、パリティ $(-1)^\ell$ を持つ量としている。

3 Bessel Function: $J_\ell(x)$

$$J_0(0) = 1, \tag{I.61}$$
$$J_\ell(0) = 0 \qquad \text{for } \ell \neq 0, \tag{I.62}$$

$$\int_0^\infty J_\ell(x)dx = 1, \tag{I.63}$$
$$\int_0^a xJ_0(x)dx = aJ_1(a). \tag{I.64}$$

- Bessel's integral formulae

$$J_\ell(x) = \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{d\phi}{2\pi} \exp\left(i(\ell\phi - x\sin\phi)\right). \tag{I.65}$$

特に $\ell = 0$ の時、

$$J_0(x) = \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{d\phi}{2\pi} \exp\left(-ix\sin\phi\right) = \int_{\alpha-\pi/2}^{3\pi/2+\alpha} \frac{d\phi}{2\pi} \exp\left(-ix\cos\phi\right). \tag{I.66}$$

最後の等号は $\phi \to \phi + \pi/2$ として求められる。

4 Spherical Bessel Function: $j_\ell(x)$

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x), \tag{I.67}$$

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \tag{I.68}$$
$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \tag{I.69}$$

$$\int_0^\infty j_\ell(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left[(\ell+1)/2\right]}{\Gamma\left[(\ell+2)/2\right]} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}}. \tag{I.70}$$

最後の近似は、$\ell \gg 1$ でのスターリング (Stirling) 近似である。

- recursion relation

$$(2\ell+1)j_\ell(x) = xj_{\ell-1}(x) + xj_{\ell+1}(x), \tag{I.71}$$
$$(2\ell+1)j'_\ell(x) = \ell j_{\ell-1}(x) - (\ell+1)j_{\ell+1}(x). \tag{I.72}$$

- Rayleigh's formulae

$$\exp(-ikr\cos\theta) = \sum_{\ell}(2\ell+1)(-i)^{\ell}j_{\ell}(kr)P_{\ell}(\cos\theta) \quad \text{(I.73)}$$

$$= \sum_{\ell}\sqrt{4\pi(2\ell+1)}(-i)^{\ell}j_{\ell}(kr)Y_{\ell}^{0}(\theta) \quad \text{(I.74)}$$

$$= \sum_{\ell,m}4\pi(-i)^{\ell}j_{\ell}(kr)Y_{\ell}^{m*}(\hat{k})Y_{\ell}^{m}(\hat{q}). \quad \text{(I.75)}$$

ただし、$\hat{k}\cdot\hat{q}=\cos\theta$。

付 録J　Correspondences

線形摂動量の記法は、文献によりまちまちでありしばしば混乱を招く。この章では、主な文献と本論文の量との対応関係を示し、文献間の変換をスムーズにすることを狙いとする。

1　Metric Perturbations

	Bardeen (1980)	*Kodama & Sasaki* (1984)	*Mukhanov et al.* (1992)
metric sign	$-+++$	$-+++$	$+---$
$\bar{N}$	S	a	a
$h_{00}^{(S)}$	$-2AQ^{(0)}$	$-2AY$	-2ϕ
$h_{0i}^{(S)}$	$-B^{(0)}Q_i^{(0)}$	$-BY_i$	$B_{\|i}$
$h_{ij}^{(S)}$	$2H_L Q^{(0)3} g_{ij} + 2H_T^{(0)} Q_{ij}^{(0)}$	$2H_L Y\gamma_{ij} + 2H_T Y_{ij}$	$-2\psi\gamma_{ij} + 2E_{\|ij}$
$h_{0i}^{(V)}$	$-B^{(1)}Q_i^{(1)}$	$-B^{(1)}Y_i^{(1)}$	$-S_i$
$h_{ij}^{(V)}$	$2H_T^{(1)}Q_{ij}^{(1)}$	$2H_T^{(1)}Y_{ij}^{(1)}$	$F_{i\|j} + F_{j\|i}$
$h_{ij}^{(T)}$	$2H_T^{(2)}Q_{ij}^{(2)}$	$2H_T^{(2)}Y_{ij}^{(2)}$	h_{ij}

	Ma & Bertschinger (1995)	*Bond* (1996)	*Hu* (1997)
metric sign	$-+++$	$-+++$	$-+++$
$\bar{N}$	a	a	a
$h_{00}^{(S)}$	-2ψ	-2ν	$-2\Psi Q^{(0)}$
$h_{0i}^{(S)}$	$w_i^{\parallel}$	$\frac{1}{a}\Psi_{n\|i}$	—
$h_{ij}^{(S)}$	$-2\phi\delta_{ij} + \chi_{ij}^{\parallel}$	$2\varphi^{(3)} g_{*ij} - \left(\psi_{\|ij} + \psi_{\|ji}\right)$	$2\Phi Q^{(0)}\delta_{ij}$
$h_{0i}^{(V)}$	$w_i^{\perp}$	$\frac{1}{a^2}N_i^{(V)}$	$-VQ_i^{(1)}$
$h_{ij}^{(V)}$	$\chi_{ij}^{\perp}$	$h_{ij}^{(V)}$	—
$h_{ij}^{(T)}$	χ_{ij}^{T}	$h_{ij}^{(TT)}$	$2HQ_{ij}^{(2)}$

	Hwang & Noh (1998)	*Takada* (1998)
metric sign	$-+++$	$-+++$
$\bar{N}$	a	1
$h_{00}^{(S)}$	-2α	$-2\tilde{\alpha}$
$h_{0i}^{(S)}$	$-\beta_{,i}$	$a\beta_{L,i}$
$h_{ij}^{(S)}$	$2\varphi g_{ij}^{(3)} + 2\gamma_{,i\|j}$	$2\phi\delta_{ij} + \left(h_{L,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta_f h_L\right)$
$h_{0i}^{(V)}$	$-bY_i^{(v)}$	$a\beta_T^i$
$h_{ij}^{(V)}$	$c\left(Y_{i\|j}^{(v)} + Y_{j\|i}^{(v)}\right)$	$h_{T,j}^i + h_{T,i}^j$
$h_{ij}^{(T)}$	$2C_{ij}^{(t)}$	h_{TTij}

2 Gauge Invariants

This Thesis	*Bardeen* (1980)	*Kodama & Sasaki* (1984)	*Mukhanov et al.* (1992)
Φ_A	Φ_A	Ψ	Φ
Φ_H	Φ_H	Φ	Ψ
ϵ_g	ϵ_g	$\mathit{\Delta}_s$	—
ϵ_m	ϵ_m	$\mathit{\Delta}$	$\delta\varepsilon_m^{(\mathrm{gi})}$
ϵ_ζ	—	$\mathit{\Delta}_g$	—
$V_s^{(0)}$	$v_s^{(0)}$	V	—
$V_s^{(1)}$	$v_s^{(1)}$	$V_s^{(1)}$	—
$V_c^{(1)}$	$v_c^{(1)}$	$V^{(1)}$	—

3 Temperature Fluctuations

This Thesis	*Hu & White* (1997)	*Bond* (1996)	*Zaldarriaga & Seljak* (1997)
Θ, Q, U, V	Θ, Q, U, V	Δ_t, Δ_Q, Δ_U, Δ_V	T, Q, U, V
$\Theta_\ell^{(0)}$	$\Theta_\ell^{(0)}$	$(2\ell+1)\Delta_{t\ell}^{(S)}$	$(2\ell+1)\Delta_\ell^{(S)}$
$\Theta_\ell^{(1)}$	$\Theta_\ell^{(1)}$	—	—
$\Theta_\ell^{(2)}$	$\Theta_\ell^{(2)}$	$(2\ell+1)\Delta_{t\ell}^{(T)}/\sqrt{2}$	$(2\ell+1)\Delta_\ell^{(T)}/\sqrt{2}$

付 録K　Physical Review D 58, 023004 (1998)

Constraints on the chaotic inflationary scenario with a nonminimally coupled "inflaton" field from the cosmic microwave background radiation anisotropy

Eiichiro Komatsu* and Toshifumi Futamase†

Astronomical Institute, Graduate School of Science, Tohoku University, Sendai 980-77, Japan

概 要

We investigate a possibility to restrict the chaotic inflationary scenario with large nonminimally coupled inflaton field ϕ considered by Fakir and Unruh by means of the observed cosmic microwave background radiation(CMBR) anisotropy. This model is characterized by the condition $\xi > 1$ and $\psi \equiv 8\pi G\xi\phi^2 \gg 1$ where ξ is the nonminimal coupling constant. We calculate the contributions of the long wavelength gravitational waves (GW) generated in the inflationary period to CMBR anisotropy quadrupole moment. We obtain the constraint $\lambda/\xi^2 = 1.8 \times 10^{-8}/\psi_i$, where λ is the self coupling and ψ_i means the initial value of ψ. Combining this with previously obtained constraint $\sqrt{\lambda/\xi^2} \approx (\delta T/T)_{\rm rms} = 1.1 \times 10^{-5}$, we conclude that the initial value has to be $\psi_i \approx 1.6 \times 10^3$. If the self-coupling has a reasonably values of order 10^{-2}, then $\xi \approx 10^4$ and $\phi_i \approx 10^{-1} m_{pl}$ where m_{pl} is the Planck mass.

1 Introduction

Inflation is regarded as one of the most important conceptual progress in modern cosmology[1, 2]. This concept give us not only the solution of cosmological puzzles such as the horizon and flatness problem, but also the origin of the cosmological perturbations. Among various scenarios of inflation proposed so far, Linde's chaotic scenario seems to be a natural mechanism for the realization of the inflationary expansion[7]. In spite of many attractive features, the original scenario still have the fine tuning problem of the parameters. Namely one has to choose an unreasonably small self coupling constant, i.e. $\lambda < 10^{-12}$, to have the correct magnitude of the density perturbation which is consistent with the observed tiny CMBR fluctuations.

In order to overcome the difficulty, Fakir and Unruh proposed a new version of the chaotic model which has *strong* nonminimal coupling, i.e. $\xi > 1$, to the scalar curvature[12]. Note that we shall adopt in the present paper the sign convention for ξ such that the conformal coupling means $\xi = -1/6$. The chaotic inflationary scenario with nonminimal coupling has been investigated for various values of ξ by Futamase and Maeda[10]. Their result does not exclude the *strong* coupling model of Fakir and Unruh. They have shown that the larger value of ξ relaxes the fine-tuning problem of the self-coupling λ, and this conclusion has been followed by Makino and Sasaki more rigorously[33]. Fakir, Habib, and Unruh also made a rigorous analysis of density perturbation[35].

Constraints on this scenario have been discussed by several authors (e.g. [14, 15]). Here we shall investigate Fakir-Unruh scenario from different point of view. Namely we shall study the effect of the scenario on the tensor CMBR anisotropy. It is known that the long wavelength gravitational waves are generated during the period of the inflationary expansion, and they make a significant contribution to CMBR anisotropy through the Sachs-Wolfe effect[37] on lower multipoles[14, 16]. We will point out that Fakir-Unruh scenario has also a nonnegligible contribution to the spectrum of CMBR anisotropy by generated GW's, and then obtain the constraint on a certain combination of parameters by comparing the predicted quadrupole moment with the results of COBE-DMR observations.

This paper is organized as follows. We first review Fakir-Unruh scenario and present the self-consistent inflationary solutions in Section 2. We then find the radiative modes of the metric perturbations in the spacetime generated by nonminimally coupled inflaton

field, and derive the resulting spectrum of GW in section 3. Based on the result in section 3, we shall calculate the power spectrum of CMBR anisotropy and compare it with the observations of COBE-DMR in Section 4. Finally some discussions are made in section 5. We shall follow Misner, Thorne, and Wheeler[32] for the definition of Riemann tensor, Ricci tensor and Ricci scalar.

2 Background Inflationary Solutions

As explained in the introduction, we shall be in this paper interested in the chaotic inflationary scenario with large positive nonminimal coupling. Thus we shall take the following action as our model.

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} + V(\phi)\right], \tag{K.1}$$

where $\kappa^2 \equiv 8\pi G$. Our definition of ξ is the same as Fakir and Unruh, that is, conformal coupling means $\xi = -\frac{1}{6}$. Note that Futamase and Maeda used opposite sign for ξ. Varying the action (K.1), we obtain the field equations

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\kappa^2} + \xi\phi^2\right)G_{\mu\nu} &= (1+2\xi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \left(2\xi + \frac{1}{2}\right)g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} \\ &- 2\xi\phi\left(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)\phi + g_{\mu\nu}V(\phi), \qquad \text{(K.2)} \\ \Box\phi + \xi R\phi + V_{,\phi} &= 0, \qquad \text{(K.3)}\end{aligned}$$

where $\Box \equiv -g^{-1/2}\partial_\alpha\left(-g^{1/2}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\right)$, and $V_{,\phi} = \partial V/\partial\phi$. Greek and Latin indices take $0,1,2,3$ and $1,2,3$, respectively.

For the spacetime we assume a homogeneous and spatially flat Robertson-Walker universe

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{K.4}$$

Equation(K.2) yields the Hamiltonian constraint equation

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3(1+\kappa^2\xi\phi^2)}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - 6\xi H\phi\dot{\phi}\right], \tag{K.5}$$

where overdots denote time derivatives. The momentum constraint equation is

$$\dot{H} = \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2\xi\phi^2}\left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \xi H\phi\dot{\phi} - \xi\dot{\phi}^2 - \xi\phi\ddot{\phi}\right], \tag{K.6}$$

The equation of motion for the inflaton field is obtained from (K.3) as

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - 6\xi\left(\dot{H} + 2H^2\right)\phi + V_{,\phi} = 0. \tag{K.7}$$

Combining above equations, we obtain

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} &+ \left[\frac{\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\right]\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} \\ &= \frac{1}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\left[4\kappa^2\xi\phi V(\phi) - (1+\kappa^2\xi\phi^2)V_{,\phi}\right]. \end{aligned} \tag{K.8}$$

Using the "slow-roll approximations" such as

$$\left|\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\right| \ll H, \tag{K.9}$$

$$\left|\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right| \ll H, \tag{K.10}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \tag{K.11}$$

the energy constraint and field equation take the following forms, respectively

$$\begin{aligned} H^2 &\approx \frac{\kappa^2}{3(1+\kappa^2\xi\phi^2)} \\ &\quad \left[V(\phi) - \frac{2\xi\phi}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\left\{4\kappa^2\xi\phi V(\phi) - (1+\kappa^2\xi\phi^2)V_{,\phi}\right\}\right] \end{aligned} \tag{K.12}$$

$$3H\dot{\phi} \approx \frac{1}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\left[4\kappa^2\xi\phi V(\phi) - (1+\kappa^2\xi\phi^2)V_{,\phi}\right], \tag{K.13}$$

These are the basic equations which determine the background solution. We shall consider the solutions of these equations in the case with the self-coupling constant and mass term, separately.

2.1 Chaotic Inflation by a self coupling

Let us consider the chaotic inflation generated by the self-coupling constant of the inflaton. Thus we take

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4.$$

Then the equations (K.12) and (K.13) give, respectively

$$H^2 \approx \frac{\kappa^2\lambda\phi^4}{12(1+\kappa^2\xi\phi^2)}\left[1+\frac{8\xi}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\right], \tag{K.14}$$

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{\lambda\phi^3}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}, \tag{K.15}$$

Let us now define our basic variable $\psi \equiv \kappa^2\xi\phi^2$ which turns out to be very useful in our analysis. Since we consider the *strong* curvature coupling, let us consider the situation where

$$\psi \gg 1.$$

This condition simplifies significantly the above equations as

$$H^2 \approx \frac{\lambda\psi}{12\kappa^2\xi^2}, \tag{K.16}$$

$$\frac{\dot{\psi}}{\psi} \approx -\frac{2\lambda}{3\kappa^2\xi(1+6\xi)}\frac{1}{H}, \tag{K.17}$$

Therefore we have the following solution.

$$\frac{\dot{\psi}}{H} \approx -\frac{8\xi}{1+6\xi}, \tag{K.18}$$

$$\psi \approx \psi_i - \frac{8\xi}{1+6\xi}\ln\left(\frac{a}{a_i}\right). \tag{K.19}$$

Note that this solution is consistent with the slow-roll approximations. In fact we have

$$\left|\frac{\dot{\psi}}{H\psi}\right| \approx \left|-\frac{8\xi}{1+6\xi}\frac{1}{\psi}\right| \ll 1. \tag{K.20}$$

From the equations (K.16) and (K.19), we obtain a differential equation for the scale factor.

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\lambda\psi_i}{12\kappa^2\xi^2}}\left[1-\frac{8\xi}{(1+6\xi)\psi_i}\ln\left(\frac{a}{a_i}\right)\right]^{1/2}. \tag{K.21}$$

This equation (K.21) can be easily integrated as

$$a(t) = a_i \exp\left[H_i t - \gamma(H_i t)^2\right], \tag{K.22}$$

Thus we have the following Hubble parameter and scalar field.

$$a(t) = a_i \exp\left[H_i t - \gamma(H_i t)^2\right], \tag{K.23}$$

$$H(t) = H_i\left(1-2\gamma H_i t\right), \tag{K.24}$$

$$\psi(t) = \psi_i\left(1-2\gamma H_i t\right)^2, \tag{K.25}$$

where

$$H_i^2 = \frac{\lambda\psi_i}{12\kappa^2\xi^2}, \tag{K.26}$$

$$\gamma = \frac{2\xi}{(1+6\xi)\psi_i}. \tag{K.27}$$

These expressions indicate that the expansion rate is much more rapid than the rate of change in the Hubble parameter as well as the inflaton field. Since we are interested in the very long-wavelength tensor perturbations which give the largest contribution to the CMBR anisotropy today and such perturbations decouple at the early stage of inflation, we can approximate the above solution to the following simple forms:

$$a(t) \approx a_i e^{H_i t}, \tag{K.28}$$

$$H(t) \approx H_i, \tag{K.29}$$

$$\psi(t) \approx \psi_i. \tag{K.30}$$

Finally, we have to consider the amount of inflation sufficient to solve cosmological puzzles,

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{a_i} &= \exp\left(\int H dt\right) = \exp\left(\int_{\psi_i}^{\psi_f} \frac{H}{\dot{\psi}} d\psi\right) \\ &\approx \exp\left(\int_{\psi_i}^{\psi_f} -\frac{1+6\xi}{8\xi} d\psi\right) = \frac{1+6\xi}{8\xi}(\psi_i - \psi_f) \geq 70. \end{aligned} \tag{K.31}$$

Fakir and Unruh commented $\psi \approx 1$ signals the end of inflation[12]. Thus the *strong* coupling, i.e. $\xi > 1$, condition gives

$$\psi_i \gtrsim 80. \tag{K.32}$$

2.2 Chaotic Inflation by a mass term

Next, we consider a massive free inflaton field with the following potential

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

Then the equations (K.12)and (K.13) become, respectively

$$H^2 \approx \frac{\kappa^2\xi m^2\phi^2}{6\xi(1+\kappa^2\xi\phi^2)}\left[1 + \frac{4\xi}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}(1-\kappa^2\xi\phi^2)\right], \tag{K.33}$$

$$3H\dot{\phi} \approx \frac{m^2\phi(\kappa^2\xi\phi^2 - 1)}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}. \tag{K.34}$$

When $\psi \gg 1$, these equations may be approximated as

$$H^2 \approx \frac{m^2}{6\xi}\left(\frac{1+2\xi}{1+6\xi}\right), \tag{K.35}$$

$$\frac{\dot{\psi}}{\psi} \approx \frac{2m^2}{3(1+6\xi)}\frac{1}{H}. \tag{K.36}$$

We can find a scalar field grows exponentially so that the slow-roll approximations are not satisfied unless $\xi \ll 1$:

$$\left|\frac{\dot{\psi}}{H\psi}\right| \approx \left|\frac{4\xi}{1+2\xi}\right| < 2. \tag{K.37}$$

Thus, we conclude the mass-term inflation does not occur in the model with *strong* coupling. This result is consistent with Futamase and Maeda[10].

3 The Spectrum of GWs generated during the Inflationary Expansion

In this section we shall calculate the spectrum of GWs generated during the period od inflationary expansion in the framework of Fakir-Unruh scenario.

3.1 Radiative Solutions of Metric Perturbations

First we derive the equation for the GWs as the linear metric perturbation. The method is exactly same with the case in general relativity(GR) [28]. Namely we consider a small disturbance $h_{\mu\nu}$ of the spatially flat Friedmann-Robertson-Walker metric $\bar{g}_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu. \tag{K.38}$$

The spatial flatness means that the metric perturbations can be expanded by a plane wave with a comoving wave number k :

$$h^\mu_\nu(\boldsymbol{x},\tau) = \sum_\lambda \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} h_\lambda(\boldsymbol{k},\tau)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\epsilon^\mu_\nu, \tag{K.39}$$

where ϵ^μ_ν is the polarization tensor, and $\lambda = +, \times$ is a mode of the polarization. We choose the synchronous gauge ($h_{00} = h_{0i} = 0$), and use the conformal time ($x^0 = \tau$),

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\mathrm{d}\tau^2 - \left(a^2(\tau)\delta_{ij} + h_{ij}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{K.40}$$

Then the linearized Einstein equations (K.2) lead to the radiative mode of the tensor perturbation:

$$h^k_k = h^k_{i,k} = \delta\psi = 0, \tag{K.41}$$

$$h''_\lambda(\boldsymbol{k},\tau) + \left(2\frac{a'}{a} + \frac{\psi'}{1+\psi}\right) h'_\lambda(\boldsymbol{k},\tau) + k^2 h_\lambda(\boldsymbol{k},\tau) = 0, \tag{K.42}$$

where dashes denote conformal time derivatives. The other components of the Einstein equations (K.2) are trivially satisfied with above conditions.

Writing each component $h_\lambda(\boldsymbol{k},\tau)$ of the GW perturbations as [12, 13],

$$h_\lambda(\boldsymbol{k},\tau) \equiv \frac{1}{R(\tau)}\mu_\lambda(\boldsymbol{k},\tau) = \frac{1}{a\sqrt{1+\psi}}\mu_\lambda(\boldsymbol{k},\tau), \tag{K.43}$$

we have the following equation for μ_λ.

$$\mu''_\lambda(\boldsymbol{k},\tau) + \left(k^2 - \frac{R''}{R}\right)\mu_\lambda(\boldsymbol{k},\tau) = 0. \tag{K.44}$$

This is an ordinally "Schrödinger type" equation. If $k^2 \gg |R''/R|$, we can find a plane wave solution of h_λ with its amplitude scaled by $\left(a\sqrt{1+\psi}\right)^{-1}$.

3.2 The Spectrum of GWs

Now we will calculate the spectrum of the GWs derived above. We follow the previous works[14, 15, 39]. Let us choose the normalization of $a(\tau)$ as

$$a(\tau) = -\frac{1}{H_i\tau} \quad \text{vacuum} \quad \tau \in (-\infty, -\tau_2), \tag{K.45}$$

$$= \frac{2\tau_1\tau}{\tau_0^2} \quad \text{radiation} \quad \tau \in (\tau_2, \frac{\tau_1}{2}), \tag{K.46}$$

$$= \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \quad \text{matter} \quad \tau \in (\tau_1, \tau_0). \tag{K.47}$$

We assumed that the transitions across each phase are instantaneous and we matched $a(\tau)$ and $\dot{a}(\tau)$ at the transition points. This will be an accurate approximation for the long-wave tensor perturbations we are interested in. Note that τ is discontinuous across each transitions. Of course, we could define continuous time across each phases (e.g. [22, 23]), and we can obtain the same results as below.

We shall calculate the amplitude of the GWs generated as quantum noises. The following consideration will help us to choose a convenient field variable to quantize. The equation (K.44) shows that each polarization state of the waves behave as a scalar field φ with a normalization factor of $\sqrt{2\kappa_{\rm eff}^2}$:

$$h_\lambda = \sqrt{2\kappa_{\rm eff}^2}\varphi_\lambda = \sqrt{\frac{2\kappa^2}{1+\psi}}\varphi_\lambda. \tag{K.48}$$

We omit a subscript λ henceforth. This situation is analogous to GR case[21]. We also neglected the other interactions of φ due to the mixture of ψ', which is a good approximation for our purposes. Thus we choose the scalar field φ to quantize as the same way in GR.

$$\varphi(\boldsymbol{x},\tau) = \int {\rm d}^3\boldsymbol{k}\left[\hat{a}_{\rm phase}(\boldsymbol{k})\varphi_k(\tau)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}^\dagger_{\rm phase}(\boldsymbol{k})\varphi^*_k(\tau)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right], \tag{K.49}$$

where $\hat{a}_{\rm phase}$ and $\hat{a}^\dagger_{\rm phase}$ are the annihilation and creation operator at each phase(vacuum dominated, radiation dominated and matter dominated phases), and $\varphi_k(\tau)$ is properly normalized solution of the equation (K.42) :

$$\varphi_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}a(\tau)}e^{-ik\tau}\left(1-\frac{i}{k\tau}\right) \qquad \text{vacuum, matter,} \tag{K.50}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}a(\tau)}e^{-ik\tau} \qquad \text{radiation.} \tag{K.51}$$

We used the fact that $\psi \approx$ const. in the inflationary phase (K.30), and $\psi = 0$ in the post inflationary phase. We also assumed our universe approaches the conformal vacuum mode function as $\tau \to -\infty$, that is

$$\varphi_{k,{\rm VD}} \to \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}a(\tau)}e^{-ik\tau} \qquad \text{for } \tau \to -\infty. \tag{K.52}$$

Where the quantities with "VD" means the quantities evaluated at the vacuum dominated phase, namely at the inflationary phase. The Bogoliubov coefficients relating operators at each phase are defined as :

$$\hat{a}_{\rm RD}(\boldsymbol{k}) = c_1(k)\hat{a}_{\rm VD}(\boldsymbol{k}) + c_2^*(k)\hat{a}^\dagger_{\rm VD}(-\boldsymbol{k}), \tag{K.53}$$

$$\hat{a}_{\rm MD}(\boldsymbol{k}) = c_3(k)\hat{a}_{\rm VD}(\boldsymbol{k}) + c_4^*(k)\hat{a}^\dagger_{\rm VD}(-\boldsymbol{k}). \tag{K.54}$$

where "RD" and "MD" mean "Radiation Dominated" and "Matter Dominated", respectively. Matching the field and its first derivative at the first transition:

$$\varphi_{k,{\rm VD}}(-\tau_2) = c_1\varphi_{k,{\rm RD}}(\tau_2) + c_2\varphi^*_{k,{\rm RD}}(\tau_2), \tag{K.55}$$

$$\varphi'_{k,{\rm VD}}(-\tau_2) = c_1\varphi'_{k,{\rm RD}}(\tau_2) + c_2\varphi^{*\prime}_{k,{\rm RD}}(\tau_2), \tag{K.56}$$

we obtain

$$c_1 = -\frac{H_i\tau_1}{(k\tau_0)^2}e^{2ik\tau_2}\left[1-2ik\tau_2-2(k\tau_2)^2\right], \quad \text{(K.57)}$$

$$c_2 = \frac{H_i\tau_1}{(k\tau_0)^2}. \quad \text{(K.58)}$$

We can see these coefficients satisfy the Bogoliubov relations required for the orthonormality of mode functions φ_k[29] :

$$|c_1|^2-|c_2|^2=1. \quad \text{(K.59)}$$

Since we are interested in GWs which are still well outside the horizon at the time of matter-radiation equality and will give the largest contribution to the CMBR anisotropy today, we may use simpler results up to second order

$$c_1 \approx -\frac{H_i\tau_1}{(k\tau_0)^2}, \quad \text{(K.60)}$$

$$c_2 = \frac{H_i\tau_1}{(k\tau_0)^2}. \quad \text{(K.61)}$$

At the next transition the continuity conditions become

$$c_1\varphi_{k,\mathrm{RD}}(\frac{\tau_1}{2})+c_2\varphi^*_{k,\mathrm{RD}}(\frac{\tau_1}{2}) = c_3\varphi_{k,\mathrm{MD}}(\tau_1)+c_4\varphi^*_{k,\mathrm{MD}}(\tau_1), \quad \text{(K.62)}$$

$$c_1\varphi'_{k,\mathrm{RD}}(\frac{\tau_1}{2})+c_2\varphi^{*\prime}_{k,\mathrm{RD}}(\frac{\tau_1}{2}) = c_1\varphi'_{k,\mathrm{MD}}(\tau_1)+c_2\varphi^{*\prime}_{k,\mathrm{MD}}(\tau_1), \quad \text{(K.63)}$$

Thus we obtain

$$c_3 = \frac{H_i/k}{2(k\tau_1)(k\tau_0)^2} \left[\left\{1-2ik\tau_1-2(k\tau_1)^2\right\}e^{ik\tau_1/2}\left\{1-2ik\tau_2-2(k\tau_2)^2\right\}e^{2ik\tau_2}-e^{3ik\tau_1/2}\right], \quad \text{(K.64)}$$

$$c_4 = \frac{H_i/k}{2(k\tau_1)(k\tau_0)^2} \left[e^{-3ik\tau_1/2}\left\{1-2ik\tau_2-2(k\tau_2)^2\right\}e^{2ik\tau_2}-\left\{1+2ik\tau_1-2(k\tau_1)^2\right\}e^{-ik\tau_1/2}\right], \quad \text{(K.65)}$$

with

$$|c_3|^2-|c_4|^2=1. \quad \text{(K.66)}$$

Up to second order, we get simple solutions again as

$$c_3 \approx -\frac{3iH_i}{2k(k\tau_0)^2}, \quad \text{(K.67)}$$

$$c_4 \approx -\frac{3iH_i}{2k(k\tau_0)^2}. \quad \text{(K.68)}$$

Since we assume each transition is instantaneous, the Universe will remain in the de Sitter vacuum. Thus we may be able to calculate the quantum mechanical two-point correlation function in the de Sitter vacuum.

$$\Delta^{(\mathrm{QM})} \equiv \frac{k^3}{(2\pi)^2}\int d^3\boldsymbol{x} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\langle 0|\varphi(\boldsymbol{x},\tau)\varphi(0,\tau)|0\rangle\,, \tag{K.69}$$

where

$$|0\rangle \equiv |\text{de Sitter vacuum}\rangle\,. \tag{K.70}$$

Note that this assumption makes us to use the Heisenberg picture of quantum fields in which the states of vacuum don't evolve with time but the operators do[23]. For waves re-entering the horizon at the matter dominated era, we have

$$\Delta^{(\mathrm{QM})} = \frac{H_i^2}{2(2\pi)^3}\left[\frac{3j_1(k\tau)}{k\tau}\right]^2, \tag{K.71}$$

where $j_1(k\tau)$ is a spherical Bessel function of order one. According to our normalization, this is calculated as

$$\Delta^{(\mathrm{QM})}_{\mathrm{GW},\lambda\lambda'} = 2\kappa_{\mathrm{eff}}^2\delta_{\lambda\lambda'}\Delta^{(\mathrm{QM})} = \frac{\kappa^2 H_i^2}{(2\pi)^3}\left[\frac{3j_1(k\tau)}{k\tau}\right]^2\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{K.72}$$

where we used the following facts

$$\epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{K.73}$$

$$\psi(\tau > \tau_2) = 0. \tag{K.74}$$

We match this result with our classical ensemble of GWs. The classical two-point function may be calculated by writing the classical GWs as

$$h_\lambda(\boldsymbol{k},\tau) = A(k)\chi_\lambda(\boldsymbol{k})\left[\frac{3j_1(k\tau)}{k\tau}\right], \tag{K.75}$$

where χ_λ is a random variable with statistical expectation value

$$\langle\chi_\lambda(\boldsymbol{k})\chi_{\lambda'}(\boldsymbol{k}')\rangle = \frac{1}{k^3}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{K.76}$$

Then the classical two-point function is

$$\Delta^{(\mathrm{CL})}_{\mathrm{GW},\lambda\lambda'} = A^2(k)\left[\frac{3j_1(k\tau)}{k\tau}\right]^2\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{K.77}$$

Comparing this with quantum two point function, we obtain

$$A^2(k) = \frac{\kappa^2 H_i^2}{(2\pi)^3} = \frac{8}{3\pi} v, \tag{K.78}$$

where

$$H_i^2 \equiv \frac{\kappa^2}{3} m_{pl}^4 v. \tag{K.79}$$

Since we know that $H_i^2 = \frac{\lambda \psi_i}{12\kappa^2 \xi^2}$,

$$v = \frac{\psi_i}{(16\pi)^2} \left(\frac{\lambda}{\xi^2} \right). \tag{K.80}$$

In the end, we find that the existence of the nonminimal coupling only affects the amplitude of spectrum via Hubble constant.

4 Comparison With Observations

We shall now make a comparison between the theoretical prediction derived in the previous section with the observation of CMBR anisotropy. Using the Sachs-Wolfe relation, one can calculate the power spectrum of CMBR anisotropy generated by the long-wavelength GW [39]:

$$\left\langle a_\ell^2 \right\rangle \equiv \left\langle \sum_m |a_{\ell m}|^2 \right\rangle = 36\pi^2 (2\ell + 1) \frac{(\ell + 2)!}{(\ell - 2)!} \int_0^{2\pi/\tau_1} k dk A^2(k) |F_\ell(k)|^2, \tag{K.81}$$

where the angle brackets denote averages over statistical ensemble of a_ℓ^2, and

$$\begin{aligned} F_\ell(k) \equiv & \int_0^{\tau_0 - \tau_1} dr \left[\frac{d}{d\left(k(\tau_0 - r)\right)} \frac{j_1\left(k(\tau_0 - r)\right)}{k(\tau_0 - r)} \right] \\ & \times \left[\frac{j_{\ell-2}(kr)}{(2\ell - 1)(2\ell + 1)} + \frac{2 j_\ell(kr)}{(2\ell - 1)(2\ell + 3)} + \frac{j_{\ell+2}(kr)}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)} \right]. \end{aligned} \tag{K.82}$$

We shall use the following numerical value for $\langle a_2^2 \rangle$ evaluated by White[39]

$$\left\langle a_2^2 \right\rangle = 7.74 v. \tag{K.83}$$

On the other hand, COBE-DMR group expresses this quantity in terms of $Q_{\rm rms-PS}$:

$$\left\langle a_2^2 \right\rangle \equiv 4\pi \left(\frac{Q_{\rm rms-PS}}{T_0} \right)^2. \tag{K.84}$$

Note that since this quantity $Q_{\rm rms-PS}$ has already been handled statistically, we can make a direct comparison between this expression with the theoretical prediction $\langle a_\ell^2 \rangle$. Combining (K.80), (K.83) and (K.84), we find

$$\frac{\lambda}{\xi^2} = \frac{(4\pi)^3}{38.7}\left(\frac{80}{\psi_i}\right)\left(\frac{Q_{\rm rms-PS}}{T_0}\right)^2. \tag{K.85}$$

According to COBE 4yr results[30, 31],

$$T_0 = 2.728 \pm 0.004 \text{ K}, \tag{K.86}$$

$$Q_{\rm rms-PS} = 18 \pm 1.4 \ \mu\text{K}, \tag{K.87}$$

for $n = 1$ Harrison-Zel'dovich spectrum, thus we obtain the following constraint on the theory.

$$\frac{\lambda}{\xi^2} \approx 2.3 \times 10^{-9}\left(\frac{80}{\psi_i}\right), \tag{K.88}$$

where we do not take the errors of the observations (K.86) and (K.87) into account, because our result (K.88) mainly depends on the initial value of ψ_i. Furthermore, we have not considered the contribution from the scalar density perturbation which will be produced during early stage of the inflationary phase. Although a large fraction of the quadrupole anisotropy seems to be due to GW[20], we have to take that contribution into account for more precise discussions. Note that since the uncertainties just mentioned lead to higher estimates of λ/ξ^2, we may expect that the "real value" of λ/ξ^2 is slightly lower than the obtained result (K.88).

Makino and Sasaki[33](hereafter, refered as MS) derived the perturbation of spatial curvature $\mathcal{R}_m$ on the hypersurfaces orthogonal to the matter rest frame:

$$\mathcal{R}_m = \frac{N(t_k)}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{3\xi(1+6\xi)}}, \tag{K.89}$$

where $N(t_k)$ is a e-fold scale in which one is interested. MS found that $\mathcal{R}_m$ for the super horizon scale is expressed as follows:

$$\mathcal{R}_m = \Phi - \frac{H}{\dot{\phi}}X, \tag{K.90}$$

where Φ is the gauge-inveriant metric perturbation in the longitudinal gauge condition, i.e.

$$ds^2 = (1-2\Phi)dt^2 - a^2(1+2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{K.91}$$

and X is the gauge-invariant scalar field perturbation. Several authors found that the canonical normal modes of perturbations which diagonalize the full action perturbed to second order in the conformal transformed Einstein frame (e.g. [33, 18]). MS expressed Φ and X in terms of their canonical normal modes Q and π_Q (their notation) and found that $\mathcal{R}_m$ has the same amplitude in both of the Einstein and the original frame.

$\mathcal{R}_m$ is related to the gauge-invariant density perturbation as

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{2(w+1)}{3w+5}\left(\frac{k}{Ha}\right)^2 \mathcal{R}_m, \tag{K.92}$$

where $w \equiv p/\rho$. Using our result (K.88), the density perturbation on the horizon scale ($k = aH$, $N = 70$) at a matter-dominated phase ($w = 0$) becomes

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{\rm HOR} \approx 2.1\sqrt{\frac{\lambda}{\xi^2}} \approx 1.0\times 10^{-4}\sqrt{\frac{80}{\psi_i}}. \tag{K.93}$$

The density perturbation is also related to the rms temperature fluctuation of CMBR via Sachs-Wolfe effect as

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm rms} = -\frac{1}{3}\Phi \tag{K.94}$$

On the other hand, Φ is determined by the Poisson equation,

$$k^2\Phi = -4\pi G\rho a^2\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) = -\frac{3}{2}(aH)^2\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right). \tag{K.95}$$

Since our interest is the density perturbation on present horizon scale, i.e. $k = aH$, we have

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm rms} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{\rm HOR} \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\xi^2}}. \tag{K.96}$$

From the COBE-DMR result $(\delta T/T)_{\rm rms} = 1.1\times 10^{-5}$[31], we obtain the *initial condition of our universe* as

$$\psi_i \approx 1.6\times 10^3. \tag{K.97}$$

We *must* notice again, however, we have never paid attention to the ratio of tensor contribution to scalar one. Since smaller tensor contribution leads to smaller value of ψ_i by several factors, our discussion is reliable up to order of magnitude.

Finally, let us consider the model of $\lambda = 10^{-2}$, which would be a reasonable value for some of particle physics model. Then the nonminimal coupling constant and the initial

value of the inflaton field are constrained as

$$\xi \approx 10^4, \tag{K.98}$$

$$\frac{\phi_i}{m_{pl}} \approx 10^{-1}, \tag{K.99}$$

As Makino and Sasaki commented[33], the relaxation of fine-tuning for λ is nothing but a restatement of the issue of a large values of ξ. According to our results, furthermore, the initial inflaton field has to be smaller by one order of magnitude than that of chaotic scenario in framework of GR. Note that the smaller contribution of tensor perturbation leads to the smaller ψ_i and then smaller ϕ_i/m_{pl}.

5 Conclusions

We calculated the spectrum of GWs generated in the chaotic inflationary scenario with a nonminimally coupled inflaton under the condition where $\psi \equiv \kappa^2\xi\phi^2 \gg 1$, and their contributions to the CMBR anisotropy via Sachs-Wolfe effect. Comparing the COBE-DMR 4yr observations with the predicted power spectrum of CMBR, we find the initial value $\psi_i \approx 1.6 \times 10^3$. Our result decreases a number of undetermined parameters in the theory, i.e. ψ_i, and indicates that if we choose $\lambda = 10^{-2}$, $\xi \approx 10^4$ and $\phi_i/m_{pl} \approx 10^{-1}$ are required. In the chaotic inflationary scenario with minimally coupled inflaton, an argument based on the comparison between the energy content of the inflaton field and planck energy density places the upper bound of the initial value of the field. It would be hoped in the nonminimally coupled case that the same sort of argument will place an upper bound on the initial value for ψ_i. However it is the nonminimality that prevent us to have such a simple argument. In this context Hochberg and Kephart made some discussion on the energy density of a nonminimally coupled scalar field[26], but their result seems to be not available in the present context because of the existence of self-coupling. It should be mentioned that the condition for Hubble constant to be smaller than the inverse of the planck time is easily satisfied in the above choice of parameters. In this sense Fakir and Unruh scenario is not excluded as a good candidate of the inflationary scenario.

Finally we mention the chaotic inflationary scenario by induced gravity[13, 9]. The above analysis may be applied exactly same way and one has the same constraint of parameters

when $\psi \gg 1$. However this case has also another constraint on ξ coming from solar system experiment on the omega parameter of Brans-Dicke theory since the theory is translated into Brans-Dick type. These two constraints are incompatible each other so that the chaotic scenario by induced gravity with the *strong* coupling seems not to work.

Acknowledgments

We would like to thank N. Sugiyama for very important comments and suggestions. We would also like to thank M. Takada for useful discussions.

関連図書

[1] K. Sato, Mon. Not. R. Astron. Soc. **195**, 467 (1981); Phys. Lett. **99B**, 66 (1981).

[2] A. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).

[3] A. D. Linde, Phys. Lett. **129B**, 177 (1983).

[4] R. Fakir and W. G. Unruh, Phys. Rev. D **41**, 1783 (1990).

[5] R. Fakir and W. G. Unruh, Phys. Rev. D **41**, 1792 (1990).

[6] R. Fakir, S. Habib, and W. G. Unruh, Astrophys. J. **394**, 396 (1992)

[7] D. S. Salopek, Phys. Rev. Lett. **69**, 3602 (1992).

[8] D. I. Kaiser, Phys. Rev. D **52**, 4295 (1995).

[9] F. S. Acceta, D. J. Zoller, and M. S. Turner, Phys. Rev. D **31**, 3046 (1985).

[10] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).

[11] T. Futamase and K. Maeda, Phys. Rev. D **39**, 399 (1989).

[12] M. Gasperini and M. Giovannini, Phys. Rev. D **47**, 1519 (1993).

[13] John D. Barrow, José P. Mimoso, and Márcio R. de Garcia Maia, Phys. Rev. D **48**, 3630 (1993).

[14] L. F. Abbott and Mark B. Wise, Nucl. Phys. **B244**, 541 (1984).

[15] L. F. Abbott and D. D. Harari, Nucl. Phys. **B264**, 487 (1986).

[16] M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **89**, 1183 (1993).

[17] N. Makino and M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **86**, 103 (1991).

[18] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 203 (1992).

[19] M. White, Phys. Rev. D **46**, 4198 (1992).

[20] L. M. Krauss and M. White, Phys. Rev. Lett. **69**, 869 (1992).

[21] L. P. Grishchuk, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67**, 825 (1974) [Sov. Phys. JETP **40**, 409 (1975)]; L. P. Grishchuk, Ann. N. Y. Acad. Sci. **302**, 439 (1977).

[22] L. Grishchuk and Y. Sidorov **42**, 3413 (1990).

[23] B. Allen and S. Koranda, Phys. Rev. D **50**, 3713 (1994).

[24] D. J. Fixsen et al., Astrophys. J. **473**, 576 (1996).

[25] C. L. Bennett et al., Astrophys. J. **464**, L1 (1996).

[26] D. Hochberg and T. W. Kephart, Phys. Rev. D **51**, 2687 (1995).

[27] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitaion* (Freeman, San Francisco, 1973).

[28] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

[29] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).

Erratum: Constraints on the chaotic inflationary scenario with a nonminimally coupled "inflaton" field from the cosmic microwave background radiation anisotropy [Phys. Rev. D 58, 023004 (1998)]

The expressions for the mode functions (3.13) and (3.14) we employed as the conserved quantities during all phases have contained an error. The correct expressions will be as follows.

$$\begin{aligned}\varphi_k(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}R(\tau)}e^{-ik\tau}\left(1-\frac{i}{k\tau}\right) \qquad \text{vacuum, matter,}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}R(\tau)}e^{-ik\tau} \qquad \text{radiation,}\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}R(\tau) &= -\frac{\sqrt{1+\psi}}{H\tau} \qquad \text{vacuum} \qquad \tau\in(-\infty,-\tau_2),\\ &= \frac{2\tau_1\tau}{\tau_0^2} \qquad \text{radiation} \qquad \tau\in(\tau_2,\frac{\tau_1}{2}),\\ &= \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \qquad \text{matter} \qquad \tau\in(\tau_1,\tau_0).\end{aligned}$$

Then we can match the mode functions at the each phase. As the result our expressions should be modified by simply replacing H by $H/\sqrt{1+\psi}\approx H/\sqrt{\psi}$. Thus, our main result (3.40), (3.41), (4.5) and (4.8) are written as :

$$\Delta^{(\mathrm{CL})}_{\mathrm{GW},\lambda\lambda'} = \frac{\kappa^2H^2}{(2\pi)^3(1+\psi)}\left[\frac{3j_1(k\tau)}{k\tau}\right]^2\delta_{\lambda\lambda'},$$

$$\frac{\lambda}{\xi^2} = \frac{(16\pi)^3}{31.0}\left(\frac{Q_{\mathrm{rms-PS}}}{T_0}\right)^2 \approx 1.8\times10^{-7}.$$

Note that the dependence of λ/ξ^2 on ψ is disappeared.

付 録L　Physical Review D59, 064029 (1999)

Complete constraints on a nonminimally coupled chaotic inflationary scenario from the cosmic microwave background

Eiichiro Komatsu* and Toshifumi Futamase†

Astronomical Institute, Graduate School of Science, Tohoku University, Sendai 980-8578, Japan

概 要

We present *complete* constraints imposed from observations of the cosmic microwave background radiation (CMBR) on the chaotic inflationary scenario with a nonminimally coupled inflaton field proposed by Fakir and Unruh (FU). Our constraints are complete in the sense that we investigate both the scalar density perturbation and the tensor gravitational wave in the Jordan frame, as well as in the Einstein frame. This makes the constraints extremely strong without any ambiguities due to the choice of frames. We find that the FU scenario generates tiny tensor contributions to the CMBR relative to chaotic models in minimal coupling theory, in spite of its spectral index of scalar perturbation being slightly tilted. This means that the FU scenario will be excluded if any tensor contributions to CMBR are detected by the forthcoming satellite missions. Conversely, if no tensor nature is detected despite the tilted spectrum, a minimal chaotic scenario will be hard to explain and the FU scenario will be supported.

1 Introduction

In spite of its many successes, the standard big-bang theory has faced serious problems, namely, the horizon, flatness, and monopole problems. In the beginning of the 1980s, an epoch-making idea called the inflationary scenario was advocated to solve these cosmological puzzles[1, 2]. Later it was recognized that the concept gives us not only a solution to such puzzles, but also to the origin of density perturbations[3, 4, 5, 6].

Among the various models of the inflationary scenario, Linde's chaotic model[7] has been regarded as a feasible and natural mechanism for the realization of inflationary expansion. This model still has a serious problem; i.e., one has to fine-tune the self-coupling constant λ of the inflaton unacceptably small to have a reasonable amplitude of the density perturbations.

On the other hand, the feasibility of inflation has been investigated in alternative theories of gravity, e.g., the Brans-Dicke scalar tensor theory[8, 9], and nonminimal coupling theories of gravity[10, 11]. Fakir and Unruh (FU) [12, 13] proposed a way to avoid fine-tuning λ by introducing a relatively large nonminimal coupling constant $|\xi| > 1$ in the context of the chaotic inflationary model. According to their results, the large value of ξ, i.e., order of 10^3, allows us to have a reasonable value for the coupling constant $\lambda = 10^{-2}$. Thus the FU scenario remains a reasonable model of the inflationary scenario.

Constraints on the FU scenario are discussed by some authors[14, 15] using the scalar perturbations generated during the inflationary phase. We investigated the spectrum of tensor mode cosmic microwave background radiation (CMBR) anisotropy [16]. Hwang also discussed the tensor mode power spectrum from inflation based on generalized gravity theories in a unified manner[17].

In discussing the constraint on generalized gravity theories including the FU scenario, one has to be careful about ambiguities associated with the conformal transformation. Sometimes the analysis is made in the conformally transformed frame in which the gravity may be described by the Einstein action. However, it has long been known that the conformal transformation often changes the physical phenomena in different frames (e.g., Ref. [18], and references therein). Thus it is quite important to make the frame dependences of the results one obtains clear.

The purpose of the present paper is to investigate the constraints on the FU scenario

by taking into account the frame dependency. Namely, we shall investigate the CMBR anisotropy caused by both the scalar and tensor perturbations in two different frames, the Jordan and Einstein frames, which seem to have special physical importance among various transformed frames. From this point of view, this work can be regarded as the *complete* treatment of the observational constraints on the FU scenario.

A number of investigations have shown that high precision CMBR temperature anisotropy and polarization experiments, e.g., two satellite missions of NASA's Microwave Anisotropy Probe (MAP)[19] and ESA's Planck Surveyor[20], can be used to determine many cosmological parameters to unprecedented precision[21, 22, 23]. We are especially interested in amplitudes and spectral indices of scalar and tensor perturbations. It is relatively hard to determine these parameters due to the cosmic variance and the cosmic confusion[24, 25, 26] by means of a temperature spectrum only. Including polarization informations allows us to detect tensor contributions directly because a tensor mode can generate the magnetic mode of polarization while a scalar mode cannot [27, 28, 29]. However, it is still hard to detect such a magnetic mode directly because of its predicted tiny amplitude. Even Planck, with the most sensitive experiment not only for temperature anisotropy but also for polarization, can detect tensor contributions only if the tensor to scalar ratio is greater than 0.2[28, 29].

For later convenience we summarize the relevant facts of the CMBR experiments here. The experiments can measure the angular power spectrum of the temperature or polarization correlation function C_l,

$$\frac{\delta T(\theta,\phi)}{T_0} = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{L.1}$$

$$\langle a^*_{l'm'} a_{lm} \rangle = C_l \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \tag{L.2}$$

where the angle brackets denote ensemble average. The Cosmic Background Explorer (COBE) Differential Microwave Radiometer (DMR) group expressed the observed quadrupole moment in terms of $Q_{\rm rms-PS}$,

$$Q_{\rm rms-PS} \equiv T_0 \sqrt{\frac{5C_2}{4\pi}}. \tag{L.3}$$

According to the COBE four-year results[30, 31],

$$T_0 \;=\; 2.728 \pm 0.004 \text{ K}, \tag{L.4}$$

$$Q_{\rm rms-PS} \;=\; 18 \pm 1.4\ \mu{\rm K} \tag{L.5}$$

for the Harrison-Zel'dovich spectrum. This gives $C_2^{\rm obs} = 1.1 \times 10^{-10}\ \mu{\rm K}^2$.

This paper is organized as follows. In Sec. II we review the background solutions of the inflationary expansion in both the Jordan and Einstein frames. In Secs. III and IV, we show the amplitude of the scalar curvature perturbation and the tensor gravitaional wave generated during the de Sitter phase, and discuss the constraints by means of the observed CMBR quadrupole moment. Section V derives the predicted tensor to scalar ratio and describes the possibility of detecting tensor contributions. To compare our results with well-known results in minimal coupling theory and to interpret their physical meanings, we also discuss a *consistency relation* which includes the spectral index in Sec. VI. Finally, Sec. VII contains conclusions. Table L.1 summarizes our results of the predicted observables based on the FU scenario. We shall follow Misner, Thorne, and Wheeler[32] for the definition of the Riemann tensor, Ricci tensor, and Ricci scalar, but the metric convention is chosen as $\boldsymbol{g} = (+---)$.

2 Background inflationary solutions

2.1 Jordan frame solutions

At first, we shall review the background inflationary solutions in the original Jordan frame. This section follows our previous paper[16]. We shall consider the following action:

$$A = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + V(\phi)\right], \tag{L.6}$$

where $\kappa^2 \equiv 8\pi G$. Our definition of ξ is the same as Fakir and Unruh[12], that is, conformal coupling means $\xi = -1/6$. Note that Futamase and Maeda[10] used an opposite sign for ξ. For the spatially flat Robertson-Walker metric

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{L.7}$$

we can derive the fundamental background equations

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3(1+\kappa^2\xi\phi^2)}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - 6\xi H\phi\dot{\phi}\right], \tag{L.8}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \left[\frac{\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\right]\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} = \frac{1}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\left[4\kappa^2\xi\phi V(\phi) - (1+\kappa^2\xi\phi^2)V_{,\phi}\right], \tag{L.9}$$

where overdots denote time derivatives in the Jordan frame and $V_{,\phi} \equiv \partial V/\partial\phi$. Now we shall employ the potential $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$ and apply ordinary slow-roll approximations to the background equations. This gives us

$$H^2 \approx \frac{\kappa^2\lambda\phi^4}{12(1+\kappa^2\xi\phi^2)}\left[1+\frac{8\xi}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}\right], \tag{L.10}$$

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{\lambda\phi^3}{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}. \tag{L.11}$$

It is straightforward to find the self-consistent inflationary solutions under the condition $\kappa^2\xi\phi^2 \gg 1$. Defining $\psi \equiv \kappa^2\xi\phi^2$, the above equations take the following simple forms:

$$H^2 = \frac{\lambda\psi}{12\kappa^2\xi^2}, \qquad \frac{\dot{\psi}}{H} = -\frac{8\xi}{1+6\xi}. \tag{L.12}$$

These solutions lead to the well-known exponential expansion in the Jordan frame. The amount of expansion from any epoch to the end of inflation is calculated as

$$N(t) \equiv \int_t^{t_f} H dt = \int_{\psi(t)}^{\psi_f} \frac{H}{\dot{\psi}} d\psi = \frac{1+6\xi}{8\xi}\left[\psi(t) - \psi_f\right]. \tag{L.13}$$

Note that for the initial value of ψ,

$$N(t_i) = \frac{1+6\xi}{8\xi}(\psi_i - \psi_f) \approx \frac{1+6\xi}{8\xi}\psi_i \geq 70 \tag{L.14}$$

must be held to solve the cosmological puzzles.

2.2 Einstein frame solutions

We shall perform the conformal transformation to the Einstein frame

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}, \qquad \Omega = 1 + \kappa^2\xi\phi^2. \tag{L.15}$$

Hereafter we put hats on variables defined in the Einstein frame. The conformal transformation gives

$$A = \int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\left[\frac{\hat{R}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}F^2(\phi)\hat{g}^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \hat{V}(\phi)\right], \tag{L.16}$$

where

$$F^2(\phi) \equiv \frac{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}{(1+\kappa^2\xi\phi^2)^2} \tag{L.17}$$

and

$$\hat{V}(\phi) \equiv \frac{V(\phi)}{(1+\kappa^2\xi\phi^2)^2} = \frac{\lambda\phi^4}{4(1+\kappa^2\xi\phi^2)^2} \approx \frac{\lambda}{4\kappa^4\xi^2}, \tag{L.18}$$

where the last equality of Eq. (L.18) is derived from the condition $\kappa^2\xi\phi^2 \gg 1$.

To make the kinetic term of scalar field canonical form, we redefine the scalar field as

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\phi} = F(\phi) = \frac{\sqrt{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}}{1+\kappa^2\xi\phi^2}. \tag{L.19}$$

Then it can be clearly seen that the new potential (L.18) is still flat enough to lead to sufficient exponential inflation. When we investigate the dynamics of the universe in the Einstein frame, we should transform our coordinate system to make the metric the Robertson-Walker form

$$\hat{a} = \sqrt{\Omega}a, \qquad d\hat{t} = \sqrt{\Omega}dt, \tag{L.20}$$

and we obtain

$$d\hat{s}^2 = d\hat{t}^2 - \hat{a}^2(\hat{t})\delta_{ij}dx^i dx^j. \tag{L.21}$$

Note that the physical quantities in the Einstein frame should be defined in this coordinate system. Now the Einstein equation can be derived in the usual manner under the slow-roll approximations,

$$\hat{H}^2 = \frac{\kappa^2}{3}\left[\left(\frac{d\hat{\phi}}{d\hat{t}}\right)^2 + \hat{V}(\hat{\phi})\right] \approx \frac{\lambda}{12\kappa^2\xi^2}, \tag{L.22}$$

where

$$\hat{H} \equiv \frac{1}{\hat{a}}\frac{d\hat{a}}{d\hat{t}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\left(H + \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right), \tag{L.23}$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\hat{t}} = \left(\frac{d\hat{\phi}}{d\phi}\right)\left(\frac{dt}{d\hat{t}}\right)\dot{\phi} = \frac{\sqrt{1+\kappa^2\xi\phi^2(1+6\xi)}}{\Omega^{3/2}}\dot{\phi}. \tag{L.24}$$

We can conclude that the exponential behavior of the expansion is retained in both frames[10]. Note that we can put a constraint on λ/ξ^2 by means of requiring $\hat{V} < m_{\rm pl}^4$,

$$\frac{\lambda}{\xi^2} < 256\pi^2. \tag{L.25}$$

This constraint is too weak compared with the observational constraints discussed below.

3 Scalar perturbation

The scalar curvature perturbation $\mathcal{R}(t,\boldsymbol{x})$ generated as the quantum noise during the de Sitter phase is well-known in the Einstein frame. Let us choose the longitudinal gauge

$$ds^2 = [1+2\Psi(x)]\,dt^2 - a^2(t)\,[1+2\Phi(x)]\,\delta_{ij}dx^i dx^j. \tag{L.26}$$

We can construct the gauge-invariant scalar curvature perturbation from the metric and the inflaton field perturbation as follows:

$$\mathcal{R}(x) = \Phi(x) - \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi(x). \tag{L.27}$$

Since we already have the prescriptions to quantize Φ and $\delta\phi$ in the Einstein frame[33, 34], we can calculate the amplitude of scalar curvature perturbation

$$\sqrt{\hat{P}_S(k)} \equiv \sqrt{\frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{x}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\left\langle\hat{\mathcal{R}}(\hat{t},\boldsymbol{0})\hat{\mathcal{R}}(\hat{t},\boldsymbol{x})\right\rangle} \tag{L.28}$$

$$= \left.\frac{\hat{H}^2}{2\pi|d\hat{\phi}/d\hat{t}|}\right|_{\hat{t}_k}, \tag{L.29}$$

where k is a comoving wave number. Note that the metric perturbations defined in the Einstein frame have to be calculated in the coordinate system $\{\hat{x}^\mu\}$:

$$\hat{g}_{\mu\nu}(\hat{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial\hat{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\hat{x}^\nu}\hat{g}_{\alpha\beta}(x) \tag{L.30}$$

and for instance,

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) = \Phi(x) + \frac{1}{2}\frac{\delta\Omega}{\Omega}(x). \tag{L.31}$$

Makino and Sasaki[33] and Fakir, Habib, and Unruh[35] proved that the amplitude of scalar perturbation in the Jordan frame exactly coincides with that in the Einstein frame. We can see such conformal invariance in the simple calculation

$$\hat{\mathcal{R}}(\hat{x}) = \hat{\Phi}(\hat{x}) - \frac{\hat{H}}{d\hat{\phi}/d\hat{t}}\delta\hat{\phi}(\hat{x}), \tag{L.32}$$

$$= \Phi(x) - \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi(x) = \mathcal{R}(x). \tag{L.33}$$

This proof allows us to calculate the scalar power spectrum in the Jordan frame quite easily,

$$\sqrt{P_S(k)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+6\xi}}\left.\frac{H^2}{|\dot{\phi}|}\right|_{t_k} = \frac{N(t_k)}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{3\xi(1+6\xi)}}, \tag{L.34}$$

where we used slow-roll approximations, and we have a corrected missing factor of 2 in the original paper of Makino and Sasaki[33]. The curvature perturbation gives the Newtonian potential perturbation Ψ[33, 36],

$$\sqrt{\left\langle |\Psi|^2 \right\rangle_k} = \frac{2}{3}\sqrt{P_S(k)} \qquad \text{radiation-dominated era,} \tag{L.35}$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{P_S(k)} \qquad \text{matter-dominated era.} \tag{L.36}$$

Since the observed CMBR quadrupole anisotropy is dominated by the Sachs-Wolfe (SW) effect[37, 38], we can simply estimate it as

$$C_2^{\rm scalar} = \left\langle \left(\frac{\delta T}{T_0}\right)^2 \right\rangle_{\rm SW} = \left\langle \left|\frac{1}{3}\Psi\right|^2 \right\rangle_{k=d_H^{-1}} = \frac{1}{25}P_S(k=d_H^{-1}), \tag{L.37}$$

where d_H is the present Hubble horizon scale. We can thus constrain the set of parameters

$$\frac{\lambda}{\xi^2} < 4.0 \times 10^{-10}, \tag{L.38}$$

where the inequality takes into account the contribution from a tensor mode. If we adopt $\lambda = 10^{-2}$, it gives $\xi > 5 \times 10^3$.

4 Tensor perturbation

For completion, let us show our previous result[16] of the amplitude of tensor perturbation in the Jordan frame. In the synchronous gauge, the metric becomes

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[d\tau^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})\, dx^i dx^j\right], \tag{L.39}$$

where τ is a conformal time and h_{ij} is a transverse-traceless perturbation. Note that h_{ij} is invariant under any conformal transformations[34]. The power spectrum of the tensor perturbation can be derived as well as the scalar one,

$$\begin{aligned}\sqrt{\hat{P}_T(k)} &= \sqrt{P_T(k)} \\ &\equiv \sqrt{\frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} 2 \sum_{\lambda=+,\times} \int d^3\boldsymbol{x} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left\langle h_\lambda(\tau,\boldsymbol{0}) h_\lambda(\tau,\boldsymbol{x})\right\rangle} \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi} m_{\rm pl}} \frac{H}{\sqrt{1+\psi}} \approx \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{6\xi^2}},\end{aligned} \tag{L.40}$$

where $\lambda = +, \times$ are modes of the polarization.

Since a tensor perturbation also causes temperature anisotropy via SW effect as well as a scalar one, we can constrain λ/ξ^2 from the CMBR observations[16, 39].

$$C_2^{\rm tensor} \simeq 0.0363 P_T \tag{L.41}$$

gives

$$\frac{\lambda}{\xi^2} < 1.8 \times 10^{-7}, \tag{L.42}$$

where the inequality also takes into account the contribution from the scalar mode. $\lambda = 10^{-2}$ gives $\xi > 2 \times 10^2$.

5 Constraints from the cosmic microwave background

Now we are in a position to predict the ratio of the amplitude of the tensor perturbation to that of the scalar one. It can be obtained from Eqs. (L.34) and (L.40),

$$\frac{P_T}{P_S}(k) = 0.00245 \frac{1+6\xi}{6\xi} \left(\frac{70}{N(t_k)} \right)^2 . \tag{L.43}$$

We should keep in mind that this result does not depend on the choice of frames and does not depend on ξ directly in the limit of $\xi \gg 1$ but depends on $N(t_k)$ only. Equations (L.37) and (L.41) give the simple relation between $C_2^{\rm tensor}/C_2^{\rm scalar}$ and P_T/P_S,

$$r \equiv \frac{C_2^{\rm tensor}}{C_2^{\rm scalar}} \simeq 0.9 \frac{P_T}{P_S}(k = d_H^{-1}). \tag{L.44}$$

We already know that the FU scenario requires $\xi \gg 1$ to avoid the fine-tuning of λ, and the perturbations which contribute to the present CMBR quadrupole moment have left the Hubble horizon scale at around $N(t_k) = 70$. We can thus conclude that the FU scenario predicts $r \simeq 0.002$, which is too tiny to be detected by even the Planck Surveyor. In other words, if MAP or Planck could detect any tensor contributions to the CMBR, it would mean that the FU scenario could be excluded from good candidates of the inflationary model.

6 Spectral Indices

In the previous sections, we discussed only the amplitudes of perturbations. Here let us consider the first-order solutions in the slow-roll approximations. The behavior of perturbations are fully governed by the simple Schrödinger type equation, and the first-order nature appears in the time-dependent mass term R''/R,

$$(R\Delta)''(\boldsymbol{k},\tau) + \left(k^2 - \frac{R''}{R}\right)(R\Delta)(\boldsymbol{k},\tau) = 0, \tag{L.45}$$

where Δ is a scalar or tensor perturbation[40], and dashes denote conformal time derivatives. Writing $R = a\sqrt{Q}$, the usual slow-roll parameter ϵ [41, 42] and a new parameter α can be defined as *

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \qquad \alpha \equiv \frac{\dot{Q}}{2HQ}. \tag{L.46}$$

ϵ and α give rise to the spectral index of the scalar and the tensor mode

$$n_s \equiv 1 + \frac{d\ln P_S}{d\ln k} = 1 - 2\epsilon - 2\alpha_s, \tag{L.47}$$

$$n_t \equiv \frac{d\ln P_T}{d\ln k} = -2\epsilon - 2\alpha_t, \tag{L.48}$$

and the consistency relation †

$$n_t = n_s - 1 + 2(\alpha_s - \alpha_t). \tag{L.49}$$

All we should do is calculate Δ and Q for both the scalar and tensor modes in both frames.

6.1 Scalar perturbation

Hwang calculated Δ and Q for scalar perturbation in the Jordan frame directly[44],

$$\Delta_S = \mathcal{R}_{\delta\phi=0}, \qquad Q_S = \frac{\dot{\phi}^2 + (3/2)(\dot{\Omega}^2/\Omega)}{\Big(H + (1/2)(\dot{\Omega}/\Omega)\Big)^2}, \tag{L.50}$$

* Correspondences to literatures are $\hat{\alpha}_s = \epsilon + \delta$[41], $\hat{\alpha}_s = 2\epsilon - \eta$[15, 42], and $\hat{\alpha}_s = -\delta/2$[25, 43].

† It is widely known that there is a specific relation between r, n_s and n_t. Such a relation is called a consistency relation. We should emphasize that $\alpha_s \neq \alpha_t$ in general and the widely used simplest relation $n_t = n_s - 1$ must not be universal.

where $\mathcal{R}_{\delta\phi=0}$ is the scalar curvature perturbation in the uniform scalar field gauge, i.e., $\delta\phi = 0$ and $\Omega = 1 + \psi$ is the conformal factor defined previously.

In the Einstein frame, we can use the well-known results from the minimal coupling theory

$$\hat{\Delta}_S = \hat{\mathcal{R}}_{\delta\hat{\phi}=0}, \qquad \hat{Q}_S = \left(\frac{d\hat{\phi}/d\hat{t}}{\hat{H}}\right)^2. \tag{L.51}$$

$\hat{Q}_S$ is conformally transformed as $\hat{Q}_S = Q_S/\Omega$, and it gives $\hat{a}\sqrt{\hat{Q}_S} = a\sqrt{Q_S}$, i.e., $\hat{R} = R$. Defining another slow-roll parameter which appears in Eq. (L.50) as

$$\beta \equiv \frac{\dot{\Omega}}{2H\Omega}, \tag{L.52}$$

we can conformally transform the slow-roll parameters

$$\hat{\epsilon} = \frac{\epsilon + \beta}{1+\beta} - \frac{\dot{\beta}}{H(1+\beta)^2} \sim \epsilon + \beta, \tag{L.53}$$

$$\hat{\alpha}_s = \frac{\alpha_s - \beta}{1+\beta} \sim \alpha_s - \beta, \tag{L.54}$$

and the spectral index is also transformed as

$$\hat{n}_s = 1 - 2\hat{\epsilon} - 2\hat{\alpha}_s = 1 - 2\epsilon - 2\alpha_s = n_s. \tag{L.55}$$

Thus, we can conclude that n_s is invariant under the conformal transformation up to the first-order of the slow-roll approximations.

Now we are in a position to calculate n_s explicitly,

$$\hat{\epsilon} \sim \frac{1}{2\kappa^2}\left(\frac{\hat{V}_{,\hat{\phi}}}{\hat{V}}\right)^2 = 1.5 \times 10^{-4}\frac{1+6\xi}{6\xi}\left(\frac{70}{N(\hat{t}_k)}\right)^2, \tag{L.56}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_s &\sim \frac{1}{\kappa^2}\left[\left(\frac{\hat{V}_{,\hat{\phi}}}{\hat{V}}\right)^2 - \left(\frac{\hat{V}_{,\hat{\phi}\hat{\phi}}}{\hat{V}}\right)\right] \\ &= 1.4 \times 10^{-2}\left(\frac{70}{N(\hat{t}_k)}\right) + 3.0 \times 10^{-4}\frac{1+6\xi}{6\xi}\left(\frac{70}{N(\hat{t}_k)}\right)^2.\end{aligned} \tag{L.57}$$

With these quantities, we can rewrite the amplitude of perturbations as

$$\sqrt{\hat{P}_S(k)} = \frac{\hat{H}}{\sqrt{\pi}m_{\rm pl}}\left.\frac{1}{\sqrt{\hat{\epsilon}}}\right|_{\hat{t}_k}, \qquad \sqrt{\hat{P}_T(k)} = \left.\frac{4\hat{H}}{\sqrt{\pi}m_{\rm pl}}\right|_{\hat{t}_k}, \tag{L.58}$$

and Eq. (L.44) gives

$$\hat{r} \simeq 14\hat{\epsilon} = 7(1 - \hat{n}_s - 2\hat{\alpha}_s). \tag{L.59}$$

Note that $\hat{r}$ depends on the potential steepness $\hat{\epsilon}$ only.

We find that slow-roll parameters do not depend on ξ directly in the limit of $\xi \gg 1$ but depend on $N(t_k)$ as well as r. Here note that $O(\hat{\epsilon}) \sim O(\hat{\alpha}_s^2)$. Although it seems to be inconsistent with the first-order analysis, any higher-order terms than first-order are not important here, so it is sufficient for our purposes.

Finally, the spectral index of the scalar curvature perturbation can be calculated :

$$n_s = 0.97, \qquad r = \hat{r} = 0.002 \tag{L.60}$$

at $N(\hat{t}_k) = 70$. Although n_s is slightly tilted, the predicted r is still too small. Let us refer to a consistency relation here. We can see from Eq. (L.59) that the simplest relation $\hat{r} = 7(1 - \hat{n}_s)$ is held only if $2\hat{\alpha}_s/(1 - \hat{n}_s) \ll 1$, but Eq. (L.60) shows $2\hat{\alpha}_s/(1 - \hat{n}_s) \sim 1$. Therefore, we must not use such a simple relation as that widely used to analyze CMBR power spectrum (e.g., Refs. [25, 43]).

It is worth comparing the above results with the well-known results in a minimal chaotic scenario. Employing $V_m(\phi_m) = \lambda\phi_m^4/4$, we obtain

$$\epsilon_m = \frac{8}{\kappa^2\phi_m^2} = 1.4 \times 10^{-2}\left(\frac{70}{N(t_{m,k})}\right), \tag{L.61}$$

$$\alpha_{m,\mathrm{s}} = \frac{4}{\kappa^2\phi_m^2} = 0.7 \times 10^{-2}\left(\frac{70}{N(t_{m,k})}\right), \tag{L.62}$$

where $N(t_m) = \kappa^2\phi_m^2(t_m)/8$, and $N(t_{m,k}) = 70$ gives

$$n_{m,\mathrm{s}} = 0.96, \qquad r_m = 0.2. \tag{L.63}$$

Since $2\hat{\alpha}_{m,s}/(1 - \hat{n}_{m,\mathrm{s}}) \sim 0.3$, we still should not use the simplest relation. These results are very interesting. While both the FU and minimal chaotic scenarios give similar tilted spectra, the amount of the tensor contributions to the CMBR is quite different. This is because of the difference of the order of ϵ between each of these theories. Physically, the scalar field in the FU scenario moves *much slower* than in the minimal one. It can be found in the flatness of the potential

$$\hat{V}_{\mathrm{FU}} = \frac{\lambda\phi^4}{4(1 + \kappa^2\xi\phi^4)^2} \approx \frac{\lambda}{4\kappa^4\xi^2}, \tag{L.64}$$

$$V_m = \frac{\lambda}{4}\phi_m^4. \tag{L.65}$$

Equation (L.47) shows that the tilted spectrum is produced by both the steepness and curvature of the potential shape, but Eq. (L.59) shows that the tensor to scalar ratio is determined by the steepness only. This is why the tensor contributions to the CMBR are quite different between each of the theories. As a result, we can determine which theory governs our universe by means of the observation of CMBR temperature anisotropy and polarization.

6.2 Tensor perturbation

We have already derived Δ and Q for tensor perturbation in the Jordan frame[16],

$$\Delta_T = h_\lambda, \qquad Q_T = \Omega, \tag{L.66}$$

and in the Einstein frame

$$\hat{\Delta}_T = \hat{h}_\lambda, \qquad \hat{Q}_T = 1. \tag{L.67}$$

We thus find $\hat{Q}_T = Q_T/\Omega$ and $\hat{\alpha}_t = 0 = \alpha_t - \beta$. The spectral index of the tensor mode can be calculated in both frames,

$$\hat{n}_t = -2\hat{\epsilon} = -2\epsilon - 2\beta = n_t \simeq -3.0 \times 10^{-4}. \tag{L.68}$$

n_t is also conformally invariant and we can see that the tensor perturbation is almost scale invariant in the FU scenario. There is another expression of the consistency relation

$$r = \hat{r} \simeq -7\hat{n}_t \simeq 0.002. \tag{L.69}$$

7 Conclusions

We have investigated the feasibility of the FU scenario, which is the chaotic inflationary scenario characterized by a large value of the nonminimal coupling constant, by means of the forthcoming CMBR experiments. We have calculated the ratio of the quadrupole contribution of the tensor mode to one of the scalar mode. As a result, if any experiment could detect the tensor gravitational wave contributions to the CMBR under current

sensitivities, the FU scenario would be excluded from good candidates of the inflationary model. In addition, we discussed the spectral index of the scalar perturbation to make sure of the consistency of our results. Even if the spectral index is tilted by $n_s = 0.97$, the tensor contributions are still too small to be detected. This is derived from the flatness of the potential slope in the FU scenario. However, if no evident tensor contributions were detected despite the tilted spectrum, a minimal chaotic scenario would fail and the FU scenario would be more plausible. Table L.1 shows the summary of our results.

We found that the physical observables r, n_s, and n_t do not depend on ξ in the limit of $\xi \gg 1$ but depend on $N(t_k)$ only. It should be emphasized that all of them do not depend on the choice of frames, that is, they are *conformally invariant*, so our results can be compared to observations directly without any ambiguities.

All of the results derived here are valid in both the Jordan and Einstein frames, and include both the scalar and tensor contributions one up to the first-order in the slow-roll approximations. In this sense, this work could be stated as *complete*.

Acknowledgments

We would like to thank J. Hwang for fruitful discussions.

関連図書

[1] K. Sato, Mon. Not. R. Astron. Soc. **195**, 467 (1981); Phys. Lett. **99B**, 66 (1981).

[2] A. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).

[3] A. Guth and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **49**, 1110 (1982).

[4] A. D. Linde, Phys. Lett. **116B**, 335 (1982).

[5] S. Hawking, Phys. Lett. **115B**, 295 (1982).

[6] A. A. Starovinsky, Phys. Lett. **117B**, 175 (1982).

[7] A. D. Linde, Phys. Lett. **129B**, 177 (1983).

[8] D. La and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **62**, 376 (1989).

[9] P. J. Steinhardt and F. S. Accetta, Phys. Rev. Lett. **64**, 2740 (1990).

[10] T. Futamase and K. Maeda, Phys. Rev. D **39**, 399 (1989).

[11] F. S. Accetta, D. J. Zoller, and M. S. Turner, Phys. Rev. D **31**, 3046 (1985).

[12] R. Fakir and W. G. Unruh, Phys. Rev. D **41**, 1783 (1990).

[13] R. Fakir and W. G. Unruh, Phys. Rev. D **41**, 1792 (1990).

[14] D. S. Salopek, Phys. Rev. Lett. **69**, 3602 (1992).

[15] D. I. Kaiser, Phys. Rev. D **52**, 4295 (1995).

[16] E. Komatsu and T. Futamase, Phys. Rev. D **58**, 023 004 (1998); **58**, 089 902 (1998).

[17] J. Hwang, Class. Quantum Grav. **15**, 1401 (1998).

[18] R. Dick, Gen. Relativ. Gravit. **30**, 435 (1998).

[19] C. Bennett *et al.*, MAP home page, 1996, http://map.gsfc.nasa.gov/

[20] M. Bersanelli *et al.*, Plank home page, 1996, http://astro.estec.esa.nl/Planck/

[21] G. Jungman, M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and D. N. Spergel, Phys. Rev. D **54**, 1332 (1996).

[22] J. R. Bond, G. Efstathiou, and M. Tegmark, Mon. Not. R. Astron. Soc., **291**, L33 (1997).

[23] M. Zaldarriaga, D. N. Spergel, and U. Seljak, Astrophys. J. **488**, 1 (1997).

[24] L. Knox, Phys. Rev. D **52**, 4307 (1995).

[25] J. R. Bond, R. Crittenden, R. L. Davis, G. Efstathiou, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **72**, 13 (1994).

[26] G. Efstathiou and J. R. Bond, astro-ph/9807103, 1998.

[27] W. Hu and M. White, Phys. Rev. D **56**, 596 (1997).

[28] U. Seljak and M. Zaldarriaga, Phys. Rev. Lett. **78**, 2054 (1997).

[29] M. Zaldarriaga, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1998.

[30] D. J. Fixsen *et al.*, Astrophys. J. **473**, 576 (1996).

[31] C. L. Bennett *et al.*, Astrophys. J. Lett. **464**, L1 (1996).

[32] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitaion* (Freeman, San Francisco, 1973).

[33] N. Makino and M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **86**, 103 (1991).

[34] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 203 (1992).

[35] R. Fakir, S. Habib, and W. G. Unruh, Astrophys. J. **394**, 396 (1992).

[36] M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **89**, 1183 (1993).

[37] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).

[38] W. Hu and N. Sugiyama, Astrophys. J. **444**, 489 (1995).

[39] M. White, Phys. Rev. D **46**, 4198 (1992).

[40] J. Hwang, Phys. Rev. D **53**, 762 (1996).

[41] E. D. Stewart and D. H. Lyth, Phys. Lett. B **302**, 171 (1993).

[42] A. R. Liddle, P. Parsons, and J. B. Barrow, Phys. Rev. D **50**, 7222 (1994).

[43] R. Crittenden, J. R. Bond, R. L. Davis, G. Efstathiou, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **71**, 324 (1993).

[44] J. Hwang, Class. Quantum Grav. **14**, 1981 (1997).

表 L.1: Predicted parameters based on the Fakir-Unruh scenario. For comparison, the parameters of a minimal coupling chaotic scenario are also shown. All parameters are derived at $N(t_k) = 70$.

Parameter	Fakir-Unruh scenario	minimal chaotic scenario
r	2×10^{-3}	0.2
n_s	0.97	0.96
n_t	-3.0×10^{-4}	-2.8×10^{-2}
λ/ξ^2	4×10^{-10}	

付 録M　Astrophysical Journal, 516, L1 (1999)

Submillimeter detection of the Sunyaev – Zel'dovich effect toward the most luminous X-ray cluster at z=0.45

Eiichiro Komatsu,* Tetsu Kitayama,† Yasushi Suto,† ‡ Makoto Hattori,* Ryohei Kawabe,§ Hiroshi Matsuo,§ Sabine Schindler,¶ and Kohji Yoshikawa‖

* Astronomical Institute, Tôhoku University, Aoba, Sendai 980-8578, Japan

† Department of Physics, The University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan

‡ Research Center for the Early University, School of Science, The University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan

§ Nobeyama Radio Observatory, Minamimaki, Minamisaku, Nagano 384-1305, Japan

¶ Astrophysics Research Institute, Liverpool John Moores University, Byrom Street, Liverpool L3 3AF, UK

‖ Department of Astronomy, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

概 要

We report on the detection of the Sunyaev – Zel'dovich (SZ) signals toward the most luminous X-ray cluster RXJ1347-1145 at Nobeyama Radio Observatory (21 and 43 GHz) and at James Clerk Maxwell Telescope (350 GHz). In particular the latter is the first successful detection of the SZ temperature increment in the submillimeter band which resolved the profile of a cluster of galaxies. Both the observed spectral dependence and the radial profile of the SZ signals are fully consistent with those expected from the X-ray observation of the cluster. The combined analysis of 21GHz and 350GHz data reproduces the temperature and core-radius of the cluster determined with the ROSAT and ASCA satellites when we adopt the slope of the density profile from the X-ray observations. Therefore our present data provide the strongest and most convincing case for the detection of the submillimeter SZ signal from the cluster, as well as in the Rayleigh – Jeans regime. We also discuss briefly the cosmological implications of the present results.

1 Introduction

The Sunyaev – Zel'dovich (SZ) effect (Zel'dovich & Sunyaev 1969; Sunyaev & Zel'dovich 1972), a change in the apparent brightness of the cosmic microwave background toward a cluster of galaxies, provides important probes for cluster gas properties, the global cosmological parameters and the peculiar velocity field on large scales (e.g. Silk & White 1978; Sunyaev & Zel'dovich 1980; Rephaeli & Lahav 1991; Kobayashi, Sasaki & Suto 1996; Yoshikawa, Itoh & Suto 1998; Birkinshaw 1999). While the temperature decrement due to the SZ effect is observed for tens of clusters in the Rayleigh – Jeans regime, there is no unambiguous SZ detection in the Wien region (i.e., the submillimeter band) where the apparent brightness increases. Andreani et al. (1996,1999) and Holzapfel et al. (1997) reported the detection of the SZ temperature increment of the clusters RXJ0658-5557 and A2163, respectively, at the wavelength $\lambda = 1.1 \sim 1.2$mm. Although their total fluxes are consistent with the SZ signals from the clusters, it is not clear to what extent the obtained signals are affected by other possible contaminations including the dust in our Galaxy and submm sources in the cluster field (Smail, Ivison & Blain 1997; Hughes et al. 1998). This question also applies to a recent claim of the submm SZ detection (Lamarre et al. 1998) toward A2163 which is solely based on the spectral dependence because their beamsize is very large ($2' \sim 3'$).

This simply implies that the mapping observation of the SZ effect is essential. At cm wavelengths, more than a dozen of clusters have been already mapped with interferometers, but this technique is not yet feasible at submm bands. In the present *Letter*, we describe our successful SZ mapping observation of the X-ray cluster RXJ 1347-1145 ($z = 0.45$) at 350 GHz (0.85mm) with SCUBA (Submillimetre Common-User Bolometer Array) on JCMT (James Clerk Maxwell Telescope) as well as the scanning observations (at 21 and 43 GHz) at Nobeyama Radio Observatory.

2 Observation of the Sunyaev – Zel'dovich effect toward RXJ 1347-1145 at cm, mm and submm bands

2.1 the target cluster RXJ 1347-1145

ROSAT and ASCA satellites revealed that RXJ 1347-1145 at $z = 0.45$ is the brightest X-ray cluster of galaxies observed so far (Schindler et al. 1997). With the additional ROSAT/HRI data acquired recently, the total exposure time of the cluster in the X-ray observation of RXJ 1347-1145 is now 36.5 ksec. We have reanalyzed the new X-ray radial profile, and found that it is well fitted by the isothermal β model:

$$I_{\rm X}(\theta) \propto n_{\rm e0}^2 \theta_{\rm c} [1 + (\theta/\theta_{\rm c})^2]^{1/2-3\beta} \tag{M.1}$$

with the following parameters; the central electron density $n_{\rm e0} = (9.3 \pm 0.4) \times 10^{-2}$ cm^{-3}, the core radius $\theta_{\rm c} = 8.4'' \pm 1.0''$, and $\beta = 0.57 \pm 0.02$, where quoted errors represent 90% statistical uncertainties (unless otherwise stated, we assume $H_0 = 50$ km/sec/Mpc and $\Omega_0 = 1.0$ with vanishing cosmological constant $\lambda_0 = 0$). Since the corresponding SZ radial profile is given by

$$I_{\rm SZ}(\theta) \propto T_{\rm e} n_{\rm e0} \theta_{\rm c} [1 + (\theta/\theta_{\rm c})^2]^{1/2-3\beta/2}, \tag{M.2}$$

the cluster is definitely an ideal SZ target due to its unusually large central density and high temperature $T_e = 9.3^{+1.1}_{-1.0}$ keV (Schindler et al. 1997). In addition, its small core radius should enable us to map the radial profile at 350 GHz within the field-of-view ($160''$) of the SCUBA, while retaining a reasonable angular resolution (the beamsize $\sigma_{\rm FWHM}$ of SCUBA is $15''$). This is the reason why we selected the cluster RXJ 1347-1145 as our SZ target at 350 GHz in the JCMT/SCUBA, as well as at 21 and 43 GHz in the Nobeyama Radio Observatory (NRO).

2.2 21 and 43 GHz at Nobeyama 45-m telescope

First we observed RXJ 1347-1145 at 21 (43) GHz with HEMT amplifier (SIS mixer) mounted on the Nobeyama 45-m telescope between March 3rd and 15th, 1998. The observation was performed in the cross-scan mode with $4'$ $45''$ chop throw in azimuth, and

NGC7027 was used to calibrate the flux (estimated calibration error is less than 10%). A total exposure time is 16.2 (14.4) ksec and the beamsize of the PSF (Point Spread Function) is $\sigma_{\rm FWHM} = 76''$ ($40''$), at 21 (43) GHz. To cut lower frequency noise due to the sky variation, the data were high-pass filtered with a time-constant of 30 (21) sec, and then integrated and averaged over radial bins. The resulting radial profiles of the cluster at 21 and 43 GHz (upper panels in Fig.M.1) indicate the presence of a point source near the cluster center in addition to the SZ signal. In fact the radio source was detected also in the NRAO 1.4 GHz sky survey (Condon et al. 1998) and in the OVRO serendipitous survey of SZ effect at 28.5GHz (Cooray et al. 1998; Carlstrom, private communication). The former suggests that the radio source is located at $(\alpha, \delta) = (13^{\rm h}47^{\rm m}30.67^{\rm s}, -11^\circ\,45'\,8''.6)$ (J2000). This is $2.08''$ away from the optical center, $(13^{\rm h}47^{\rm m}30.54^{s}, -11^\circ\ 45'\,9''.4)$ defined as the location of the central galaxy. This $2''$ offset is within a relative positional error between our radio frame (Johnston et al. 1995) and the optical frame (MacGillivray & Stobie 1985) adopted in Schindler et al. (1995).

Since the accurate flux of the point source is crucial in properly extracting the SZ signal, we observed the central source at 93 GHz and 105 GHz simultaneously with Nobeyama Millimeter Array (NMA) between May 19th and 21st 1998 (15 hours' exposure at each frequency), and at 250 GHz in the photometry mode of SCUBA (Holland et al. 1998) on May 30th and 31st, 1998 (2 hours' exposure). Since the thermal SZ effect vanishes around at 250 GHz (Rephaeli & Lahav 1991), the latter signal, if any, is expected to be dominated by the point source. We detected the point source flux of 5.0 ± 1.5 mJy at 100 GHz, while the 250 GHz observation placed a 2σ upper limit of 4.8 mJy. These results are summarized in Figure M.2. We have corrected the point-source fluxes for the SZ decrement at the corresponding frequency, although the contamination is comparable or less than the quoted 1σ error bars in Figure M.2.

We fitted the three data of the point source at $\nu \leq 100$ GHz to a single power-law:

$$F_{\rm p}(\nu) = (55.7 \pm 1.0)(\nu/1{\rm GHz})^{-0.47\pm0.02}\,{\rm mJy}, \tag{M.3}$$

where the quoted errors represent 1σ. Since equation (M.3) yields a fairly accurate approximation for the flux at 21 and 43 GHz, we subtract the corresponding contribution of the point source from our data. Most radio sources with the spectrum index less than ~ 0.5 are known to exhibit a small amount of time variation (Eckart, Hummel & Witzel

1989). Therefore it is unlikely that the total flux estimated from equation (M.3) varies significantly due to the possible variability of the source. The corrected radial profiles of the cluster plotted in lower panels of Figure M.1 clearly exhibit an extended negative intensity characteristic of the SZ signal. They are quite consistent with those expected from the X-ray observation, especially at 21 GHz where the S/N is significantly higher than at 43 GHz.

2.3 350 GHz at JCMT/SCUBA

We observed the cluster at 350 GHz with SCUBA in the jiggling mode on May 30th and 31st, 1998. Unfortunately the weather conditions during our observation were bad (the zenith optical depth at 350 GHz ranged around $\tau_{350} = 0.46 - 0.60$). The observation was performed over 64 independent points over the sky spaced by $3.09''$ each other with $120''$ chop throw in azimuth. A total exposure time amounts to 18.6 ksec. The primary flux calibration and beam measurement were carried out using Uranus, and the secondary calibrations were performed at the beginning and the end of each observation using IRC10216 and 16293-2422, respectively, to check the stability of gain. The resulting PSF has a beamsize of $\sigma_{\rm FWHM} = 15''$, and the calibration error is less than 15%. The beam profile was approximately Gaussian, but our analysis takes account of the effect of the residual beam-wing as well.

First we analyzed the raw data using REMSKY (Jenness, Lightfoot & Holland 1998) in SURF package (Jenness & Lightfoot 1998) to remove spatially correlated sky-noise. With REMSKY we subtract the sky-noise at each integration from the entire map using the median value of the bolometers (except for very noisy ones). Therefore the zero-level of the resulting map after all integrations is still uncertain depending on the sky condition. We estimated 1σ error of our base-level or DC offset to be as large as 2.9 mJy/beam due to the bad weather conditions. Then the data were reduced and converted to the image using SURF ver 1.2. The resulting image turned out to contain several bright point sources in the field. We detected 7 spurious contamination sources above a threshold of 3σ using SExtractor package (Bertin & Arnouts 1996). While some of them might simply be due to the sky noise, others would be real sources; in fact the previous SCUBA deep surveys

toward clusters of galaxies (Smail, Ivison & Blain 1997; Smail et al. 1998) and blank fields (Hughes et al. 1998; Barger et al. 1998) detected many submillimeter sources in their fields (but with < 10mJy typically). Since it is premature to discuss further the reality of the "sources" at this point, we consider the cases with and without the 7 sources, separately.

The radially averaged profile of the image is plotted in Figure M.3. We confirmed that the presence of the extended feature comparable to the cluster extension is robust even with retaining the 7 sources. In this plot, we adopted the cluster center as the position of the optical center. It should be noted that the error bars in the inner annuli are smaller than those in the outer annuli, despite the smaller effective area. This is because several noisy bolometers located at outer annuli contribute significantly to the noise-level of the corresponding annuli. Thus the noise level is in fact dependent on the angular radius. These complex noise properties of the SCUBA should be kept in mind in interpreting the result below.

In fitting our observed profile to the model prediction at 350 GHz, we have to take account of the DC offset mentioned above, $I_{\rm DC}$, and the possible contribution of the central point source $F_{\rm p}$. In what follows, we consider three values for the point-flux so as to take into account the associated uncertainties; $F_{\rm p} = 3.5$ mJy (extrapolated from eq.[M.3]), 4.5mJy (a conservative 2σ *upper* limit from eq.[M.3]) and 0. We adopt the latter since many radio sources are known to exhibit a steep decline of flux around submillimeter bands (e.g., Gear et al. 1994). Incidentally $F_{\rm p} = 4.5$ mJy is a similar flux level reported for the submm emission from two central galaxies in luminous X-ray clusters (Edge et al. 1999). Thus the analysis using $F_{\rm p} = 4.5$ mJy may be also useful in understanding the effect of the possible dust emission from the central galaxy. Then we treat the DC offset always as a free fitting parameter, despite the fact that the best-fit value ($I_{\rm DC} = 2.1 \sim 2.7$ mJy) turns out fairly insensitive to both the adopted β-model parameters and $F_{\rm p}$. Note that the central feature of our data is significantly more extended than the PSF of beam even for the case with $F_{\rm p} = 4.5$ mJy (*blue dotted curve* in Fig.M.3). The best-fit parameters for $F_{\rm p}$ and $I_{\rm DC}$ are listed in Table M.1 togather with the corresponding value of the reduced χ^2. Table M.1 indicates that the fit is unacceptable without including the SZ profile, while the agreement with the SZ profile is insentitive to the 7 sources.

We applied the same reduction procedure for the Lockman-hole data with SCUBA

(Barger et al. 1998), and found no central extended signal or significant DC offset. This confirms that our signal profile does not suffer from any systematic effects in the reduction procedure. In addition, it supports our suspicion that our large DC offset is due to the relatively large sky-noise during our observing run; our and their noise levels are typically 8 mJy/beam and 0.8 mJy/beam, respectively.

We repeated the similar fitting analysis in 21 and 43 GHz as well. The results are summarized in confidence contours on the $T_{\rm e}$ – $\theta_{\rm c}$ plane (Fig.M.4). Panels a) to c) indicate that the profile in each band is consistent with each other and actually in good agreement with the parameters estimated from the X-ray observation. Combined data analysis of 21 and 350 GHz further improves the agreement and puts more stringent constraints on $T_{\rm e}$ and $\theta_{\rm c}$ (panel d). Therefore our present data provide the strongest and most convincing case for the detection of the submm SZ signal from the cluster as well as in the Rayleigh – Jeans regime.

3 Discussion

Detection of the SZ signals in multi-bands for one particular cluster has important cosmological implications; combining our data in the X-ray, 21 GHz and 350 GHz of RXJ1347, we estimated the angular diameter distance at $z = 0.451$ as $1897 \pm 317 \pm 246$ Mpc assuming $F_{\rm p} = 3.5$ mJy and the spherical symmetric profile of the cluster (Silk & White 1978; Kobayashi, Sasaki & Suto 1996; Birkinshaw 1999). The first and second quoted errors come from the uncertainties of the observed SZ intensity and of the parameters from X-ray observation, respectively. This angular diameter distance is translated to $H_0 = 37 \pm 6 \pm 5$ and $44 \pm 7 \pm 6$ km/sec/Mpc for $(\Omega_0, \lambda_0) = (1.0, 0.0)$ and $(0.3, 0.7)$, respectively. While the estimates still have fairly large errors compared with those from optical observations, it is encouraging that they fit in a reasonable range, and we expect to improve the estimates by observing the cluster again (hopefully in much better weather condition). Then it will be feasible to separate the kinematic and thermal SZ effects by a simultaneous fit to the 21 and 350 GHz data, which will yield a estimate of the peculiar velocity of the cluster (Rephaeli & Lahav 1991; Yoshikawa, Itoh & Suto 1998; Birkinshaw 1999).

In the above discussion, we have neglected several issues which could affect our interpre-

tation of the detection of the SZ signal from the cluster in principle, including a possible variability of the central point source, a non-sphericity and a non-isothermality (Yoshikawa, Itoh & Suto 1998; Makino, Sasaki & Suto 1998; Suto, Sasaki & Makino 1998; Yoshikawa & Suto 1999), a cooling flow (Fabian 1994; Allen 1998; Allen & Fabian 1998), contribution of submm dust (Lamarre et al. 1998; Edge et al. 1999), unresolved lensed sources, and a peculiar velocity of the cluster. These would definitely contribute to put additional uncertainties in the best-fit parameters of the cluster to some extent. Nevertheless, it is almost impossible to explain both the spectral dependence in three bands and the radial profile in each band simultaneously by the combination of those effects alone without the SZ effect, as clearly demonstrated in Figure M.4. Detailed analysis taking account of those issues will be presented elsewhere (Komatsu et al., in preparation).

We thank Iain Coulson, Nario Kuno and Satoki Matsushita for kind assistance during our observing runs at JCMT, Nobeyama 45-m and Nobeyama Millimeter Array, respectively. We also thank Nick Tothill for providing the calibration data for our observation, and Tim Jenness, John Richer, Remo Tilanus and Goeran Sandell for many fruitful comments and suggestions on data analysis via the SCUBADR mailing list. We are grateful to A. J. Barger for providing the SCUBA data of Lockman-Hole, to John Carlstrom for information on the flux of the central source at 28.5 GHz, and to an anonymous referee for several critical comments. The travel of E. K. to Hawaii was supported in part by Satio Hayakawa Foundation in the Astronomical Society of Japan. T. K. acknowledges support from a JSPS (Japan Society for the Promotion of Science) fellowship. This research was supported in part by the Grants-in-Aid for the Center-of-Excellence (COE) Research of the Ministry of Education, Science, Sports and Culture of Japan to RESCEU (No.07CE2002).

REFERENCES

Allen, S. W. 1998, MNRAS, 296, 392

Allen, S. W. & Fabian, A. C. 1998, MNRAS, 297, L57

Andreani, P. et al. 1996, ApJ, 459, L49

Andreani, P. et al. 1999, ApJ, in press (astro-ph/9811093)

Barger, A. J., Cowie, L. L., Sanders, D. B., Fulton, E., Taniguchi, Y., Sato, Y., Kawara, K. & Okuda, H. 1998, Nature, 394, 248

Bertin, E. & Arnouts, S. 1996, A&AS, 117, 393

Birkinshaw, M. 1999, Phys. Rep., in press (astro-ph/9808050)

Condon, J. J., Cotton, W. D., Greisen, E. W., Yin, Q. F., Perley, R. A., Taylor, G. B. & Broderick, J. J. 1998, AJ, 115, 1693

Cooray, A. R., Grego, L., Holzapfel, W. L., Joy, M. & Carlstrom, J. E. 1998, AJ, 115, 1388

Eckart, A., Hummel, C. A. & Witzel, A. 1989, MNRAS, 239, 381

Edge, A. C., Ivison, R. J. Smail, I., Blain,A.W., & Kneib, J.-P. 1999, MNRAS, in press (astro-ph/9902038)

Fabian, A. C. 1994, ARA&A, 32, 277

Gear, W. K., et al. 1994, MNRAS, 267, 167

Holland, W. S., Cunningham, C. R., Gear, W. K., Jenness, T., Laidlaw, K., Lightfoot, J. F. & Robson, E. I. 1998, Proc. SPIE, 3357, 305

Holzapfel, W.L., Ade, P.A.R., Church, S.E., Mauskopf, P.D., Rephaeli, Y., Wilbanks, T.M., & Lange, A.E. 1997, ApJ, 481, 35

Hughes, D. H., et al. 1998, Nature, 394, 241

Jenness, T., Lightfoot, J. F. & Holland, W. S. 1998, Proc. SPIE, 3357, 548

Jenness T. & Lightfoot, J. F. 1998, Starlink User Note 216.3

Johnston, K.J. et al. 1995, AJ, 110, 880

Kobayashi, S., Sasaki, S. & Suto, Y. 1996, PASJ, 48, L107

Lamarre, J. M., et al. 1998, ApJ, 507, L5

Makino, N., Sasaki, S. & Suto, Y. 1998, ApJ, 497, 555

MacGillivray, H. T. & Stobie R. S. 1985, Vistas in Astronomy, 27, 433

Rephaeli, Y. & Lahav, O. 1991, ApJ, 372, 21

Schindler, S. et al. 1995, A&A, 299, L9

Schindler, S., Hattori, M., Neumann, D. M. & Böhringer, H. 1997, A&A, 317, 646

Silk, J. & White, S. D. M. 1978, ApJ, 226, L103

Smail, I., Ivison, R. J. & Blain, A. W. 1997, ApJ, 490, L5

Smail, I., Ivison, R. J., Blain, A. W. & Kneib, J.-P. 1998, ApJ, 507, L21

Sunyaev, R. A. & Zel'dovich, Ya. B. 1972, Comments Astrophys. Space Phys., 4, 173

Sunyaev, R. A. & Zel'dovich, Ya. B. 1980, MNRAS, 190, 413

Suto, Y., Sasaki, S. & Makino, N. 1998, ApJ, 509, 544

Yoshikawa, K., Itoh, M. & Suto, Y. 1998, PASJ, 50, 203

Yoshikawa, K. & Suto, Y. 1999, ApJ, 513, March 10 issue, in press (astro-ph/9810247)

Zel'dovich, Ya. B. & Sunyaev, R. A. 1969, Astrophys. Space. Sci., 4, 301

表 M.1: Summary of the best-fit parameters at 350 GHz

7 sources	SZ	point-source flux [mJy]	DC offiset [mJy/beam]	reduced χ^2
No	No	7.4	4.0	3.6
Yes	No	6.1	5.1	3.6
No	Yes	1.5	2.7	0.73
Yes	Yes	0.2	3.8	0.79

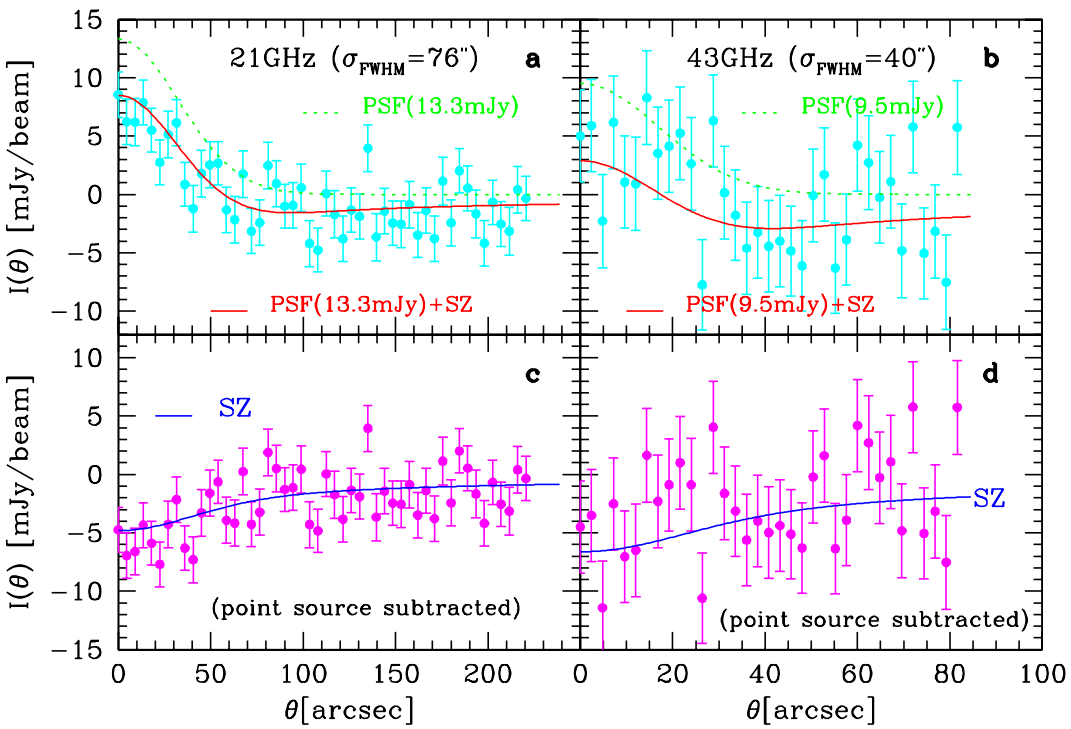


図 M.1: Radial intensity profile toward RXJ1347 at 21 (left panels) and 43 (right panels) GHz observed at NRO. Lower panels show the data in which the estimated contribution of the central radio source (13.3 mJy at 21 GHz, and 9.5 mJy at 43 GHz plotted in green dotted lines) is subtracted. Filled circles indicate our data with 1σ error-bars. Red (blue) solid lines in upper (lower) panels are the prediction of the signal with (without) the point source contribution using the best-fit parameters in the X-ray observation.

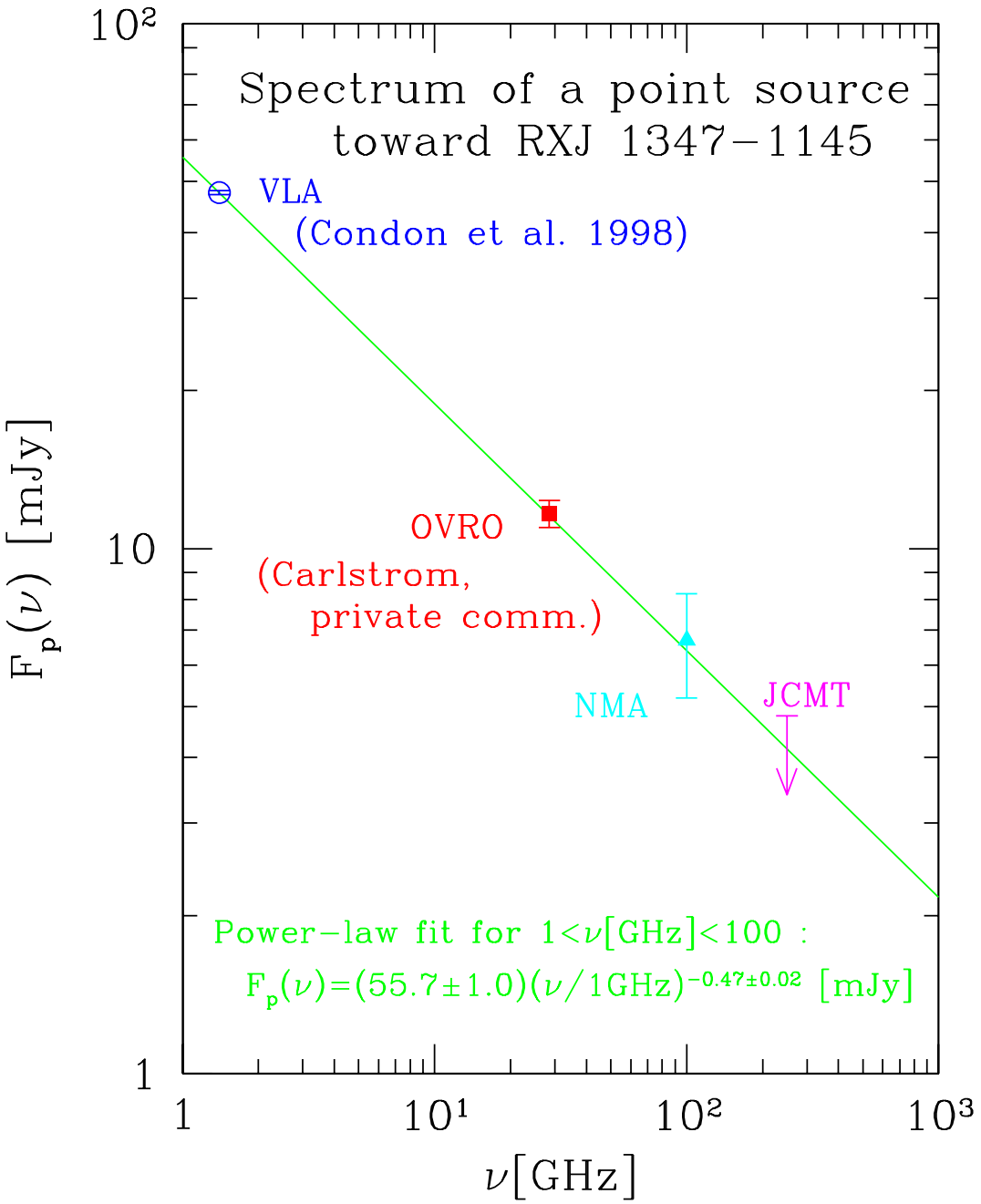


図 M.2: Spectrum of the central radio source. The data labelled NMA are the average of the results at 93 GHz and 105 GHz.

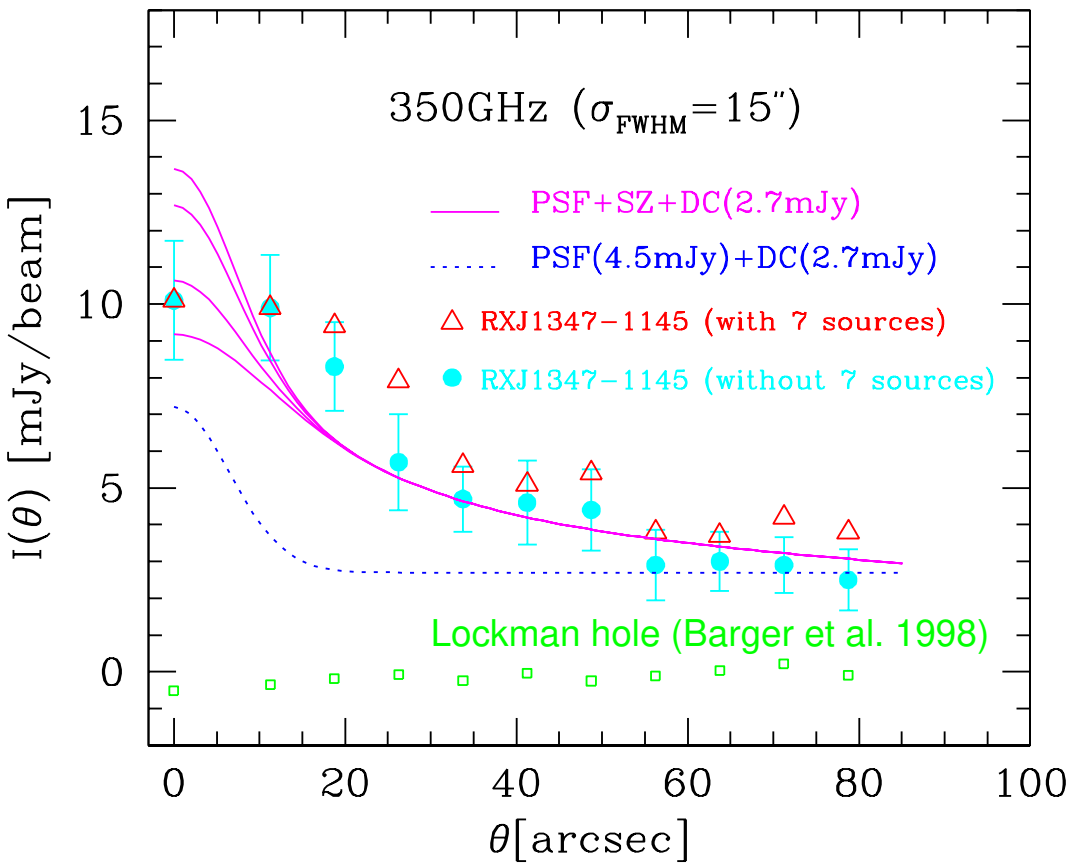


図 M.3: Radial intensity profile toward RXJ1347 at 350 GHz observed at JCMT/SCUBA. Open triangles (filled circles) indicate our data with (without) the 7 spurious sources described in the text. The 1σ error bars are shown only for the latter. Dotted curve shows the PSF of 4.5 mJy source with 2.7 mJy DC offset (see text for detail). Solid curves plot the SZ profiles from the best-fit parameters in the X-ray observation and the point-source contribution with $F_{\rm p}$ = 4.5, 3.5, 1.5 and 0mJy (from top to bottom). We applied the identical reduction procedure to the Lockman-hole data (Barger et al. 1998), and the results are plotted in small squares for reference (the 1σ error is smaller than the size of the symbol itself).

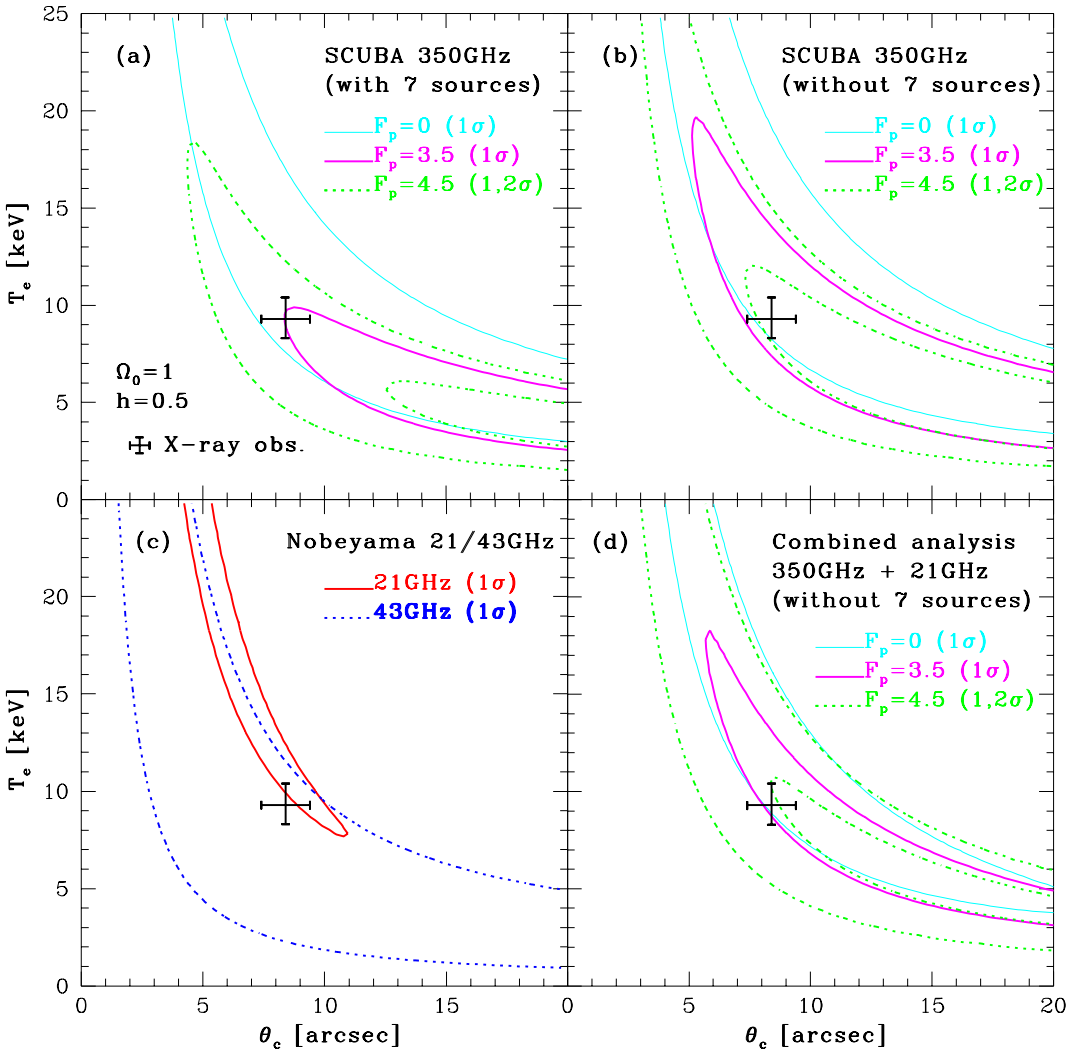


図 M.4: Confidence contours on the gas temperature T_e and the core radius $\theta_{\rm c}$ from the SZ data analysis assuming $\Omega_0 = 1.0$ and $h = 0.5$ for definiteness. The cross indicates the parameters determined from X-ray observations with ROSAT and ASCA satellites. a) 350 GHz data with the 7 spurious *sources* described in the text; b) 350 GHz data without the 7 spurious sources; c) 21 GHz and 43 GHz; d) combined analysis with 21 GHz and 350 GHz (without the 7 spurious sources) data. In panels a, b and d, we adopt $F_p = 0$mJy (thin solid), $F_p = 3.5$ mJy (thick solid) and $F_p = 4.5$ mJy (thick dotted) for the flux of the point source at 350 GHz as explained in the text.