修士論文

宇宙背景放射

付録集

ゲージ不変な一般相対論的摂動論および光の伝播

東北大学大学院理学研究科天文学専攻

小松 英一郎

平成10年

目 次

付 録A　The ADM Formalism

一般相対論は、一般共変的なテンサー方程式で記述される。いいかえれば、方程式は一般座標変換に対して形を変えない。しかし、ひとたび我々が一般相対論の枠組みの中で、例えば流体の運動を記述しようと試みる際、この不変性はやっかいなものとなる。すなわち、我々が普段運動を測る際に用いる「時間」は特別な座標ではなく、「空間」も一意に規定されるわけではない。時空座標 4 次元はすべて対等であり、それは相対論の本質でもある。従って相対論においては「エネルギー」、「運動量」といった重要な物理量の定義も、ニュートン力学のように自明ではない。このような困難を回避し、一般相対論の枠組みで物理量の時間発展を記述し、解析的研究、さらには数値相対論にとって強力な手法として登場したのが、Arnowitt, Deser, Misner による、「ADM 形式」である (Arnowitt, Deser & Misner, 1962)。

1　Metric

ADM 形式では、4 次元座標を空間 3 次元+時間 1 次元に分割するところからはじまる。まず時間座標 τ を決め、時間一定の空間的超曲面 (spatial hypersurface; 以下 $\mathcal{S}_\tau$) を各時刻ごとに定義する。$\mathcal{S}_\tau$ は時間軸と直交するように定義される。時空は 4 次元計量テンサー (metric tensor) $\mathbf{g}$ によって決定されるが、これを $3+1$ に分割する際、以下のように時空の性質を特徴づける 3 つの量を導入する。

(1) N: ラプス関数 (Lapse function)
物理的な時間 (あるいは固有時間) の刻みが $N d\tau$ となるように定義される。N は一般に時空点の関数であるから、時空点ごとの物理的時間の流れ方の違いを決める関数である。以降、τ による偏微分をドットで表す。物理的時間 t による偏微分は、$\partial f/\partial t = N^{-1}\dot{f}$ となる。従ってドットのあるところには N^{-1} が伴う。

(2) ${}^{(3)}g_{ij}$: 空間的計量 (spatial metric)

$\mathcal{S}_\tau$ 上における、3次元曲率テンサー ${}^{(3)}\mathbf{R}$ を決める* 。一様等方な膨張宇宙においては、

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}R_{ijkm} &= \frac{\kappa}{a^2}\left({}^{(3)}g_{ik}{}^{(3)}g_{jm} - {}^{(3)}g_{im}{}^{(3)}g_{jk}\right), && \text{(A.1)}\\
{}^{(3)}R_{ij} &= 2\frac{\kappa}{a^2}{}^{(3)}g_{ij}, && \text{(A.2)}\\
{}^{(3)}R &= 6\frac{\kappa}{a^2}. && \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

κ は、3元スカラー曲率を表すパラメターで、(長さ)$^{-2}$ の次元を持っている。つまり $\kappa^{-1/2}$ は曲率半径をあらわしているが、平坦な空間 ($\kappa = 0$) では曲率半径無限大、開いた空間 ($\kappa < 0$) では双曲型空間の曲率スケールである。また、a は一様等方膨張のスケールファクターである。曲率テンサーの詳しい定義は、 Appendix C において行なう。

(3) N^i: シフトベクター (shift vector)
空間座標の原点が時間座標に対して速度 N^i で運動する自由度。空間座標の原点に静止している観測者が必ずしも時間軸に沿っているわけではなく、その流線が $\mathcal{S}_\tau$ と直交しているとは限らないことを意味している。$N^i = 0$ である場合、空間座標原点の流線が $\mathcal{S}_\tau$ と直交し、全空間にわたって同時刻になるように時計を合わせることができる。

以上の量を用い、4次元線素 ds^2 は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -N^2 d\tau^2 + {}^{(3)}g_{ij}(dx^i + N^i d\tau)(dx^j + N^j d\tau)\\
&= (-N^2 + N^k N_k)d\tau^2 + 2N_i d\tau dx^i + {}^{(3)}g_{ij}dx^i dx^j. && \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

メトリックの成分として、逆行列とともに書き下せば、

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -N^2 + N^k N_k \quad , & g^{00} &= -\frac{1}{N^2}, && \text{(A.5)}\\
g_{0i} &= N_i \equiv {}^{(3)}g_{ij}N^j \quad , & g^{0i} &= \frac{N^i}{N^2}, && \text{(A.6)}\\
g_{ij} &= {}^{(3)}g_{ij} \quad , & g^{ij} &= {}^{(3)}g^{ij} - \frac{N^i}{N}\frac{N^j}{N}. && \text{(A.7)}
\end{aligned}
$$

逆行列の各成分は、$g^{00} \equiv -1/N^2$ を定義すれば $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$ を用いて計算される。メトリックの各成分の定義は、文献によって上記と逆符号で定義されることも多い。これは、問題

* Bardeen (1980), Kodama & Sasaki (1983) では、$\gamma_{ij} \equiv {}^{(3)}g_{ij}/a^2$ について ${}^{(3)}\mathbf{R}$ を定義している。従って、${}^{(3)}R = 6\kappa$ である。

によって計算の楽な方を選ぶためであるが、注意が必要である[†]。メトリックから計算される曲率テンサー、クリストッフェル記号は、Appendix C で定義している。

2 Geometrical Quantities

メトリックを $N, N^i, {}^{(3)}g_{ij}$ を用いて定義したので、これらを用いて時空の幾何学的性質を調べることができる。「調べる」とは、すなわちある観測者を配置して幾何学を「測定する」ことである。従って配置される観測者が異なれば幾何的構造も違って見える。この観測者の任意性を利用して、最もシンプルかつクリアに時空構造を明らかにできる観測者を定義できる。ただし、ここで言う「観測者」はあくまで便宜的なものであり、これから採用する観測者の測る量が、はたして我々の観測可能量であるかどうかは全く別の問題である。

2.1 normal vector & projection tensor

時空を $3+1$ に分解したことを受け、$\mathcal{S}_\tau$ に垂直な時間的 4 元ベクター $\mathbf{n}$ を定義し、これを観測者として選ぶ。時間的とは、$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = -1$ を意味する。$\mathcal{S}_\tau$ との直交条件より、$\mathbf{n}$ の成分は

$$n^\mu = (\frac{1}{N},\ -\frac{N^i}{N}) , \qquad n_\mu = (-N,\ 0,\ 0,\ 0) \tag{A.8}$$

と決められる。さらに、$\mathbf{n}$ から構成される演算子として、射影テンサー (projection tensor) $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{g} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \tag{A.9}$$

を定義できる。これは、4 元量を $\mathbf{n}$ に直交する方向、すなわち $\mathcal{S}_\tau$ 上に射影する演算子であり、4 元ベクター $\mathbf{V}$, テンサー $\mathbf{T}$ はそれぞれ、$\mathbf{V}_{(\mathcal{S}_\tau)} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{V}$, $\mathbf{T}_{(\mathcal{S}_\tau)} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}$ のように射影される。その他諸性質として、

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad \mathrm{Tr}\mathbf{P} = 3$$
$$P^0_\mu = 0, \quad P^i_0 = N^i, \quad P_{ij} = {}^{(3)}g_{ij}$$

などが挙げられ、射影された量の成分は

$$V^\mu_{(\mathcal{S}_\tau)} \quad = \quad (0, V^0 N^i + V^i), \tag{A.10}$$

[†] 例えば、Landau & Lifshitz (1973) は逆符号である。

$$V_{(\mathcal{S}_\tau)\mu} \;=\; (V_k N^k, V_i), \tag{A.11}$$

$$T_{(\mathcal{S}_\tau)\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} T_{kl}N^kN^l & T_{ki}N^k \\ T_{ik}N^k & T_{ij} \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

$$T^{\mu}_{(\mathcal{S}_\tau)\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T^0_kN^kN^i & T^0_jN^i + T^i_j \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

$$T^{\mu\nu}_{(\mathcal{S}_\tau)} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^{00}N^iN^j + T^{i0}N^j + N^iT^{0j} + T^{ij} \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

と書き下せる。射影された量は空間的テンサーであるから、各成分はもはや独立ではない。しかし添字が 0 の成分も存在するため、その空間性が見にくくなっている。これは、シフトベクターの存在によって時間軸と空間座標一定 $(dx^i = 0)$ の流線が一致しないためであり、$N_i = 0$ のもとでは 0 の成分が全て消えて添字の時間性と空間性がはっきり分けられることを見ても明らかである。

シフトベクターが存在するもとにおいても、適当に基底をとりなおしてやる事によって空間的添字と時間的添字を切り離して添字に物理的意味をもたせることが可能である。この手法については Appendix B で述べる。

2.2 rotation, shear, expansion & acceleration

以上の量を用い、$3+1$ 分解の枠組みで時空構造を測定する。$\mathbf{n}$ は $\mathcal{S}_\tau$ の法線ベクターであるから、$\mathcal{S}_\tau$ 上の異なる点に立つ $\mathbf{n}$ を比較して、その変化率 $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ を測定することによって $\mathcal{S}_\tau$ の幾何学的諸量をシンプルに得る事ができる。ここで、$\boldsymbol{\nabla}$ は $\mathbf{g}$ に基づく 4 元共変微分である。

$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ は、形式的に常に

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma} + \frac{\theta}{3}\mathbf{P} - \mathbf{A}\otimes\mathbf{n}, \tag{A.15}$$

- 空間的反対称トレースレステンサー $\boldsymbol{\omega}$: 回転 (rotation)
- 空間的対称トレースレステンサー $\boldsymbol{\sigma}$: 非等方体積変化率 (shear)
- 空間的トレース θ: 等方体積変化率 (expansion)
- 空間的剰余項 $\mathbf{A}$: 加速度 (acceleration)

に分解できる。ただし、ここではまだ $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ を形式的に分解しただけにすぎず、上に記した幾何的意味は明らかではない。成分で書けば、

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(P^{\alpha}_{\mu}n_{\alpha;\beta}P^{\beta}_{\nu} - P^{\beta}_{\nu}n_{\beta;\alpha}P^{\alpha}_{\mu}\right) \tag{A.16}$$

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(P^{\alpha}_{\mu}n_{\alpha;\beta}P^{\beta}_{\nu} + P^{\beta}_{\nu}n_{\beta;\alpha}P^{\alpha}_{\mu}\right) - \frac{\theta}{3}P_{\mu\nu} \tag{A.17}$$

$$\theta \equiv P^{\alpha\beta}n_{\alpha;\beta} \tag{A.18}$$

$$A_{\mu} \equiv P^{\alpha}_{\mu}n_{\alpha;\beta}n^{\beta} \tag{A.19}$$

であり、(A.16) – (A.19) を用いて (A.15) の右辺を全て加えれば、式 (A.15) を確かめられる。各々の幾何量が全て空間的なテンサー、すなわち $\mathcal{S}_{\tau}$ 上のものとして定義されていることとは、$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0$ より明らかである。

2.3 extrinsic curvature

(A.15) は自明な等式であるが、各幾何量の持つ物理的意味は、式を見ただけでは直観的に分かりにくい。従って、より基本的立場から考察する。

例として 3 次元の球体を考える。2 次元しか知覚できない者は、測定により、彼にとっての 2 次元面を平坦であると結論するだろう。しかし、我々のように 3 次元を知覚できる者は、例えば球面上に垂直に棒を立て、全ての棒は互いに平行でないことを知ることができ、そこに 3 次元曲率の存在を見出すことができる。同様に $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ は、4 次元を知覚できる者が 3 次元空間的超曲面 $\mathcal{S}_{\tau}$ 上の異なる点に立つ $\mathbf{n}$ を比較したものであるから、$\mathcal{S}_{\tau}$ の 4 次元的曲率をあらわしていると考えられる。従って、3 次元空間の曲率 ${}^{(3)}\mathbf{R}$ を内的曲率 (intrinsic curvature) と呼ぶとするならば、$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ によって測られた 4 次元的な曲率を外的曲率 (extrinsic curvature) と呼び、$\mathbf{K} \equiv -\mathbf{P}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n})\cdot\mathbf{P}$ と定義することができるだろう。ただし、$\mathbf{K}$ は $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ そのものではなく、$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n}$ の $\mathcal{S}_{\tau}$ 上の射影成分として定義されている。なぜならば、3 次元を知覚する我々は、所詮 $\mathcal{S}_{\tau}$ 上に射影された成分を測定するしかないからである。マイナスをつけて定義するのは、比較した $\mathbf{n}$ が互いに内向きな時、つまり時間的に収縮の方向を $\mathbf{K} > 0$ として定義したためである。

$\mathbf{K}$ を成分で書き下せば、$K_{\mu\nu} \equiv -P^{\alpha}_{\mu}n_{\alpha;\beta}P^{\beta}_{\nu} = -P^{k}_{\mu}(n_{k,l} - \Gamma^{\gamma}_{kl}n_{\gamma})P^{l}_{\nu}$ である。しかし、今採用している $\mathbf{n}$ は $\mathcal{S}_{\tau}$ に直交しており、$n_{\mu} = (-N, 0, 0, 0)$ であることから第 1 項は消え、$\mathbf{K}$ は対称テンサーとなる。一方、定義より $K_{\mu\nu} - K_{\nu\mu} = -2\omega_{\mu\nu}$ であり、従って $\boldsymbol{\omega} = 0$ が結論される。これは、ADM 形式のとったある重要な要請の結果である。ADM 形式では、

まず超曲面 $\mathcal{S}_\tau$ を定義するところからはじめた。これはすなわち、いたるところで時間的な法線ベクター $\mathbf{n}$ を定義できたことと同等である。いいかえれば、$\mathcal{S}_\tau$ 上のいたるところで対称テンサー $\mathbf{K}$ が定義できるためには、$\mathcal{S}_\tau$ が大局的に「面」をなしていなければならない。結果として、ADM 形式においては原理的に $\boldsymbol{\omega}$ が存在しないことになる。

(A.15) に $\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}$ を作用させることにより、以下の式を得る。

$$\mathbf{K} = -\left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{\theta}{3}\mathbf{P}\right), \tag{A.20}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\left[\mathbf{K} - \frac{1}{3}\mathbf{P}(\mathrm{Tr}\mathbf{K})\right], \tag{A.21}$$

$$\theta = -\mathrm{Tr}\mathbf{K}. \tag{A.22}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は $\mathbf{K}$ のトレースレスの部分となっており、法線ベクターの束が非等方的に変化する、すなわち非等方的な体積変化率をあらわしている。一方、θ はトレースであり、等方的な体積変化率である。マイナス符号は $\boldsymbol{\sigma}$, θ が膨張する方向に正であることを示している。後に (A.33) で見るように、例として宇宙論的な状況を考えれば、フリードマン宇宙 ($N = 1,\ N^i = 0,\ {}^{(3)}g_{ij} = \bar{a}^2(\tau)\delta_{ij}$) では $\theta/3 = H \equiv \dot{\bar{a}}/\bar{a},\ \boldsymbol{\sigma} = 0$ であり、確かに等方的な宇宙膨張をあらわしていることがわかる。ゆらぎが存在するような場合には $\boldsymbol{\sigma} \neq 0$ となる状況も考えられるが、$\boldsymbol{\sigma}$ を構成するゆらぎの組合せは宇宙の非等方膨張に寄与していることが物理的に明らかとなる上、テンサーで書かれているため非常に見通しが良い。

3 Linear Perturbations

メトリックの各成分に線形摂動を与え、ADM 形式で定義した幾何量 $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\sigma}$, θ, $\mathbf{A}$ を摂動量で書き下す。

3.1 metric perturbations

一様等方な宇宙を背景とし、線形摂動 $h_{\mu\nu}$ を加える。その際、等方膨張を抜きだすため時間、空間座標を $\bar{N}(\tau)d\tau,\ \bar{a}(\tau)dx^i$ とスケールして、

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \bar{N}^2(-1 + h_{00})d\tau^2 + 2\bar{N}\bar{a}h_{0i}d\tau dx^i + \bar{a}^2(\gamma_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \tag{A.23}$$

と定義する。バーをつけた量は無摂動量である。$\gamma_{ij} \equiv {}^{(3)}\bar{g}_{*ij} \equiv {}^{(3)}\bar{g}_{ij}/\bar{a}^2$ は一様等方 3 次元空間を記述するメトリックで、極座標表示で

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j \equiv \frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{A.24}$$

と書き下すことができる。κ は内的曲率をあらわすパラメターであり、すなわち 3 次元スカラー曲率 (A.3) のパラメターである。特に、無摂動次でのメトリック

$$\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\bar{N}^2 d\tau^2 + \bar{a}^2\gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{A.25}$$

はロバートソン – ウォーカーメトリック (Robertson-Walker metric) と呼ばれている。

逆行列も含めて各成分を書き下せば、

$$g_{00} = -N^2 = -\bar{N}^2(1-h_{00}) \quad , \qquad g^{00} = -\frac{1}{\bar{N}^2}\left(1+h^{00}\right), \tag{A.26}$$

$$g_{0i} = N_i = \bar{N}\bar{a}h_{0i} \quad , \qquad g^{0i} = \frac{1}{\bar{N}\bar{a}}h^{0i}, \tag{A.27}$$

$${}^{(3)}g_{ij} = \bar{a}^{2(3)}g_{*ij} \equiv \bar{a}^2(\gamma_{ij}+h_{ij}) \quad , \qquad g^{ij} = \frac{1}{\bar{a}^2}\left(\gamma^{ij}-h^{ij}\right). \tag{A.28}$$

ここで、上つきの添字を持つ摂動量を以下のように定義した。

$$h^{00} \equiv h_{00}, \qquad h^{0i} \equiv \gamma^{ik}h_{0k}, \qquad h^{ij} \equiv \gamma^{ik}\gamma^{jl}h_{kl}, \qquad h^k_k \equiv \gamma^{kl}h_{kl}. \tag{A.29}$$

注意しておくが、線形摂動量 $h_{\mu\nu}$ の添字の上下はさして意味を持たない。単に計算の便宜上、フルのメトリック g ではなく、$\bar{a}^2$ を抜いた γ を使って上つきの添字を定義しただけである。従って、テンサー計算の際混乱してはならない。

3.2 extrinsic curvature, shear & expansion

$\boldsymbol{\sigma}, \theta$ は、それぞれ **K** のトレースレス成分、トレース成分であるため、**K** を摂動量で書き下しておけば良い。**K** は空間的テンサーであるから、(A.12) のように 4 元テンサーとしての **K** の各成分は独立ではない。従って K_{ij} を摂動量で書き下せば良く、

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -N\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2N}\left(-{}^{(3)}\dot{g}_{ij} + g_{0i|j} + g_{0j|i}\right) \\ &= -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}{}^{(3)}g_{ij} - \frac{\bar{a}^2}{2\bar{N}}\dot{h}_{ij} + \frac{\bar{a}}{2}\left(h_{0i|j}+h_{0j|i}\right) \qquad \text{(A.30)} \\ &= -\frac{\bar{a}\dot{\bar{a}}}{\bar{N}}\left[\left(1+\frac{1}{2}h_{00}\right)\gamma_{ij}+h_{ij}\right] - \frac{\bar{a}^2}{2\bar{N}}\dot{h}_{ij} + \frac{\bar{a}}{2}\left(h_{0i|j}+h_{0j|i}\right). \qquad \text{(A.31)} \end{aligned}$$

$|$ は、${}^{(3)}g_{ij}$ にもとづく 3 元共変微分であり、ドットは τ に関する偏微分である。(A.30) をもとに、$\boldsymbol{\sigma}$, θ をそれぞれ求めることができる。ここで、トレースレスな空間的テンサーを表記するため、$(T')_{ij} \equiv T_{ij} - \frac{1}{3}{}^{(3)}g_{ij}{}^{(3)}g^{kl}T_{kl}$ という量を定義する。この表記に従えば、

$$\sigma_{ij} \equiv -(K')_{ij} = \frac{\bar{a}^2}{2\bar{N}}\dot{(h')}_{ij} - \frac{\bar{a}}{2}\left[(h')_{0i|j} + (h')_{0j|i}\right], \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{\theta}{3} \equiv -\frac{1}{3}{}^{(3)}g^{kl}K_{kl} \\ &= \frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^k_k - \frac{1}{\bar{a}}h^{0k}{}_{|k}\right) \qquad (A.33) \\ &= \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^k_k - \frac{1}{\bar{a}}h^{0k}{}_{|k}\right). \qquad (A.34) \end{aligned}$$

(A.32) より $\boldsymbol{\sigma}$ は無摂動で存在せず、線形のオーダーでは $\sigma_{00} = \sigma_{0i} = 0$ であることが確かめられる。(A.33) は、線形摂動が存在する宇宙におけるハッブル定数 H の定義である。$\bar{N} = 1$ とすると、無摂動時には $H = \dot{\bar{a}}/\bar{a}$ となり、これは見慣れたハッブル定数の定義と一致する。蛇足であるが、$\boldsymbol{\sigma}$, $\theta/3$ は、それぞれ (A.30) のトレースレス、トレース成分であることが (A.32), (A.33) を見ても分かる。

3.3 acceleration

$\mathcal{S}_\tau$ の加速度 $\mathbf{A}$ に線形摂動を加える。(A.10) より、独立成分 A_i のみを考えれば良く、

$$A_i \equiv P^\alpha_i n_{\alpha;\beta}n^\beta = (\ln N)_{|i} = -\frac{1}{2}h_{00|i}. \tag{A.35}$$

ラプス関数の空間微分 $N_{|i}$ は、単独で線形量である。また、線形のオーダーでは $A_0 = 0$ である。

付録B　Orthonormal Tetrad Representation

Appendix A では、空間的超曲面 $\mathcal{S}_\tau$ への射影テンサー $\mathbf{P}$ を定義して時空を $3+1$ に分解し、時空構造をあらわす種々の空間的テンサーを定義した。しかし、シフトベクター N_i の存在のために、射影された空間的テンサーが 0 成分を持ってしまい、添字に関して時間性と空間性の混在を招いた。これは、N_i によって基底の直交性 (orthogonality) が失われたためである。従って、テンサーを表現する基底を、テンサーの成分が時間的ベクター $\mathbf{n}$ 方向の成分とそれと直交する $\mathcal{S}_\tau$ 上の成分に完全に分離できるように規格直交性 (orthonormality) を持たせてとりなおしてやることで添字に物理的意味を持たせることができ、テンサーの成分が持つ意味をはっきりさせることができる。

1　Tetrad

基底を構成している 4 本のベクターを、四脚場、あるいはテトラード (tetrad) と呼ぶ。Appendix A と同様、時間方向は $\mathbf{n}$ で定義する。$\mathbf{n}$ に直交する $\mathcal{S}_\tau$ 上に、空間的基底をあらわす 3 本のトライアード (triad) $\mathbf{e}_I$ を定義する。$\mathbf{e}_I$ は $\mathcal{S}_\tau$ 上でのみ定義されており、トライアードで表現される成分は空間的な意味を持つのである。$\mathbf{n}$ とトライアードを合わせてテトラード $\mathbf{e}_a$ とし、$\mathbf{n}$ で表現される成分を時間的添字 n、$\mathbf{e}_I$ で表現されるものを空間的添字 I (or J, K, ...) とする。内積を規格直交化し、

$$g_{ab} \equiv \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{ab}. \tag{B.1}$$

各成分は、

$$e_n^\mu \equiv n^\mu = (\frac{1}{N},\ -\frac{N^i}{N}) \qquad e_{n\mu} \equiv n_\mu = (-N,\ 0,\ 0,\ 0) \qquad e_\mu^n \equiv g^{na} e_{a\mu} = -e_{n\mu} \tag{B.2}$$

$$e_I^\mu = (0,\ e_I^i) \qquad e_\mu^I = (e_k^I N^k,\ e_i^I). \tag{B.3}$$

テトラード表示と、座標基底での表示を具体的に比べれば、その有用性を簡単に知る事ができる。座標基底の表示では、任意のベクター $V^\mu = (V^0, V^i)$ の各成分の持つ時間性や空間性は、このままでは全く分からない。そこで射影操作 $V_{(n)} \equiv -n_\alpha V^\alpha = NV^0$, $V^\mu_{(\mathcal{S}_\tau)} \equiv P^\mu_\alpha V^\alpha = (0, N^i V^0 + V^i)$ を行なったのであった。一方、テトラード表示でのベクター $V^a = (V^n, V^I)$ の各成分を見ると $V^n = e^n_\alpha V^\alpha = NV^0$, $V^I = e^I_\alpha V^\alpha = e^I_i (N^i V^0 + V^i)$ であり、各々は確かに時間成分、あるいは空間成分であることが確かめられる。下つき添字に関しても同様に $V_{(\mathcal{S}_\tau)\mu} = (V_k N^k, V_i)$ に対して $V_I = e^\alpha_I V_\alpha = e^i_I V_i$ である。このように、テンサーの真に物理的な成分を見る際、テトラード表示を用いておけばあいまいさなく成分が物理的意味を持つため、有効である。

$\mathbf{e}_n$ は定義にしたがって (B.2) のように書き下せるが、$\mathbf{e}_I$ の持つ意味は何であろうか。(B.1) のように基底をとったことにより、もとの座標基底での $g_{\mu\nu}$ があらわしていた時空の計量は $\mathbf{e}_a$ におしこめられたことになる。定義より $\delta_{IJ} e^I_i e^J_j = {}^{(3)}g_{ij}$ であるので、e^I_i はすなわち ${}^{(3)}g_{ij}$ の「平方根」と思って良い。この考察より、宇宙論を記述する際には次の便利な量が定義できることに気付く。

$$\mathbf{e}^I_* \equiv \frac{\mathbf{e}^I}{\bar{a}} \qquad \mathbf{e}_{*I} \equiv \bar{a}\mathbf{e}_I. \tag{B.4}$$

つまり、一様等方な宇宙論的状況では ${}^{(3)}g_{ij} = \bar{a}^2 \gamma_{ij}$ のように膨張の効果と $\mathcal{S}_\tau$ の内的な幾何学を分けられるため、${}^{(3)}g_{ij}$ の「平方根」である $\mathbf{e}^I$ から $\bar{a}$ を抜きだした「共動的 (comoving)」なトライアードを定義するのである。

2 Geometrical Quantities

Appendix A で定義した幾何量をテトラードを用いて再表示する。

2.1 general expressions

$e^\alpha_n n_{\alpha;\beta} = n^\alpha n_{\alpha;\beta} = 0$ は恒等式である。従って、テトラード表示では常に $K_{nn} = K_{nI} = \sigma_{nn} = \sigma_{nI} = A_n = 0$ である。

- 外的曲率 **K**

$$\begin{aligned} K_{IJ} &\equiv e^\alpha_I e^\beta_J n_{\alpha;\beta} = e^i_I e^j_J \frac{1}{2N}\left(-{}^{(3)}\dot{g}_{ij} + g_{0i|j} + g_{0j|i}\right) \\ &= -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}}\delta_{IJ} - \frac{1}{2N}\left(\delta_{KJ} e^i_{*I} + \delta_{IK} e^i_{*J}\right)\dot{e}_*{}^K{}_i + \frac{1}{2N\bar{a}^2} e^i_{*I} e^j_{*J}\left(N_{i|j} + N_{j|i}\right) \end{aligned} \tag{B.5}$$

- 非等方膨張率 $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ} &\equiv -(K')_{IJ} \\ &= \left[\frac{1}{2N}\left(\delta_{KJ}e_{*I}^{i}+\delta_{IK}e_{*J}^{i}\right)-\frac{1}{3N}\delta_{IJ}e_{*K}^{i}\right]\dot{e}_{*\ i}^{K} \\ &\quad -\left[\frac{1}{2N\bar{a}^2}e_{*I}^{i}e_{*J}^{j}\left(N_{i|j}+N_{j|i}\right)-\frac{1}{3N}N_{|k}^{k}\right], \qquad \text{(B.6)}\end{aligned}$$

- 等方膨張率 θ

$$\begin{aligned}H &\equiv \frac{\theta}{3}\equiv -\frac{1}{3}\delta^{KL}K_{KL} \\ &= \frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}}+\frac{1}{3N}e_{*K}^{i}\dot{e}_{*\ i}^{K}-\frac{1}{3N}\delta_{IJ}N_{|k}^{k}, \qquad \text{(B.7)}\end{aligned}$$

- 加速度 $\mathbf{A}$

$$A_I\equiv e_I^{\alpha}n_{\alpha;\beta}n^{\beta}=\frac{1}{\bar{a}}e_{*I}^{\ i}(\ln N)_{|i}. \qquad \text{(B.8)}$$

2.2 perturbations

e_{*i}^{I} は ${}^{(3)}g_{*ij}=\gamma_{ij}+h_{ij}$ の平方根であるから、

$$e_{*i}^{I}=\bar{e}_{*i}^{I}+\frac{1}{2}h_i^I\ , \qquad e_{*I}^{i}=\bar{e}_{*I}^{i}-\frac{1}{2}h_I^i. \qquad \text{(B.9)}$$

ただし、

$$h_i^I\equiv\delta^{IK}\bar{e}_{*K}^{k}h_{ik}\ , \qquad \delta_{IJ}\bar{e}_{*i}^{I}\bar{e}_{*\,j}^{J}={}^{(3)}\bar{g}_{*ij}\equiv\gamma_{ij}. \qquad \text{(B.10)}$$

従って、$\dot{\bar{e}}_{*i}^{I}=0$ である。表記の簡便化のために座標基底の添字とテトラード の添字が混在するような量を定義したわけであるが、本来そのような量には意味はなく、物理量を計算する際には、全ての添字が同一の基底で表現されねばならない。線形量の座標表示との変換は、$\bar{\mathbf{e}}_I$ で行なうのではなく $\bar{\mathbf{e}}_{*I}$ で行なうように定義してある。

- 外的曲率 $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned}K_{IJ} &= -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}}\delta_{IJ}-\frac{1}{2\bar{N}}\bar{e}_{*I}^{i}\bar{e}_{*J}^{j}\dot{h}_{ij}+\frac{1}{2\bar{a}}\bar{e}_{*I}^{i}\bar{e}_{*J}^{j}\left(h_{0i|j}+h_{0j|i}\right) \qquad \text{(B.11)} \\ &= -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(1+\frac{1}{2}h_{00}\right)\delta_{IJ}-\frac{1}{2\bar{N}}\bar{e}_{*I}^{i}\bar{e}_{*J}^{j}\dot{h}_{ij}+\frac{1}{2\bar{a}}\bar{e}_{*I}^{i}\bar{e}_{*J}^{j}\left(h_{0i|j}+h_{0j|i}\right), \qquad \text{(B.12)}\end{aligned}$$

- 非等方膨張率 $\boldsymbol{\sigma}$

$$\sigma_{IJ} = \frac{1}{2\bar{N}} \bar{e}_{*I}^{i} \bar{e}_{*J}^{j} (\dot{h}')_{ij} - \frac{1}{2\bar{a}} \bar{e}_{*I}^{i} \bar{e}_{*J}^{j} \left[(h')_{0i|j} + (h')_{0j|i} \right], \tag{B.13}$$

- 等方膨張率 θ

$$H \equiv \frac{\theta}{3} = \frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}_k^k - \frac{1}{\bar{a}} h^{0k}{}_{|k}\right) \tag{B.14}$$

$$= \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}_k^k - \frac{1}{\bar{a}} h^{0k}{}_{|k}\right), \tag{B.15}$$

- 加速度 **A**

$$A_I = -\frac{1}{2\bar{a}} \bar{e}_{*}{}^{i}_{I} h_{00|i}. \tag{B.16}$$

付 録C　The Einstein Equations

アインシュタイン方程式は、時空の構造と時間発展を記述する一般共変的なテンソル方程式であり、時空、重力場を記述するアインシュタインテンサー (Einstein tensor) **G**、物質や放射など、重力場の源を記述するストレス – エネルギーテンサー (stress-energy tensor) **T** を用いて **G** $= 8\pi G$**T** とあらわされる。G は万有引力定数であり、ファクター $8\pi G$ は弱い重力場の近似でニュートン理論と一致するように決められている。この章では、Appendix A で述べた $3+1$ 分解の手法をアインシュタイン方程式に適用する。

1　Riemann Tensor

一般相対性理論では、重力場を時空の歪みとして記述する。従って、アインシュタインテンサーは時空の曲率をあらわすリーマンテンサー (Riemann tensor) を用いて記述する事ができる。ただし、リーマンテンサーの定義の仕方は文献によって違いがあるため、文献にあたる際極めて注意せねばならない。ここでは、Misner, Thorne & Wheeler (1973) に従って定義する。

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}, \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\nu\rho,\mu\sigma} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\mu\rho}\right), \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}\ , \qquad R \equiv R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \tag{C.3}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(g_{\alpha\rho,\nu} + g_{\nu\alpha,\rho} - g_{\nu\rho,\alpha}\right). \tag{C.4}$$

$R_{\mu\nu}$, R はそれぞれ特に、リッチテンサー (Ricci tensor), リッチスカラー (Ricci scalar) と呼ばれる。

以上の量を、メトリック (A.5) – (A.7) を用いて全て $3+1$ に分解する。(C.1) – (C.4) を

${}^{(3)}g_{ij}$ について求めたものは、全て (3) をつけて示す。

$$
\begin{aligned}
R_{ijkm} &= {}^{(3)}R_{ijkm} + (K_{ik}K_{jm} - K_{im}K_{jk}), && \text{(C.5)}\\
R_{ijkn} &\equiv n^{\alpha}R_{ijk\alpha} = K_{ik|j} - K_{jk|i}, && \text{(C.6)}\\
R_{injn} &\equiv n^{\alpha}n^{\beta}R_{i\alpha j\beta}\\
&= K_{ik}K^{k}_{j} + \frac{1}{N}N_{|ij}\\
&\quad + \left[\frac{1}{N}\dot{K}_{ij} - \frac{1}{N}\left(N^{k}K_{ij|k} + K_{ik}N^{k}_{|j} + K_{kj}N^{k}_{|i}\right)\right], && \text{(C.7)}\\
\Gamma^{i}_{jk} &= {}^{(3)}\Gamma^{i}_{jk} + \frac{N^{i}}{N}K_{jk}, && \text{(C.8)}\\
\Gamma^{0}_{0i} &= \frac{1}{N}\left(N_{,i} - N^{k}K_{ik}\right), && \text{(C.9)}\\
\Gamma^{0}_{ij} &= -\frac{1}{N}K_{ij}, && \text{(C.10)}\\
\Gamma^{i}_{j0} &= N^{i}{}_{|j} - \frac{1}{N}\left[N^{i}N_{,j} + ({}^{(3)}g^{ik}N^{2} - N^{i}N^{k})K_{kj}\right], && \text{(C.11)}\\
\Gamma^{0}_{00} &= \frac{1}{N}\left(\dot{N} + N^{k}N_{,k} - N^{k}N^{m}K_{km}\right), && \text{(C.12)}\\
\Gamma^{i}_{00} &= {}^{(3)}g^{ik}\left[\dot{N}_{k} + \frac{1}{2}(N^{2} - N^{m}N_{m})_{,k}\right] - \frac{N^{i}}{N}\left(\dot{N} + N^{k}N_{,k} - N^{k}N^{m}K_{km}\right). && \text{(C.13)}
\end{aligned}
$$

$|$ は ${}^{(3)}g_{ij}$ に関する 3 元共変微分である。また、有用な関係式として、

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \left(\ln\sqrt{-g}\right)_{,\mu} \qquad \text{(C.14)}$$

を挙げておく。(C.5), (C.6) はガウス – コダッチ方程式 (Gauss-Codazzi equation) と呼ばれている。時間微分を含む成分と、そうでない成分があるのに注目すべきである。時間微分を含む成分は、時空の時間発展を記述する方程式にあらわれる。一方、時間微分を含まない成分 (すなわち、ガウス – コダッチ方程式) は、各時刻毎に必ず成立している制限条件 (constraint condition) をあらわしている。

リッチテンサー、リッチスカラーを求める。ただし、$K \equiv {}^{(3)}\mathrm{Tr}\mathbf{K}$ である。

$$
\begin{aligned}
R_{nn} &= {}^{(3)}g^{ij}R_{injn} = \frac{1}{N}\left(\dot{K} - N^{k}K_{|k}\right) - K_{ij}K^{ij} + \frac{1}{N}{}^{(3)}\nabla^{2}N, && \text{(C.15)}\\
R_{in} &= {}^{(3)}g^{jk}R_{jikn} = -{}^{(3)}g^{jk}R_{ijkn} = K_{|i} - K^{k}_{i\,|k}, && \text{(C.16)}\\
R_{ij} &= -R_{injn} + {}^{(3)}g^{km}R_{ikjm}\\
&= {}^{(3)}R_{ij} + \left(KK_{ij} - K_{ik}K^{k}_{j}\right) - R_{injn}, && \text{(C.17)}\\
R &= -R_{nn} + {}^{(3)}g^{ij}R_{ij}
\end{aligned}
$$

$$= {}^{(3)}R + \left(K^2 - K_{ij}K^{ij}\right) - 2R_{nn}. \quad \text{(C.18)}$$

(C.15) を導く際、

$$\frac{1}{N}{}^{(3)}g^{ij}\dot{K}_{ij} = \frac{1}{N}\dot{K} - 2K_{ij}K^{ij} + 2K_{ij}N^{i|j} \quad \text{(C.19)}$$

を用いる事ができる。

2 Einstein tensor

2.1 general expressions

前節で求めたリーマンテンサーでアインシュタインテンサー $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ を $3+1$ 分解の枠組みで求めることができるが、ここでは物理的な意味がはっきりするよう Appendix A で導入した幾何量 $\sigma_{ij} \equiv -(K')_{ij}$, $3H \equiv \theta \equiv -K$ でアインシュタインテンサーを書き下す。$(K')_{ij} \equiv K_{ij} - \frac{1}{3}{}^{(3)}g_{ij}K$ である。

$$\begin{aligned}
G_{nn} &= R_{nn} + \frac{1}{2}R = 3H^2 - \sigma^2 + \frac{1}{2}{}^{(3)}R, && \text{(C.20)}\\
G_{in} &= R_{in} = \left(-2H\delta_i^k + \sigma_i^k\right)_{|k}, && \text{(C.21)}\\
\frac{1}{3}{}^{(3)}g^{ij}G_{ij} &= \frac{1}{3}{}^{(3)}g^{ij}R_{ij} - \frac{1}{2}R \\
&= -\left(2e_n\left[H\right] + 3H^2 + \sigma^2 - \frac{2}{3N}{}^{(3)}\nabla^2 N\right) - \frac{1}{6}{}^{(3)}R, && \text{(C.22)}\\
(G')^i_j &= (R')^i_j \\
&= {}^{(3)}\left(R'\right)^i_j + e_n\left[\sigma^i_j\right] + 3H\sigma^i_j + \frac{1}{N}\left(\sigma^k_j N^i_{|k} - \sigma^i_k N^k_{|i}\right) - \frac{1}{N}\left(N'\right)^{|i}{}_{|j}. && \text{(C.23)}
\end{aligned}$$

ここで、$e_n[H] \equiv n^\alpha \partial H/\partial x^\alpha = \dot{H}/N - N^k H_{,k}/N$, $\sigma^2 \equiv \sigma_{ij}\sigma^{ij}/2$ である。また、${}^{(3)}\nabla^2$ は 3 次元共変微分によるラプラシアンであり、${}^{(3)}\nabla^2 \equiv {}^{(3)}g^{ij(3)}\nabla_i{}^{(3)}\nabla_j = \gamma^{ij}/a^{2(3)}\nabla_i{}^{(3)}\nabla_j$ と、$1/a^2$ が含まれることに注意する* 。

* この定義は、文献によって異なる。Bardeen (1980), Kodama & Sasaki (1984) は、3 元共変微分を γ について定義し、ラプラシアンは $\gamma^{ij(3)}\nabla_i{}^{(3)}\nabla_j$ で定義されている。従って a を含まない。

2.2 background

一様等方宇宙で、無摂動次のアインシュタインテンサーを書き下す。

$$\begin{aligned}\bar{G}_{nn} &= 3\bar{H}^2 + 3\frac{\kappa}{\bar{a}^2}, &(C.24)\\ \bar{G}_{in} &= 0, &(C.25)\\ \frac{1}{3}{}^{(3)}\bar{g}^{ij}\bar{G}_{ij} &= -\left(\frac{2}{\bar{N}}\dot{\bar{H}} + 3\bar{H}^2\right) - \frac{\kappa}{\bar{a}^2}, &(C.26)\\ \left(\bar{G}'\right)^i_{\ j} &= 0. &(C.27)\end{aligned}$$

κ は、(A.3) で定義した 3 元スカラー曲率をあらわすパラメーターで† 、

$$\frac{\kappa}{\bar{a}^2} \equiv \frac{1}{6}{}^{(3)}\bar{R}. \quad (C.28)$$

2.3 perturbations

アインシュタインテンサーに線形摂動を加え、形式的に書き下せば

$$\begin{aligned}\delta G_{nn} &= 6\bar{H}\,(\delta H) + \frac{1}{2}\left(\delta^{(3)}R\right), &(C.29)\\ \delta G_{in} &= \left[-2(\delta H)\delta^k_i + \sigma^k_i\right]_{|k}, &(C.30)\\ \delta\left(\frac{1}{3}{}^{(3)}g^{ij}G_{ij}\right) &= -\left\{2e_n\left[(\delta H)\right] + 6\bar{H}(\delta H) - \frac{2}{3}A_k{}^{|k}\right\} - \frac{1}{6}\left(\delta^{(3)}R\right), &(C.31)\\ (\delta G')^i_j &= e_n\left[\sigma^i_j\right] + 3\bar{H}\sigma^i_j - \left(A^i{}_{|j} - \frac{1}{3}\delta^i_j A_k{}^{|k}\right) + \left(\delta^{(3)}R'\right)^i_j. &(C.32)\end{aligned}$$

各々の幾何量の摂動は、メトリックであらわすことができる。(A.32), (A.34), (A.35) より

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\bar{a}^2}{2\bar{N}}\dot{(h')}_{ij} - \frac{\bar{a}}{2}\left[(h')_{0i|j} + (h')_{0j|i}\right], &(C.33)\\ \delta H &= \bar{H}\frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^k_k - \frac{1}{\bar{a}}h^{0k}{}_{|k}\right), &(C.34)\\ A_i &= -\frac{1}{2}h_{00|i}. &(C.35)\end{aligned}$$

また、3 次元曲率テンサー ${}^{(3)}\mathbf{R}$ に摂動を与えることにより

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}R^i_{jkm} &= \delta^{(3)}\Gamma^i_{jm|k} - \delta^{(3)}\Gamma^i_{jk|m}\\ &= \frac{1}{2}\left[{}^{(3)}\nabla_k, {}^{(3)}\nabla_m\right]h^i_j + \frac{1}{2}\left(h^i_{m|jk} - h^i_{k|jm}\right) + \frac{\bar{a}^2}{2}\left(h_{jk}{}^{|i}{}_{|m} - h_{jm}{}^{|i}{}_{|k}\right). \quad (C.36)\end{aligned}$$

† Appendix A の脚注でも触れたが、Bardeen (1980), Kodama & Sasaki (1983) が用いている ${}^{(3)}R$ は γ について定義されているため、a を含まない。

$\bar{a}^2$ の違いがあらわれるのは、h_{ij} は γ_{ij} で添字を上下するのに対し、${}^{(3)}\nabla_i$ の添字は ${}^{(3)}\bar{g}_{ij} = \bar{a}^2\gamma_{ij}$ で上下するように定義したからである[‡] 。共変微分は交換しないことにも注意しなければならない。また、

$$\delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}{}^{(3)}\gamma^{il}\left(h_{lj|k} + h_{lk|j} - h_{jk|l}\right), \tag{C.37}$$

$$\left[{}^{(3)}\nabla_k, {}^{(3)}\nabla_m\right] h^i_j = {}^{(3)}\bar{R}^i_{lkm}h^l_j - {}^{(3)}\bar{R}^l_{jkm}h^i_l \tag{C.38}$$

$$= \kappa\left(\delta^i_k h_{mj} - \delta^i_m h_{kj} + \gamma_{jm}h^i_k - \gamma_{jk}h^i_m\right). \tag{C.39}$$

(C.39) は、(A.1) より導ける。(C.38) は h_{ij} がテンサーであることを暗に前提としているが、実際、h_{ij} は無摂動次のローレンツ変換に対してテンサーのようにふるまうことを示すことができる (Shutz 1988)。リッチテンサー、リッチスカラーの摂動はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \delta{}^{(3)}R^i_k &= -\frac{1}{\bar{a}^2}h^{jm}\bar{R}^i_{jkm} + \frac{1}{\bar{a}^2}\gamma^{jm}\left(\delta{}^{(3)}R^i_{jkm}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(h^{i|l}_l{}_{|k} - h^{i\,|l}_k{}_{|l} + h^{l\,|i}_k{}_{|l} - h^{l|i}_l{}_{|k}\right) - \frac{\kappa}{2\bar{a}^2}\left(\delta^i_k h^l_l + h^i_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(h^{i|l}_l{}_{|k} + h^l_{k|l}{}^{|i} - h^{i\,|l}_k{}_{|l} - h^{l|i}_l{}_{|k}\right) + \frac{\kappa}{\bar{a}^2}\left(h^i_k - \delta^i_k h^l_l\right), \end{aligned} \tag{C.40}$$

$$\delta{}^{(3)}R = h^{k|l}_l{}_{|k} - h^{k|l}_k{}_{|l} - \frac{2\kappa}{\bar{a}^2}h^k_k. \tag{C.41}$$

(C.40) は、後の計算のために共変微分の順序を入れ替えた。

3 Stress-Energy Tensor

アインシュタイン方程式の右辺は、重力場をつくっているソースを記述するストレス – エネルギーテンサー $\mathbf{T}$ である。今、ソースとして流体を考えれば

$$\mathbf{T} = \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{J}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{J} + p\mathbf{P}^{(u)} + \mathbf{\Pi}. \tag{C.42}$$

ρ, $\mathbf{J}$, p, $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{u}$ はそれぞれ、流体素片のエネルギー密度, エネルギー流束, 圧力, 非等方ストレス, 4 元速度である。$\mathbf{P}^{(u)} \equiv \mathbf{g} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ は、流体の流線に直交する面上への射影テンサーである。(C.42) を別の表現で書けば

$$\rho = u^\alpha T_{\alpha\beta}u^\beta, \tag{C.43}$$

[‡] しつこいように感じるかもしれないが、このような定義は文献によってまったく任意である。よって、文献を読む際、常にどのような定義でテンサーが扱われているかに、細心の注意を払わねばならない。この Appendix の目的はまさにそこにあり、各文献とすぐに比較できるような枠組を提供している。

$$J_\mu = -u^\alpha T_{\alpha\beta} P^{(u)\beta}{}_\mu, \tag{C.44}$$
$$pP^{(u)}_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} = P^{(u)\alpha}{}_\mu T_{\alpha\beta} P^{(u)\beta}{}_\nu. \tag{C.45}$$

T の各成分を具体的に書き下すには、流体素片の 4 元速度 **u** を選ばねばならない。今、流体素片の持つ 3 元速度 (線形オーダー) を

$$v^i \equiv \bar{a} u^i \qquad \text{小玉 (1990)}$$

のように定義する。残りの成分は **u·u** $= -1$ の条件より求まり、

$$u^\mu = \left(\frac{1}{N},\ \frac{v^i}{\bar{a}}\right), \qquad u_\mu = \left(-N,\ \bar{a}v_i + \frac{N_i}{N}\right). \tag{C.46}$$

下つき添字の v_i は、$v_i \equiv \gamma_{ik} v^k$ で定義した。メトリックの線形摂動であらわせば、

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\bar{N}}\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right),\ \frac{v^i}{\bar{a}}\right), \qquad u_\mu = \left(-\bar{N}\left(1 - \frac{1}{2}h_{00}\right),\ \bar{a}\left(v_i + h_{0i}\right)\right). \tag{C.47}$$

射影テンサーは

$$P^{(u)0}{}_0 = 0, \quad P^{(u)0}{}_i = \left(\frac{\bar{a}}{\bar{N}}\right)(v_i + h_{0i}), \quad P^{(u)i}{}_0 = -\frac{\bar{N}}{\bar{a}} v^i, \quad P^{(u)i}{}_j = \delta^i_j. \tag{C.48}$$

以上より、ストレス – エネルギーテンサーの各成分を求めれば

$$\rho = -T^0_0, \tag{C.49}$$
$$J_i = \bar{N}\left[T^0_i - \left(\frac{\bar{a}}{\bar{N}}\right)\bar{\rho}(1+w)\left(v_i + h_{0i}\right)\right], \tag{C.50}$$
$$J^i = -\frac{1}{\bar{N}}\left[T^i_0 + \bar{\rho}(1+w)\frac{\bar{N}}{\bar{a}} v^i\right], \tag{C.51}$$
$$p = \frac{1}{3}T^k_k, \tag{C.52}$$
$$\Pi^i_j = (T')^i_j. \tag{C.53}$$

w は状態方程式をあらわすパラメターであり、$w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$ と定義される。今、流体素片のエネルギーは流線 **u** に沿って運ばれており、**u** に直交する面上を流れない (熱伝導による散逸がない) とするならば、$\mathbf{J}^{(u)} = 0$ であるので[§] 、ストレス – エネルギーテンサーは

$$T^0_0 = -\left(\bar{\rho} + \delta\rho\right), \tag{C.54}$$

[§] これは流体素片として完全流体を選んだことと等価であるが、**n** に垂直な面上に射影した場合には $\mathbf{J}^{(n)} \neq 0$ である。

$$
\begin{aligned}
T_i^0 &= \left(\frac{\bar{a}}{\bar{N}}\right)\bar{\rho}(1+w)\left(v_i+h_{0i}\right), && \text{(C.55)}\\
T_0^i &= -\bar{\rho}(1+w)\frac{\bar{N}}{\bar{a}}v^i, && \text{(C.56)}\\
\frac{1}{3}T_k^k &= \bar{p}+\delta p, && \text{(C.57)}\\
(T')_j^i &= \Pi_j^i. && \text{(C.58)}
\end{aligned}
$$

また、**n** に関する成分に変換しておけば

$$
\begin{aligned}
T_n^n &= e_\alpha^n e_n^\beta T_\beta^\alpha = T_0^0 = -\left(\bar{\rho}+\delta\rho\right), && \text{(C.59)}\\
T_I^n &= e_\alpha^n e_I^\beta T_\beta^\alpha = e_I^i \bar{N} T_i^0 = e_I^i \bar{a}\bar{\rho}(1+w)\left(v_i+h_{0i}\right), && \text{(C.60)}\\
T_n^I &= -e_i^I \bar{a}\bar{\rho}(1+w)\left(v^i+h^{0i}\right), && \text{(C.61)}\\
\frac{1}{3}T_K^K &= \frac{1}{3}T_k^k = \bar{p}+\delta p, && \text{(C.62)}\\
(T')_J^I &= e_i^I e_J^j \left(T'\right)_j^i = e_i^I e_J^j \Pi_j^i. && \text{(C.63)}
\end{aligned}
$$

座標成分と異なり、(C.60), (C.61) は双方ともシフトベクターを含む。(C.61) に、(C.56) に存在しなかったシフトベクターが現われたのは、時間軸に沿う観測者から見て、流体素片は速度 $v^i + N^i$ で運動しているように見えるからである。$\mathbf{e}^I$ は (B.4) で定義したトライアード (triad) である。

4 Einstein equations

前節までの結果を用い、アインシュタイン方程式の成分を全て書き下しておく。

4.1 background equations

$$
\bar{H}^2 + \frac{\kappa}{\bar{a}^2} = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}, \tag{C.64}
$$

$$
\frac{2}{\bar{N}}\dot{\bar{H}} + 3\bar{H}^2 + \frac{\kappa}{\bar{a}^2} = -8\pi G\bar{p}. \tag{C.65}
$$

これらより 3 次元曲率の項を消去すれば、宇宙膨張の加速度をあらわす式:

$$
\frac{1}{\bar{N}}\dot{\bar{H}} + \bar{H}^2 = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}(1+3w). \tag{C.66}
$$

を得る。

4.2 perturbed equations

$$2\bar{H}\left(\delta H\right)+\frac{1}{6}\left(\delta^{(3)}R\right)=\frac{8\pi G}{3}\left(\delta\rho\right), \tag{C.67}$$

$$\left(\delta H\right)_{|i}-\frac{1}{2}\sigma^{k}_{i|k}=4\pi G\bar{a}\bar{\rho}(1+w)\left(v_i+h_{0i}\right), \tag{C.68}$$

$$e_n\left[\delta H\right]+3\bar{H}(\delta H)-\frac{1}{3}A_k{}^{|k}+\frac{1}{12}\left(\delta^{(3)}R\right)=-4\pi G\left(\delta p\right), \tag{C.69}$$

$$e_n\left[\sigma^i_j\right]+3\bar{H}\sigma^i_j-\left(A^i{}_{|j}-\frac{1}{3}\delta^i_j A_k{}^{|k}\right)+\left(\delta^{(3)}R'\right)^i_j=8\pi G\Pi^i_j. \tag{C.70}$$

(C.67), (C.69) は等方膨張率の制限条件と発展方程式を、(C.68), (C.70) は非等方膨張に対するそれを、それぞれ記述している。このように、方程式をメトリックそのものではなく、幾何的に意味のある量で書き下すことにより、ストレス – エネルギーテンサーの各成分が重力場のどの部分に寄与するかが、明らかとなる。

(C.67), (C.69) より 3 次元曲率の項を消去すれば

$$e_n\left[\delta H\right]+2\bar{H}\left(\delta H\right)-\frac{1}{3}A_k{}^{|k}=-\frac{4\pi G}{3}\left[(\delta\rho)+3(\delta p)\right]. \tag{C.71}$$

付 録D　Gauge

1　Gauge Transformation

アインシュタイン方程式は、任意の座標系をとることが可能である。従って、問題を解くのに最も適した座標系を用いることで計算の見通しを良くしたり、計算効率を上げることができる。しかし、一方で座標変換の任意性は、何が一体物理的な結果であって何が座標に依存した非物理的な結果であるのかをあいまいにする困難を含んでいる。そのような座標変換の中で、特に良く知られているのが「ゲージ変換」である。

ゲージ変換とは、座標 $\{x^\mu\}$ に対する微小変換 $\xi \ll 1$:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{D.1}$$

の意味で使われている言葉である* 。座標に依存するスカラー, ベクター, テンサーはそれぞれ座標変換によって変換を受けてその関数形を変える事になるが、アインシュタイン方程式は **G** の変換によって生じた項と **T** の変換が相殺しあうため座標変換に対して不変であり、これが任意の座標変換を許すのである。

ゲージ変換が問題にされるのは、特に摂動解析においてである。例えば、メトリックに対する座標変換:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \approx g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha_{,\mu} g_{\alpha\nu}(x) - \xi^\beta_{,\nu} g_{\mu\beta}(x)$$

を考える。ここで、混乱を防ぐため特に記号に注意をはらい、ダッシュは「座標系の変換」を、チルダーは「関数形の変化」を示している。メトリックに線形摂動 $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ を与えれば

$$\begin{aligned} & \tilde{\bar{g}}_{\mu\nu}(x') + \widetilde{\delta g}_{\mu\nu}(x') \\ \approx\ & \tilde{\bar{g}}_{\mu\nu}(x) + \xi^\alpha \tilde{\bar{g}}_{\mu\nu,\alpha}(x) + \widetilde{\delta g}_{\mu\nu}(x') = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha_{,\mu}\bar{g}_{\alpha\nu}(x) - \xi^\alpha_{,\nu}\bar{g}_{\mu\alpha}(x). \end{aligned} \tag{D.2}$$

* Weinberg (1972) では $x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$. (Weinberg 1972, pp.291)

対応するオーダーをとれば

$$\tilde{\bar{g}}_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x), \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta g}_{\mu\nu}(x') &= \delta g_{\mu\nu}(x) - \xi^{\alpha}_{,\mu} g_{\alpha\nu}(x) - \xi^{\alpha}_{,\nu} g_{\mu\alpha}(x) - \xi^{\alpha} \tilde{\bar{g}}_{\mu\nu,\alpha}(x) \\ &= \delta g_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}.\end{aligned} \tag{D.4}$$

; は 4 元共変微分である。すなわち、非摂動次はゲージ変換で「関数形」を変えないが、摂動次は ξ によって「関数形」が変化してしまうことになる。新たに加わった ξ も摂動として作用するため、任意のゲージ変換は無限個の可能な摂動のパターンをつくる事ができ、摂動の物理的なモードを同定することが難しくなってしまうのである。

1.1 Lie derivative

ゲージ変換による関数形の変化は、違った視点から定式化することが可能である (Weinberg 1972, pp.291)。そのための数学的準備として、リー微分 (Lie derivative) を定義する。

一般相対論は、曲がった時空の幾何学である。曲がった時空では異なる 2 つの時空点で定義されたテンサーの和および差を定義することはできないため、片方をもう片方と同じ時空点まで平行移動し、同一時空点において比較せねばならない。平行移動の方法は用途に応じていくつかあるが、ここではそのうちの一つである「リー移動 (Lie dragging)」をとりあげる。

まず、時空上の異なる 2 点 A, B を考える。AB 間をパラメター λ で表されるなめらかな曲線 $\mathbf{x}(\lambda)$ で結び、曲線上の接ベクター $\boldsymbol{\xi} \equiv d\mathbf{x}/d\lambda$ を定義する。今、AB 間は微小間隔 $\delta\lambda$ だけ離れているとすると、A, B の座標はそれぞれ $\mathbf{x}_A \equiv \mathbf{x}(\lambda_0)$, $\mathbf{x}_B \equiv \mathbf{x}(\lambda_0+\delta\lambda) = \mathbf{x}_A + \boldsymbol{\xi}\delta\lambda + O(\delta\lambda^2)$ となる。

今、時空点の関数であるベクター $\mathbf{V}(x)$ を考える。$\mathbf{V}(x_A)$ と $\mathbf{V}(x_B)$ の差を測るためには同一時空点で両者を比較せねばならないため、$\mathbf{V}(x_B)$ を x_A まで平行移動させたものを $\tilde{\mathbf{V}}(x_A)$ とする。この平行移動によって関数形は変化するはずであり、従ってチルダーを付与した。

リー移動は、$\tilde{\mathbf{V}}(x_A)$ と $\mathbf{V}(x_A)$ の差を以下のように与える。

$$\tilde{\mathbf{V}}(x_A) - \mathbf{V}(x_A) = \{(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\xi}\}|_A\,\delta\lambda \equiv [\boldsymbol{\xi}, \mathbf{V}]\,\delta\lambda \tag{D.5}$$

ここで $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ は「リー括弧」と呼ばれている。リー括弧がゼロであれば、$\mathbf{V}(x_A)$ と $\mathbf{V}(x_B)$ は互いにリー移動の関係、すなわち平行という事になる。

これで、異なる時空点にあるベクター $\mathbf{V}$ をリー移動によって移動し、同一時空点で比較できるようになった。これをリー微分 (Lie derivative) と定義し、成分で書けば

$$\mathcal{L}_\xi V^\mu(x) \equiv \lim_{\delta\lambda\to 0} \frac{\tilde{V}^\mu(x) - V^\mu(x)}{\delta\lambda} = \xi^\alpha V^\mu_{;\alpha} - V^\alpha \xi^\mu_{;\alpha}. \tag{D.6}$$

リー微分の意味はすなわち、「微小変換 ξ によって生じた『関数形』の変化の、同一時空点における比較」ということになる。ベクター以外のものについても同様な議論の結果、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi \Psi &= \xi^\alpha \Psi_{,\alpha}, & \text{(D.7)}\\
\mathcal{L}_\xi V_\mu &= \xi^\alpha V_{\mu;\alpha} + V_\alpha \xi^\alpha_{;\mu}, & \text{(D.8)}\\
\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} &= \xi^\alpha T_{\mu\nu;\alpha} + T_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{;\nu} + T_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{;\mu}, & \text{(D.9)}\\
\mathcal{L}_\xi T^\mu_\nu &= \xi^\alpha T^\mu_{\nu;\alpha} - T^\alpha_\nu \xi^\mu_{;\alpha} + T^\mu_\alpha \xi^\alpha_{;\nu}, & \text{(D.10)}\\
\mathcal{L}_\xi T^{\mu\nu} &= \xi^\alpha T^{\mu\nu}_{;\alpha} - T^{\alpha\nu}\xi^\mu_{;\alpha} - T^{\mu\alpha}\xi^\nu_{;\alpha}. & \text{(D.11)}
\end{aligned}$$

を得る。規則は「上つきはマイナス, 下つきはプラス」である。共変微分の規則とは逆であるから気をつける。また、リー微分の中の共変微分は、全て偏微分にすることができる(もちろんその逆も可能)。ここで、(D.9) と (D.4) の類似性に気付くであろうか[†] 。事実、線形摂動量のゲージ変換 $x \to x' = x + \xi$: $\delta Q(x) \to \widetilde{\delta Q}(x')$ に対して常に

$$-\mathcal{L}_\xi \bar{Q}(x) = \widetilde{\delta Q}(x') - \delta Q(x) \tag{D.12}$$

である。線形摂動量の、ゲージ変換による「関数形の変化」は、すなわちリー微分なのである。注意せねばならないが、$\widetilde{\delta Q}(x')$ と $\delta Q(x)$ は同一時空点の量であり、x, x' は、単なる座標の張りかえである。

(D.12) を証明することは重要である。例として、再びベクターを考える。

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta Q}^\mu(x') - \delta Q^\mu(x) &= \left[\tilde{Q}^\mu(x') - \bar{Q}^\mu(x')\right] - \left[Q^\mu(x) - \bar{Q}^\mu(x)\right]\\
&= \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} Q^\alpha(x) - \bar{Q}^\mu(x) - \xi^\alpha \bar{Q}^\mu_{,\alpha}\right] - \left[Q^\mu(x) - \bar{Q}^\mu(x)\right] & \text{(D.13)}\\
&= Q^\alpha \xi^\mu_{,\alpha} - \xi^\alpha \bar{Q}^\mu_{,\alpha} = -\mathcal{L}_\xi \bar{Q}(x). & \text{(D.14)}
\end{aligned}$$

(D.13) の座標変換はゲージ変換であってリー移動ではない。(D.14) が意味するところは何であろうか。摂動を受けた時空で摂動量を定義する際には、無摂動時空において対応する

[†] メトリックの共変微分は、常にゼロである。$g_{\mu\nu;\alpha} \equiv 0$.

ものとの比較 (および差) で定義する。しかし、この対応関係はゲージに依存するのである。言いかえれば、摂動時空で同一点だと思っていた点は、ゲージ変換後、対応する無摂動時空において必ずしも同一点ではないため、リー微分によって差をとらねばならないのである。

1.2 gauge transformation: metric perturbations

メトリックの線形摂動 (A.23) をゲージ変換する。処方箋は、リー微分 $\mathcal{L}_\xi \bar{g}$ を求め、$\widetilde{\delta g} = \delta g - \mathcal{L}_\xi \bar{g}$ に代入するだけである。

$$\tilde{h}_{00} = h_{00} + \frac{2}{\bar{N}} \left(\bar{N} \xi^0 \right)^{\cdot}, \tag{D.15}$$

$$\tilde{h}_{0i} = h_{0i} + \frac{\bar{N}}{\bar{a}} \xi^0_{|i} - \frac{\bar{a}}{\bar{N}} \dot{\xi}_i, \tag{D.16}$$

$$\frac{1}{3} \tilde{h}^k_k = \frac{1}{3} h^k_k - 2 \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} \xi^0 - \frac{2}{3} \xi^k_{|k}, \tag{D.17}$$

$$\left(\tilde{h}' \right)_{ij} = (h')_{ij} - (\xi')_{i|j} - (\xi')_{j|i}. \tag{D.18}$$

線形量である ξ^i の添字は、h_{ij} と同様に宇宙膨張を抜いた 3 次元メトリック $\gamma_{ij} \equiv {}^{(3)}\bar{g}_{ij}/\bar{a}^2$ で上下するように定義した。$\xi_i \equiv \gamma_{ik} \xi^k$。また、$(h')_{ij} \equiv h_{ij} - \gamma_{ij} h^k_k / 3$ である。

1.3 gauge transformation: stress-energy perturbations

ストレス – エネルギーテンサーも同様にゲージ変換を行なうことができる。リー微分は (D.10) で行ない、摂動量 (C.54) – (C.58) を変換すれば

$$\widetilde{\delta\rho} = \delta\rho - \dot{\bar{\rho}} \xi^0, \tag{D.19}$$

$$\tilde{v}^i = v^i + \frac{\bar{a}}{\bar{N}} \dot{\xi}^i, \tag{D.20}$$

$$\widetilde{\delta p} = \delta p - \dot{\bar{p}} \xi^0, \tag{D.21}$$

$$\tilde{\Pi}^i_j = \Pi^i_j. \tag{D.22}$$

Π^i_j は、ゲージ変換でその「関数形」を変えず、従って「ゲージ不変 (gauge invariant)」と呼ばれる。

1.4 gauge invariance

ゲージ自由度は、宇宙論的な摂動論を展開する際、常に問題であった。なぜならば、ゲージ自由度が問題となるのは一般相対論的取り扱いが必要な場合であり、ホライズンを超えるようなスケールの摂動の進化を追う場合には避けては通れない問題だからである。ゲージ自由度が適切に扱われないと物理的でない摂動のモードがあらわれてしまい、物理的解釈に混乱を招く。このような困難を回避するため、1980 年に Bardeen (Bardeen 1980) によってゲージ不変 (gauge invariant) 摂動論が提唱された。これは、いかなる ξ のゲージ変換に対しても摂動量の関数形が不変に保たれるようなセットを選びだし、それを物理的なものとして扱う手法である。

「ゲージ不変」であるとはすなわち、$x \rightarrow x' = x + \xi$ に対し摂動量 δQ が「関数形を変えない」、すなわち (D.12) より

$$-\mathcal{L}_\xi \bar{Q}(x) = \widetilde{\delta Q}^\mu(x') - \delta Q^\mu(x) = 0 \tag{D.23}$$

を満たす、ということである。

2 Family of Perturbations

摂動はスカラー (S), ベクター (V), テンサー (T) モードに一意に分けることができ、微分演算子に対する各々の性質はモード関数 (ラプラシアンの固有関数) Q [‡] によって特徴づけることができる。この節で定義する摂動量の記法は基本的に Bardeen (1980) に沿っているが、他の文献との比較が容易なように Appendix J に対応表をのせておく。

- メトリック

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\bar{N}^2 \left[1 - h_{00}^{(S)}\right] d\tau^2 \\ &\quad +2\bar{N}\bar{a} \left[h_{0i}^{(S)} + h_{0i}^{(V)}\right] d\tau dx^i \\ &\quad +\bar{a}^2 \left[\gamma_{ij} + h_{ij}^{(S)} + h_{ij}^{(V)} + h_{ij}^{(T)}\right] dx^i dx^j. \end{aligned} \tag{D.24}$$

- ストレス – エネルギーテンサー

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho^{(S)} = \bar{\rho}\left(1 + \delta^{(S)}\right), \tag{D.25}$$

‡ Kodama & Sasaki (1984) では Y。

$$p = \bar{p} + \delta p^{(S)}, \tag{D.26}$$
$$v_i = v_i^{(S)} + v_i^{(V)}, \tag{D.27}$$
$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(S)} + \Pi_{ij}^{(V)} + \Pi_{ij}^{(T)}. \tag{D.28}$$

- ゲージ変換

$$\xi^0 = \xi^{0(S)}, \tag{D.29}$$
$$\xi_i = \xi_i^{(S)} + \xi_i^{(V)}. \tag{D.30}$$

2.1 scalar mode

- モード関数

$$^{(3)}\nabla_*^2 Q^{(0)} = -k^2 Q^{(0)}, \tag{D.31}$$
$$Q_i^{(0)} = -\frac{1}{k}{}^{(3)}\nabla_{*i} Q^{(0)}, \tag{D.32}$$
$$Q_{ij}^{(0)} = \left(\frac{1}{k^2}{}^{(3)}\nabla_{*i}{}^{(3)}\nabla_{*j} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}\right) Q^{(0)}. \tag{D.33}$$

k は摂動をフーリエ展開したときの共動波数 (comoving wavenumber) であり、$*$ のついた $^{(3)}\nabla_*$ は全て一様等方膨張 $\bar{a}$ を抜いて定義された 3 元共変微分演算子である[§]。具体的に書けば、

$$^{(3)}\nabla_{*i} = {}^{(3)}\nabla_i, \tag{D.34}$$
$$^{(3)}\nabla_*^i = \bar{a}^{2\,(3)}\nabla^i = \gamma^{ik\,(3)}\nabla_k, \tag{D.35}$$
$$^{(3)}\nabla_*^2 = \bar{a}^{2\,(3)}\nabla^2 = \gamma^{ij\,(3)}\nabla_i{}^{(3)}\nabla_j. \tag{D.36}$$

また、$Q_i^{(0)}$, $Q_{ij}^{(0)}$ の微分は

$$Q_k^{(0)|k} = \frac{k}{\bar{a}^2} Q^{(0)}, \tag{D.37}$$
$$Q_i^{(0)|k}{}_{|k} = -\frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 - 2\kappa\right) Q_i^{(0)}, \tag{D.38}$$
$$Q_{ik}^{(0)|k} = \frac{2}{3\bar{a}^2} k^{-1}\left(k^2 - 3\kappa\right) Q_i^{(0)}, \tag{D.39}$$
$$Q_{ik}^{(0)|k}{}_{|j} = -\frac{2}{3\bar{a}^2}\left(k^2 - 3\kappa\right)\left(Q_{ij}^{(0)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij} Q^{(0)}\right), \tag{D.40}$$
$$Q_{ij}^{(0)|k}{}_{|k} = -\frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 - 6\kappa\right) Q_{ij}^{(0)}. \tag{D.41}$$

[§] 従って Q は、Bardeen (1980) の Q、Kodama & Sasaki (1984) の Y と同じ定義である。

$\bar{a}^{-2}$ は、上付き添字の共変微分に含まれているものである。∇_* に関する微分であれば $\bar{a}^{-2}$ は必要ない[¶] 。

- ゲージ変換

$$\xi^{0(S)} = TQ^{(0)}, \tag{D.42}$$
$$\xi_i^{(S)} = L^{(0)}Q_i^{(0)}. \tag{D.43}$$

- メトリック
  - 定義

$$h_{00}^{(S)} = -2AQ^{(0)}, \tag{D.44}$$
$$h_{0i}^{(S)} = -B^{(0)}Q_i^{(0)}, \tag{D.45}$$
$$h_{ij}^{(S)} = 2H_L Q^{(0)}\gamma_{ij} + 2H_T^{(0)}Q_{ij}^{(0)}. \tag{D.46}$$

  - ゲージ変換性

$$\tilde{A} = A - \frac{\dot{\bar{N}}}{\bar{N}}T - \dot{T}, \tag{D.47}$$
$$\tilde{B}^{(0)} = B^{(0)} + k\frac{\bar{N}}{\bar{a}}T + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\dot{L}^{(0)}, \tag{D.48}$$
$$\tilde{H}_L = H_L - \bar{N}\bar{H}T - \frac{k}{3}L^{(0)}, \tag{D.49}$$
$$\tilde{H}_T^{(0)} = H_T^{(0)} + kL^{(0)}. \tag{D.50}$$

- 幾何量
  - 定義[‖]

$$\mathcal{K}_g \equiv -A + \frac{1}{\bar{N}\bar{H}}\dot{H}_L + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)B^{(0)}, \tag{D.51}$$
$$\sigma_g^{(0)} \equiv -B^{(0)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\frac{\dot{H}_T^{(0)}}{k}, \tag{D.52}$$
$$\mathcal{R} \equiv H_L + \frac{1}{3}H_T^{(0)}. \tag{D.53}$$

¶ Kodama & Sasaki (1984) と比較のこと。

‖ 添字の上下に注意する。幾何量はフルのメトリック $^{(3)}g$ で上下させるが、モード関数は γ で上下するように定義している。

それぞれのテンサーとの対応は、

$$\begin{aligned}
\delta H &= \bar{H}\mathcal{K}_g Q^{(0)}, &\text{(D.54)}\\
\sigma_{ij}^{(S)} &= \bar{a}k\sigma_g^{(0)}Q_{ij}^{(0)}, &\text{(D.55)}\\
\sigma^{(S)i}{}_j &= \frac{k}{\bar{a}}\sigma_g^{(0)}Q^{(0)i}{}_j, &\text{(D.56)}\\
A_i &= -kAQ_i^{(0)}, &\text{(D.57)}\\
\left(\delta^{(3)}R'\right)_{ij}^{(S)} &= -k^2\mathcal{R}Q_{ij}^{(0)}, &\text{(D.58)}\\
\left(\delta^{(3)}R'\right)^{(S)i}{}_j &= -\left(\frac{k}{\bar{a}}\right)^2\mathcal{R}Q^{(0)i}{}_j, &\text{(D.59)}\\
\delta^{(3)}R &= \frac{4}{\bar{a}^2}\left(k^2-3\kappa\right)\mathcal{R}Q^{(0)}. &\text{(D.60)}
\end{aligned}$$

– ゲージ変換性

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{K}}_g &= \mathcal{K}_g - \frac{\dot{\bar{H}}}{\bar{H}}T + \frac{\bar{N}}{3\bar{H}}\left(\frac{k}{\bar{a}}\right)^2 T, &\text{(D.61)}\\
\tilde{\sigma}_g^{(0)} &= \sigma_g^{(0)} - \frac{\bar{N}}{\bar{a}}kT, &\text{(D.62)}\\
\tilde{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} - \bar{N}\bar{H}T. &\text{(D.63)}
\end{aligned}$$

$\mathcal{K}_g$ は等方膨張率の摂動の大きさを、σ_g は非等方膨張率のポテンシャルを、それぞれあらわしている。また、A はそのまま加速度 A_i のポテンシャルとなっており、$h_{00}^{(S)}$ は単独で「超曲面 $\mathcal{S}_\tau$ 上の加速度をになうポテンシャル」という物理的な意味を持っている。$\mathcal{R}$ は内的曲率 (intrinsic curvature) のゆらぎのポテンシャルである。このように、メトリック摂動は単独で物理的意味を持たず、あるコンビネーションで幾何学的/物理的な意味を持っているのである。従って、摂動方程式もメトリックそのもので書くのではなく、これらの幾何学的諸量で書くことによって見通しが良くなるし、間違いも犯しにくい。

- ストレス – エネルギーテンサー

  – 定義

$$\begin{aligned}
\delta^{(S)} &= \sum_f \delta_f Q^{(0)}, &\text{(D.64)}\\
v_i^{(S)} &= \sum_f v_f^{(0)}Q_i^{(0)}, &\text{(D.65)}
\end{aligned}$$

$$\delta p^{(S)} = \sum_f \delta p_f Q^{(0)}, \tag{D.66}$$

$$\Pi^{(S)i}{}_j = \sum_f \bar{p}_f \pi_f^{(0)} Q^{(0)i}{}_j. \tag{D.67}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{\delta}_f = \delta_f - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} T, \tag{D.68}$$

$$\tilde{\delta} = \delta + 3(1+w)\bar{N}\bar{H}T, \tag{D.69}$$

$$\tilde{v}_f^{(0)} = v_f^{(0)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}} \dot{L}^{(0)}, \tag{D.70}$$

$$\widetilde{\delta p}_f = \delta p_f - \dot{\bar{p}}_f T, \tag{D.71}$$

$$\tilde{\pi}_f^{(0)} = \pi_f^{(0)}. \tag{D.72}$$

2.2 vector mode

- モード関数

$$^{(3)}\nabla_*^2 Q_i^{(1)} = -k^2 Q_i^{(1)}, \tag{D.73}$$

$$^{(3)}\nabla_*^i Q_i^{(1)} = 0, \tag{D.74}$$

$$Q_{ij}^{(1)} = -\frac{1}{2k}\left(\nabla_{*i} Q_j^{(1)} + \nabla_{*j} Q_i^{(1)}\right). \tag{D.75}$$

$$Q_{ik}^{(1)|k} = \frac{1}{2\bar{a}^2} k^{-1}\left(k^2 - 2\kappa\right) Q_i^{(1)}, \tag{D.76}$$

$$Q_{ik}^{(1)|k}{}_{|j} + Q_{jk}^{(1)|k}{}_{|i} = -\frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 - 2\kappa\right) Q_{ij}^{(1)}, \tag{D.77}$$

$$Q_{ij}^{(1)|k}{}_{|k} = -\frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 - 4\kappa\right) Q_{ij}^{(1)}. \tag{D.78}$$

- ゲージ変換

$$\xi_i^{(V)} = L^{(1)} Q_i^{(1)}. \tag{D.79}$$

- メトリック

  – 定義

$$h_{0i}^{(V)} = -B^{(1)} Q_i^{(1)}, \tag{D.80}$$

$$h_{ij}^{(V)} = 2H_T^{(1)} Q_{ij}^{(1)}. \tag{D.81}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{B}^{(1)} = B^{(1)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\dot{L}^{(1)}, \tag{D.82}$$

$$\tilde{H}_T^{(1)} = H_T^{(1)} + kL^{(1)}. \tag{D.83}$$

- 幾何量

– 定義

$$\sigma_g^{(1)} \equiv -B^{(1)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\frac{\dot{H}_T^{(1)}}{k}. \tag{D.84}$$

$$\sigma_{ij}^{(V)} = \bar{a}k\sigma_g^{(1)}Q_{ij}^{(1)}, \tag{D.85}$$

$$\sigma^{(V)i}{}_j = \frac{k}{\bar{a}}\sigma_g^{(1)}Q^{(1)i}{}_j, \tag{D.86}$$

$$\delta^{(3)}R^{(V)i}{}_j = 0. \tag{D.87}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{\sigma}_g^{(1)} = \sigma_g^{(1)}. \tag{D.88}$$

従って、ベクターモードの非等方膨張率のポテンシャル $\sigma_g^{(1)}$ はゲージ不変である。ベクターモードでは、$\delta^{(3)}R^i_j$ は消える。

- ストレス – エネルギーテンサー

– 定義

$$v_i^{(V)} = \sum_f v_f^{(1)}Q_i^{(1)}, \tag{D.89}$$

$$\Pi^{(V)i}{}_j = \sum_f \bar{p}_f\pi_f^{(1)}Q^{(1)i}{}_j. \tag{D.90}$$

– ゲージ変換性

$$\tilde{v}_f^{(1)} = v_f^{(1)} + \frac{\bar{a}}{\bar{N}}\dot{L}^{(1)}, \tag{D.91}$$

$$\tilde{\pi}_f^{(1)} = \pi_f^{(1)}. \tag{D.92}$$

2.3 tensor mode

- モード関数

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}\nabla_*^2 Q_{ij}^{(2)} &= -k^2 Q_{ij}^{(2)}, && \text{(D.93)}\\
\gamma^{ij} Q_{ij}^{(2)} &= {}^{(3)}\nabla_*^i Q_{ij}^{(2)} = 0. && \text{(D.94)}
\end{aligned}
$$

- メトリック

$$
h_{ij}^{(T)} = 2H_T^{(2)} Q_{ij}^{(2)}. \qquad \text{(D.95)}
$$

- 幾何量

$$
\sigma_g^{(2)} \equiv \frac{\bar{a}}{\bar{N}} \frac{\dot{H}_T^{(2)}}{k}. \qquad \text{(D.96)}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(T)} &= \bar{a} k \sigma_g^{(2)} Q_{ij}^{(2)}, && \text{(D.97)}\\
\sigma^{(T)i}{}_j &= \frac{k}{\bar{a}} \sigma_g^{(2)} Q^{(2)i}{}_j, && \text{(D.98)}\\
\delta^{(3)} R_{ij}^{(T)} &= \left(k^2 + 2\kappa\right) H_T^{(2)} Q_{ij}^{(2)}, && \text{(D.99)}\\
\delta^{(3)} R^{(T)i}{}_j &= \frac{1}{\bar{a}^2} \left(k^2 + 2\kappa\right) H_T^{(2)} Q^{(2)i}{}_j, && \text{(D.100)}
\end{aligned}
$$

ゲージ変換に 2 階のテンサーの成分は存在しないため、$H_T^{(2)}$ は自動的にゲージ不変であり、従って $\sigma_g^{(2)}$ もゲージ不変である。

- ストレス – エネルギーテンサー
  - 定義

$$
\Pi^{(T)i}{}_j = \sum_f \bar{p}_f \pi_f^{(2)} Q^{(2)i}{}_j. \qquad \text{(D.101)}
$$

  - ゲージ変換性

$$
\tilde{\pi}_f^{(2)} = \pi_f^{(2)}. \qquad \text{(D.102)}
$$

付 録E　Gauge Invariant Perturbations

アインシュタイン方程式、物質の運動方程式を、スカラー, ベクター, テンサーモードそれぞれについてゲージ不変量で書き下す。ここでのゲージ不変量の表記と他の文献との対応は、Appendix J を参照のこと。

1　Equations of Motion

ストレス – エネルギーテンサーの発散 $T^{\alpha}_{\beta;\alpha}=0$ をとることにより、重力場の源に対する運動方程式が導かれる。ただし、この節で導く運動方程式は、源の組成同士 (物質と光子など) の相互作用による、エネルギーや運動量のやりとりは一切考慮されていない。$T^{\alpha}_{\beta;\alpha}=0$ は保存則であり、全体としての収支しか記述していない。

1.1　continuity equation

$T^{\alpha}_{0;\alpha}=0$ より、エネルギー密度の保存則、「連続の式 (continuity equation)」が導かれる。状態方程式をあらわすパラメターを $w\equiv\bar{p}/\bar{\rho}$ として、

- 無摂動次

$$\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}=-3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}(1+w). \tag{E.1}$$

従って無摂動次の解は、$\bar{\rho}\propto\bar{a}^{-3(1+w)}$ である。

- 線形摂動次

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\delta}=-(1+w)\left(\frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}^{k}_{k}+\frac{1}{\bar{a}}v^{k}{}_{|k}\right)-3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}(\delta w). \tag{E.2}$$

ここで、

$$\delta w\equiv w\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}-\delta\right)=\left(\frac{\delta p}{\delta\rho}-w\right)\delta \tag{E.3}$$

はエントロピーゆらぎ (entropy fluctuation) である。複数の種類の流体が存在し、各々の状態方程式が異なる場合、エントロピーゆらぎが生成される。特に $\delta w = 0$ のケースを、断熱ゆらぎ (adiabatic fluctuation) と呼ぶ。

1.2 Euler equation

$T^{\alpha}_{i;\alpha} = 0$ より、運動量の保存則、「オイラーの式 (Euler equation)」 が導かれる。

- 線形摂動次

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_{ci} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(c_s^2 - \frac{1}{3}\right)V_{ci} - \frac{1}{\bar{a}}A_i - \frac{1}{\bar{a}}\frac{w}{1+w}\left[\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right)_{,i} + \frac{1}{\bar{p}}\Pi^k_{i|k}\right]. \tag{E.4}$$

無摂動次は存在しない。ここで、V_c は時間軸 $\mathbf{n}$ から見た流体素片の相対速度であり、

$$V_{ci} \equiv v_i + \frac{1}{\bar{a}}\frac{N_i}{\bar{N}} = v_i + h_{0i}. \tag{E.5}$$

c_s^2 は音速で、$c_s^2 \equiv \dot{\bar{p}}/\dot{\bar{\rho}}$ と定義される。式を見やすくするため共形時間を採用すれば* 、$\bar{N} = \bar{a}$ より

$$\dot{V}_{ci} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\left(c_s^2 - \frac{1}{3}\right)V_{ci} - A_i - \frac{w}{1+w}\left[\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right)_{,i} + \frac{1}{\bar{p}}\Pi^k_{i|k}\right]. \tag{E.6}$$

オイラーの式は、ダスト流体 $(w = 0)$, 光子流体 $(w = 1/3)$ の時、特徴的なふるまいを知ることができる。

- ダスト: $c_s^2 = 0$

$$\dot{V}_{ci} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}V_{ci} - A_i. \tag{E.7}$$

  従って、宇宙膨張とともに速度は $V_{ci} \propto \bar{a}^{-1}$ と落ちる。圧力やストレスの寄与も存在しない。

- 光子: $c_s^2 = 1/3$

$$\dot{V}_{ci} = -A_i - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right)_{,i} + \frac{1}{\bar{p}}\Pi^k_{i|k}\right]. \tag{E.8}$$

  宇宙膨張の効果は存在しない。光子のエネルギーは赤方偏移をうけて $\propto \bar{a}^{-1}$ で落ちるが、V_{ci} は双極的な温度ゆらぎをあらわしており、宇宙膨張の効果とは無関係なのである。

---

* このように、必要に応じてラプス関数を選べるように定式化を行なった。多くの文献では始めから $\bar{N} = \bar{a}$ として計算を行なっているが、場合によっては $\bar{N} = 1$ と選ぶこともある。(小玉 1991, pp.150; Takada 1998)

2　Scalar-Mode Equations

2.1　Poisson equation

アインシュタイン方程式の $n-n$ 成分 (C.67), $n-i$ 成分 (C.68) を、モード関数 $Q^{(0)}$ で展開した後 δH の項を消去すれば

$$\left(k^2-3\kappa\right)\left[\mathcal{R}-\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\sigma_g^{(0)}\right]=4\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}\left[\delta+3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)\left(v^{(0)}-B^{(0)}\right)\right]. \quad \text{(E.9)}$$

ハッブルホライズンよりも十分小さい極限 $(k/\bar{a}\bar{H}\gg 1)$ では、

$$k^2\mathcal{R}=4\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}\delta. \quad \text{(E.10)}$$

このような極限では一般相対論的な効果は無視でき、ニュートン理論の結果と一致するはずである。従って、(E.10) はポアソン方程式であり、$\mathcal{R}$ をニュートンポテンシャルと同定することができる。

さらに (E.9) の構造を詳しく調べる。左辺の [ ] をそっくり

$$\Phi_H\equiv\mathcal{R}-\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\sigma_g^{(0)} \quad \text{(E.11)}$$

と定義する。これは、ゲージ不変量である。(D.62), (D.63) より、たやすく $\tilde{\Phi}_H=\Phi_H$ を確かめることができる。同様に、右辺の [ ] の中をそっくり

$$\epsilon_m\equiv\delta+3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)\left(v^{(0)}-B^{(0)}\right) \quad \text{(E.12)}$$

と定義すれば、(D.48), (D.69), (D.70) より $\tilde{\epsilon}=\epsilon$ が導け、これもゲージ不変であることが分かる。従って、

$$\left(k^2-3\kappa\right)\Phi_H=4\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}\epsilon_m \quad \text{(E.13)}$$

という、ニュートン理論でのポアソン方程式に「類似した」方程式が得られる。括弧の中が全てゲージ不変量であったことは、実は偶然ではない。そもそもアインシュタイン方程式はゲージ不変な方程式であり、このことがゲージ自由度を許していたのである。従って、方程式は必ず何らかのゲージ不変量の組合せで書くことができる。問題は、いかにしてゲージ不変量に物理的な意味を持たせるか、ということである。例えば今の場合であれば、

- *Newtonian slicing*: $\sigma_g^{(0)}=0$
  $\Phi_H\longrightarrow$ ニュートンポテンシャル

- *Velocity-orthogonal slicing*: $v^{(0)} = B^{(0)}$
  $\epsilon_m \longrightarrow$ 密度ゆらぎ

ただし、ハッブホライズンよりも十分小さいスケールでは、(E.11), (E.12) は自然にニュートンポテンシャル、密度ゆらぎに帰着する。

2.2 dynamical equation

トレースレスパート (C.70) のモード関数展開より

$$k^2 \left\{ \left[\mathcal{R} - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}} \right)^{-1} \sigma_g^{(0)} \right] + \left[A - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}} \right)^{-1} \left(\sigma_g^{(0)} + \frac{1}{\bar{N}\bar{H}} \dot{\sigma}_g \right) \right] \right\} = -8\pi G \bar{a}^2 \bar{p} \pi^{(0)}. \quad \text{(E.14)}$$

作為的な書き換えであるが、(E.11) においてゲージ不変量 Φ_H を見つけていることと、$\pi^{(0)}$ のゲージ不変性、さらに方程式全体のゲージ不変性より、[ ] 内は全てゲージ不変でなければならないのである。従って、

$$\Phi_A \equiv A - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}} \right)^{-1} \left(\sigma_g^{(0)} + \frac{1}{\bar{N}\bar{H}} \dot{\sigma}_g \right) \quad \text{(E.15)}$$

を定義でき、

$$k^2 \left(\Phi_H + \Phi_A \right) = -8\pi G \bar{a}^2 \bar{p} \pi^{(0)}. \quad \text{(E.16)}$$

A は (D.57) より、超曲面上の加速度のポテンシャルである。従って、

- *Newtonian slicing*: $\sigma_g^{(0)} = 0$
  $\Phi_A \longrightarrow$ 加速度のポテンシャル

と言える。特に、流体素片の非等方ストレスがないような場合 ($\pi^{(0)} = 0$) には $\Phi_A = -\Phi_H$ となり、Φ_A も密度ゆらぎによるニュートンポテンシャルと解釈することができる。また、(E.15) にもスケールをあらわす $(k/\bar{a}\bar{H})^{-1}$ が含まれており、ハッブルホライズンよりも十分小さいスケールで加速度のポテンシャルに帰着するようになっている。

トレースパート (C.71) より、$\mathcal{K}_g$ についてもアインシュタイン方程式を書き下すことができるが、$\mathcal{K}_g, \Phi_H, \Phi_A$ は独立ではなく、真に独立な自由度は Φ_H, Φ_A のみである。

2.3　momentum constraint

アインシュタイン方程式の $n-i$ 成分 (C.68) はポテンシャルの時間微分を含む比較的単純な式であるため、有用である。(D.51), (D.54) より

$$\begin{aligned}\delta H &\equiv \bar{H}\mathcal{K}_g Q^{(0)} = \left(-\bar{H}A + \frac{1}{\bar{N}}\dot{H}_L + \frac{k}{3\bar{a}}B^{(0)}\right)Q^{(0)} \\ &= \left\{-\bar{H}\Phi_A + \frac{1}{\bar{N}}\dot{\Phi}_H - \frac{k}{3\bar{a}}\left[1 - \frac{3\bar{a}\dot{\bar{H}}}{k^2}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{N}}\right)\right]\sigma_g^{(0)}\right\}Q^{(0)}. \qquad \text{(E.17)}\end{aligned}$$

(C.68) に代入すれば

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\Phi}_H - \bar{H}\Phi_A = -4\pi G\bar{a}\bar{\rho}(1+w)\frac{V_s^{(0)}}{k} \qquad \text{(E.18)}$$

を得る。

2.4　continuity equation

(E.2) より

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\delta} = -3(1+w)\left(\frac{1}{\bar{N}}\dot{H}_L + \frac{k}{3\bar{a}}v^{(0)}\right) - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}(\delta w). \qquad \text{(E.19)}$$

この式を、適当なゲージ不変量について書き換える。まず、(D.53) より

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{H}_L + \frac{k}{3\bar{a}}v^{(0)} = \frac{1}{\bar{N}}\dot{\mathcal{R}} + \frac{k}{3\bar{a}}\left(v^{(0)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}\right) \qquad \text{(E.20)}$$

と変形すれば、( ) 内はゲージ不変量であることが確かめられ、

$$V_s^{(0)} \equiv v^{(0)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}. \qquad \text{(E.21)}$$

従って

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\delta} = -\frac{3}{\bar{N}}(1+w)\dot{\mathcal{R}} - (1+w)\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}(\delta w). \qquad \text{(E.22)}$$

さらに、

$$\epsilon_\zeta \equiv \delta + 3(1+w)\mathcal{R} \qquad \text{(E.23)}$$

はゲージ不変であるので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{N}}\dot{\epsilon}_\zeta &= \frac{3}{\bar{N}}\dot{w}\mathcal{R} - (1+w)\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}(\delta w) \\ \frac{1}{\bar{N}}\left(\frac{\epsilon_\zeta}{1+w}\right)^{\cdot} &= -\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\frac{\delta w}{1+w} - \frac{\bar{N}^{-1}\dot{w}}{(1+w)^2}\delta. \qquad \text{(E.24)}\end{aligned}$$

最後に、$\dot{w} = 3(1+w)(w-c_s^2)\dot{\bar{a}}/\bar{a}$ より

$$\frac{1}{\bar{N}}\left(\frac{\epsilon_\zeta}{1+w}\right)^{\cdot} = -\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\frac{w}{1+w}\Gamma. \tag{E.25}$$

Γ はゲージ不変なエントロピーゆらぎであり、

$$w\Gamma \equiv \left(\frac{\delta p}{\delta\rho} - c_s^2\right)\delta. \tag{E.26}$$

(E.25) は、各項が全てゲージ不変量で書けている。ϵ_ζ, $V_s^{(0)}$ の持つ意味はそれぞれ、

- *Uniform curvature gauge*: $\mathcal{R} = 0$
  $\epsilon_\zeta \longrightarrow$ 密度ゆらぎ

- *Longitudinal gauge*: $B^{(0)} = \dot{H}_T^{(0)} = 0$
  $V_s^{(0)} \longrightarrow$ 3 元固有速度のポテンシャル

また、後に定義する *Newtonian slicing* における密度ゆらぎ ϵ_g (E.33) を用いれば $\epsilon_\zeta = \epsilon_g + 3(1+w)\Phi_H$ より

$$\frac{1}{\bar{N}}\left(\frac{\epsilon_g}{1+w}\right)^{\cdot} = -\frac{k}{\bar{a}}V_s^{(0)} - \frac{3}{\bar{N}}\dot{\Phi}_H - 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\frac{w}{1+w}\Gamma. \tag{E.27}$$

2.5 Euler equation

(E.4) より、

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_c^{(0)} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(c_s^2 - \frac{1}{3}\right)V_c^{(0)} + \frac{k}{\bar{a}}A + \frac{w}{1+w}\frac{k}{\bar{a}}\left[\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3\kappa}{k^2}\right)\pi^{(0)}\right]. \tag{E.28}$$

各項を、ひとつひとつゲージ不変量に書き換える。

- $V_c^{(0)}$

$$V_c^{(0)} = v^{(0)} - B^{(0)} \tag{E.29}$$

  はゲージ不変ではないので、ゲージ不変な速度ポテンシャル $V_s^{(0)}$ を用いて

$$V_c^{(0)} = \left(v^{(0)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}\right) + \left(\frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)} - B^{(0)}\right) = V_s^{(0)} + \sigma_g^{(0)}. \tag{E.30}$$

- A
  ゲージ不変な加速度ポテンシャル Φ_A (E.15) に書き換える。

- δp

  圧力の摂動は、系の音速と密度ゆらぎに比例する断熱的なパートと、複数の流体同士の状態方程式の違いに起因するエントロピーゆらぎに分けられる。

$$\frac{w}{1+w}k\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\right)=\frac{1}{1+w}k\delta\left(\frac{\delta p}{\delta\rho}\right)=\frac{c_s^2}{1+w}k\delta+\frac{w}{1+w}k\Gamma. \tag{E.31}$$

以上より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_s^{(0)} &= 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(c_s^2-\frac{1}{3}\right)V_s^{(0)} \\ &+\frac{k}{\bar{a}}\left(\Phi_A+\frac{c_s^2}{1+w}\epsilon_g\right) \\ &+\frac{w}{1+w}\frac{k}{\bar{a}}\left[\Gamma-\frac{2}{3}\left(1-\frac{3\kappa}{k^2}\right)\pi^{(0)}\right].\end{aligned} \tag{E.32}$$

ϵ_g はゲージ不変な密度ゆらぎであり、

$$\epsilon_g\equiv\delta+3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)\sigma_g^{(0)}. \tag{E.33}$$

- *Newtonian slicing*: $\sigma_g^{(0)}=0$

  $\epsilon_g\longrightarrow$ 密度ゆらぎ

また、*velocity-orthogonal slicing* における密度ゆらぎ ϵ_m (E.12) を用いれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_s^{(0)} &= -\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}V_s^{(0)} \\ &+\frac{k}{\bar{a}}\left(\Phi_A+\frac{c_s^2}{1+w}\epsilon_m\right) \\ &+\frac{w}{1+w}\frac{k}{\bar{a}}\left[\Gamma-\frac{2}{3}\left(1-\frac{3\kappa}{k^2}\right)\pi^{(0)}\right].\end{aligned} \tag{E.34}$$

3 Vector-Mode Equations

3.1 Poisson equation

アインシュタイン方程式 $n-i$ 成分 (C.68) より

$$\left(k^2-2\kappa\right)\sigma_g^{(1)}=-16\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}(1+w)\left(v^{(1)}-B^{(1)}\right). \tag{E.35}$$

(D.88) より、$\sigma_g^{(1)}$ は単独でゲージ不変。(D.82), (D.91) より

$$V_c^{(1)} \equiv v^{(1)} - B^{(1)} \tag{E.36}$$

がゲージ不変であることを示せる。従って、ベクターモードの「ポアソン方程式」は

$$\left(k^2 - 2\kappa\right)\sigma_g^{(1)} = -16\pi G\bar{a}^2\bar{\rho}(1+w)V_c^{(1)}. \tag{E.37}$$

$V_c^{(1)}$ は、定義より時間軸 **n** に対する流体素片の相対速度である。従って (E.37) は、相対速度の存在がベクターモードの非等方膨張の源になっていることを表している。つまり、流体素片が **n** に沿っている場合には $\sigma_g^{(1)}$ は存在しないのである。

3.2 dynamical equation

トレースレスパート (C.70) より

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{\sigma}_g^{(1)} + 2\bar{H}\sigma_g^{(1)} = 8\pi G\bar{a}\bar{p}\frac{\pi^{(1)}}{k}. \tag{E.38}$$

ベクターモードの非等方ストレスが存在すれば非等方膨張も生成されるが、もし $\pi^{(1)} = 0$ であれば $\sigma_g^{(1)} \propto \bar{a}^{-2}$ で減衰する。これは、「圧力」項に相当する $\delta^{(3)}R^i_j$ がベクターモードの場合存在しないためである。

時間 τ として共形時間 (conformal time) を選べば、$\bar{N} = \bar{a}$ より

$$\dot{\sigma}_g^{(1)} + 2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\sigma_g^{(1)} = 8\pi G\bar{a}^2\bar{p}\frac{\pi^{(1)}}{k}. \tag{E.39}$$

3.3 Euler equation

$V_c^{(1)}$ がゲージ不変であるので、(E.4) より直接、

$$\frac{1}{\bar{N}}\dot{V}_c^{(1)} = 3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}}\left(c_s^2 - \frac{1}{3}\right)V_c^{(1)} - \frac{w}{2(1+w)}\left(1 - \frac{2\kappa}{k^2}\right)\frac{k}{\bar{a}}\pi^{(1)}. \tag{E.40}$$

ベクターモードはソースタームに乏しく、非等方ストレスがなければ宇宙膨張とともに減衰する。

4 Tensor-Mode Equations

トレースレスパート (C.70) より

$$\frac{1}{\bar{N}^2}\ddot{H}_T^{(2)} + \frac{1}{\bar{N}}\left(3\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}} - \frac{\dot{\bar{N}}}{\bar{N}^2}\right)\dot{H}_T^{(2)} + \frac{1}{\bar{a}^2}\left(k^2 + 2\kappa\right)H_T^{(2)} = 8\pi G\bar{p}\pi^{(2)}. \tag{E.41}$$

共形時間 $(\bar{N} = \bar{a})$ で

$$\ddot{H}_T^{(2)} + 2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\dot{H}_T^{(2)} + \left(k^2 + 2\kappa\right)H_T^{(2)} = 8\pi G\bar{a}^2\bar{p}\pi^{(2)}. \tag{E.42}$$

テンサーモードには「圧力」項が存在するので、(E.42) は H_T に関する波動方程式となっている。すなわち、H_T は重力波のモードである。

5 Summary of Gauge Invariants

5.1 scalar mode

- scalar potentials

$$\Phi_H = \mathcal{R} - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\sigma_g^{(0)}, \tag{E.43}$$

$$\Phi_A = A - \left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}\left(\sigma_g^{(0)} + \frac{1}{\bar{N}\bar{H}}\dot{\sigma}_g^{(0)}\right). \tag{E.44}$$

- density perturbations

$$\epsilon_g = \delta + 3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)\sigma_g^{(0)}, \tag{E.45}$$

$$\epsilon_m = \delta + 3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)V_c^{(0)}, \tag{E.46}$$

$$\epsilon_\zeta = \delta + 3(1+w)\mathcal{R}, \tag{E.47}$$

$$\epsilon_\zeta - \epsilon_g = 3(1+w)\Phi_H, \tag{E.48}$$

$$\epsilon_m - \epsilon_g = 3\left(\frac{k}{\bar{a}\bar{H}}\right)^{-1}(1+w)V_s^{(0)}. \tag{E.49}$$

- velocity perturbation

$$V_s^{(0)} = v^{(0)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}. \tag{E.50}$$

5.2 vector mode

- velocity perturbations

$$V_c^{(0)} = v^{(1)} - B^{(0)}, \tag{E.51}$$

$$V_s^{(1)} = v^{(1)} - \frac{\bar{a}}{k\bar{N}}\dot{H}_T^{(0)}, \tag{E.52}$$

$$V_c^{(1)} - V_s^{(1)} = \sigma_g^{(1)}. \tag{E.53}$$

付 録F　The Boltzmann Transport Equation

重力場中における衝突系、あるいは無衝突系の粒子の集団運動を記述する輸送方程式 (transport equation) として、一般相対論的に拡張されたボルツマン方程式 (Boltzmann equation) を使う事ができる。この章では、Appendix A で定義した座標基底での表現と Appendix B で定義したテトラードでの表現を、比較しつつ議論してゆく。座標基底の添字は μ, ν, ..., i, j, ..., 0, 1, ... であり、テトラードの添字は a, b, ..., I, J, ..., n, $\hat{1}$, ... である。

1　Distribution Function

4 次元時空座標 $\mathbf{x}$ において、4 元運動量 $\mathbf{p}$ で運動する粒子を記述する分布関数 (distribution function) $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ を定義する。ある座標空間体積要素 $dV_{(x)}$, 運動量空間体積要素 $dV_{(p)}$ を占める粒子数 dN は、

$$dN \equiv f(\mathbf{x},\mathbf{p})dV_{(x)}dV_{(p)} \tag{F.1}$$

として定義される。$f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ はスカラーであり、$(\mathbf{x},\mathbf{p})$ に関するローレンツ変換に対して不変なように定義される。なぜならば、粒子数 dN は測定者によらないので定義としてスカラーであり、位相空間内の体積要素 $dV_{(x)}dV_{(p)}$ はローレンツ変換により

$$dV_{(x')} \equiv dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \left(\sqrt{1-v^2}dx^1\right)dx^2dx^3 = \sqrt{1-v^2}dV_{(x)}, \tag{F.2}$$

$$dV_{(p')} \equiv dp'^1 dp'^2 dp'^3 = \frac{dp^1}{\sqrt{1-v^2}}dp^2dp^3 = \frac{dV_{(p)}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{F.3}$$

と変換されるので、$dV_{(x')}dV_{(p')} = dV_{(x)}dV_{(p)}$ 、すなわちスカラーである。従って $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ もスカラーである。しかし、一般相対論の枠組みで、一般座標変換に対して不変な体積を定義する際、上のような単純な定義では実は不十分である。従って、次節で一般相対論的に意味のある体積を定義する。

1.1 invariant volume element: coordinate space

平坦な 3 次元空間に張られた 2 本の線素ベクター $d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{x}'$ がつくる平行四辺形の面積要素ベクターは $\boldsymbol{S} = (1/2)d\boldsymbol{x} \times d\boldsymbol{x}'$ と与えられる。成分で書けば $dS_i = (1/2)\varepsilon_{ijk}dx^j dx^k$ であり、ε_{ijk} は $\varepsilon_{123} = 1$ で定義される反対称テンサーである。もちろんベクターの方向は、面の法線方向である。同様に、平坦な 4 次元空間中に 3 本の線素ベクターで張られる 3 次元体積要素ベクター $d\boldsymbol{\Sigma}$ (あるいは超曲面の面積要素ベクターとも言える) は、$\varepsilon_{0123} = 1$ を成分に持つ 4 階の反対称テンサーを用いて

$$d\Sigma_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\nu dx^\rho dx^\sigma. \tag{F.4}$$

これを曲がった時空に変換すれば良い。平坦な時空での座標を x' とし、曲がった時空での座標 x に一般座標変換 $x' \to x$ を行なえば、

$$\begin{aligned} d\Sigma_\mu &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}d\Sigma_{\alpha'} \\ &= \frac{1}{3!}\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda'}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\sigma}dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \\ &= \frac{1}{3!}\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\nu dx^\rho dx^\sigma. \end{aligned} \tag{F.5}$$

従って体積要素の座標変換は、座標変換の行列 $\partial x^{\alpha'}/\partial x^\mu$ のヤコビアン $\partial(x')/\partial(x)$ を生じることが分かる。このヤコビアンは 4 次元時空のメトリックの変換性

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu}g_{\alpha'\beta'} \tag{F.6}$$

を用いて求めることができ、

$$g = \left[\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right]^2 g'. \tag{F.7}$$

ここで、$g \equiv \det(g)$ である。平坦な時空においては $g' = -1$ であるから、$\partial(x')/\partial(x) = \sqrt{-g}$ と求める事ができる。以上より、曲がった時空中における 3 次元体積要素ベクターは

$$d\Sigma_\mu = \frac{1}{3!}\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\nu dx^\rho dx^\sigma. \tag{F.8}$$

法線方向を決めるベクター $\mathbf{n}$ とのスカラー積 $\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ をとり、(F.2) より、$V_{(x)}$ の変換性とうまく打ち消しあうように粒子のエネルギー $p^n \equiv -\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}$ との積をつくれば、$V_{(x)} = p^n\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ は、単独で一般座標変換に対してスカラーである。ただしこの「体積」は、$p^n\sqrt{-g}dx^1dx^2dx^3$ であることを忘れてはならない。また、$\mathbf{n}$ は勝手にとれるものではなく、次節で定義する $dV_{(p)}$ と矛盾がないようにしなければならない。

1.2 invariant volume element: momentum space

4 元運動量ベクター $\mathbf{p}$ のつくる空間には、$\mathbf{p}$ が従わねばならない条件 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + m^2 = 0$ で定義される超曲面が存在する。従って、運動量空間においては超曲面を選べる自由度は存在せず、体積要素は

$$dV_{(p)} = 2\vartheta(p^0)\delta(p^\alpha p_\alpha + m^2)\frac{1}{4!}\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dp^\mu dp^\nu dp^\rho dp^\sigma. \tag{F.9}$$

ϑ はヘヴィサイド (Heaviside) 関数であり、ファクター 2 は $\vartheta(p^0)$ による物理的要請 $p^0 > 0$ のためである。(F.7) より、$\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dp^\mu dp^\nu dp^\rho dp^\sigma$ がスカラーであることが確かめられる。

(F.9) がどのような体積要素であるかは、Appendix B で導入したテトラード表示で明らかにすることができる。$\delta(p^\alpha p_\alpha + m^2)$ は、テトラード $\mathbf{e}^a$ 系において (B.1) より

$$\begin{aligned}\delta(\eta_{ab}p^a p^b + m^2) &= \delta(-(p^n)^2 + p^2 + m^2) \\ &= \frac{1}{\left|2\sqrt{p^2+m^2}\right|}\delta(p^n - \sqrt{p^2+m^2}) \\ &\quad + \frac{1}{\left|-2\sqrt{p^2+m^2}\right|}\delta(p^n + \sqrt{p^2+m^2}).\end{aligned} \tag{F.10}$$

ただし、$p \equiv \delta_{IJ}p^I p^J$ である。このように、条件 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + m^2 = 0$ は規格直交化されたテトラード表示において、非常に単純な結果 ($p^n = \sqrt{p^2 + m^2}$) を与える。これが座標表示においてどれほど困難であるかは、試して見ると良く分かるだろう。以上より、

$$dV_{(p)} = \frac{dp^{\hat{1}}dp^{\hat{2}}dp^{\hat{3}}}{\sqrt{p^2+m^2}}. \tag{F.11}$$

数字の上のハットは、テトラード表示の成分であることを示すためにつけた。このように不変運動量体積要素は、$d^3p \equiv dp^{\hat{1}}dp^{\hat{2}}dp^{\hat{3}}$ に加えて分母にエネルギーが入っている。(F.11) の不変性を簡単に解釈してみる。$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + m^2 = 0$ で定義される超曲面の法線ベクターは、$\mathbf{p}$ の方向を向いている。そして d^3p は、$d^3p = \varepsilon_{nabc}dp^a dp^b dp^c$ で分かるように、運動量空間における 3 次元体積要素ベクターの $\mathbf{n}$ 方向の成分である。一方 $p^n = \sqrt{p^2 + m^2}$ も同様に、$\mathbf{p}$ の $\mathbf{n}$ 方向の成分である。従って (F.11) は同じベクターの同じ成分の比であり、同じ変換性を示すため、変換係数が分子と分母でキャンセルして不変に保たれるわけである。言いかえれば、「同じベクターの同じ成分の比の値」というのは誰が測定しても同じなので、不変なのである。

以上のように不変体積要素を定義したが、$V_{(x)}, V_{(p)}$ ともに「本当の意味での」体積ではなく、エネルギーがかかっていることは常に頭に置いておかねばならない。

1.3 Boltzmann equation: coordinate representation

粒子の集団運動を記述する基礎方程式として、ボルツマン方程式を用いる。粒子の軌跡に沿うアフィンパラメター λ を導入すれば、衝突項 $C[f]$ のもとでのボルツマン方程式は、座標表示で

$$\frac{Df}{D\lambda} \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\bigg|_p + \frac{dp^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p^\mu}\bigg|_x = p^0 C[f]. \tag{F.12}$$

Appendix G で見るように、$p^0C[f]$ がスカラーであるように衝突項を定義する。

重力場中での個々の粒子の運動は、重力以外の外力がないもとでは測地線に従うため、$dx^\mu/d\lambda$, $dp^\mu/d\lambda$ はそれぞれ測地線の式

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu \ , \qquad \frac{dp^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \tag{F.13}$$

から決められる。ここで、$f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ は座標空間 4 次元、運動量空間 4 次元の位相空間内で定義された分布関数のように見えるが、実はそうではない。運動量空間で実際に独立な次元は 3 つであり、残りの 1 次元は $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -m^2$ から決められるのである。

現在興味があるのは光子の分布関数の発展方程式なので、$m=0$ である。p^i の変化に対する寄与は、赤方偏移 (redshift) による光子のエネルギー変化と、光子の軌跡が曲げられる効果 (bending) に分けられる。従って、独立変数をさらに変換し

$$\frac{dp^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p^i}\bigg|_x = \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p}\bigg|_{x,\gamma} + \frac{d\gamma^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial \gamma^i}\bigg|_{x,p}. \tag{F.14}$$

p は光子のエネルギー、γ^i は光子の進行方向を示す方向余弦である。

1.4 Boltzmann equation: tetrad representation

テトラード表示では

$$p^a e_a[f] + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p}\bigg|_{x,\gamma} + \frac{d\gamma^I}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial \gamma^I}\bigg|_{x,p} = p^n C[f], \tag{F.15}$$

$$\frac{dp^a}{d\lambda} = -\Gamma^a_{bc}p^b p^c \ , \qquad e_a[f] \equiv e_a^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\bigg|_p. \tag{F.16}$$

$p^nC[f]$ はローレンツスカラーである。注意しなければならないのは、テトラードは非座標基底であるため、その接続係数 (connection coefficient) は添字に関して対称でないことである。この非対称性は構造係数 (structure coefficient) C^c_{ab} であらわされ、

$$[\mathbf{e}_a,\ \mathbf{e}_b] \equiv C^c_{ab}\mathbf{e}_c \ , \qquad C^c_{ab} = \Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab}. \tag{F.17}$$

2 Temperature Fluctuation

光子の分布関数はボーズ – アインシュタイン (Bose-Einstein) 分布で記述でき、唯一のパラメターである温度Tによって決められる。

$$f_{\rm BE}(p) \equiv \frac{1}{\exp(p/T)-1}. \tag{F.18}$$

一様等方な膨張宇宙を光子が伝播すると、波長が膨張によって伸ばされ、$p \propto \bar{a}^{-1}$ のようにエネルギーを失う。一方 f の不変性より、p/T は宇宙膨張のもとで一定に保たれねばならない。以上の考察より、$T \propto \bar{a}^{-1}$ が導かれる。

一般に、物質との相互作用や重力との相互作用により、光子のエネルギーは一様等方成分からずれて $p = \bar{p} + \Delta p(x^i, \tau, p, \gamma^i)$ のように変化する。しかし、この場合も同様に f は一定に保たれねばならないので、温度変化 $T = \bar{T} + \Delta T(x^i, \tau, p, \gamma^i)$ が定義できて両者の関係は $\Delta p/\bar{p} = \Delta T/\bar{T}$ である。今 p は独立変数なので、相互作用による分布関数の変化は温度変化として扱う。温度ゆらぎ $\Theta \equiv \Delta T/\bar{T}$ を定義すれば

$$\begin{aligned} f_t(x^i, \tau, p, \gamma^i) &= \frac{1}{\exp(p/T)-1} \\ &= \frac{1}{\exp\left[p/\bar{T}\left(1+\Theta(x^i, \tau, p, \gamma^i)\right)\right]-1}. \end{aligned} \tag{F.19}$$

分布関数と温度ゆらぎを変換する式は、$z \equiv p/T$ とおけば*

$$\Delta f_t \equiv f_t - \bar{f}_t \approx \bar{T}\frac{\partial \bar{f}_t}{\partial \bar{T}}\Theta = \bar{z}\bar{f}_t(1+\bar{f}_t)\Theta. \tag{F.20}$$

2.1 transport equation: coordinate representation

分布関数 f_t に対するボルツマン方程式 (F.12) を Θ に対する方程式に書き換えることができる。まず、

$$\frac{Df_t}{D\lambda} = \frac{Dz}{D\lambda}\frac{\partial f_t}{\partial z}. \tag{F.21}$$

ここで、$z = \bar{z}/(1+\Theta)$ より

$$\frac{Dz}{D\lambda} = p^\alpha \frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\bigg|_{p,\gamma} + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial z}{\partial p}\bigg|_{x,\gamma} + \frac{d\gamma^k}{d\lambda}\frac{\partial z}{\partial \gamma^k}\bigg|_{x,p}, \tag{F.22}$$

* ほとんどの文献では $x \equiv p/T$ という表記をしているが、ここでは座標 x との混同を避けるため、あえて z を選んだ。Mukhanov et al. (1992) では、v を用いている。

$$p^\alpha \frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\bigg|_{p,\gamma} = p^0 \frac{\bar{z}}{1+\Theta}\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} - p^\alpha \frac{\bar{z}}{(1+\Theta)^2}\frac{\partial \Theta}{\partial x^\alpha}, \tag{F.23}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p}\bigg|_{x,\gamma} = \frac{\bar{z}}{1+\Theta}\frac{1}{p} - \frac{\bar{z}}{(1+\Theta)^2}\frac{\partial \Theta}{\partial p}, \tag{F.24}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \gamma^k}\bigg|_{x,p} = -\frac{\bar{z}}{(1+\Theta)^2}\frac{\partial \Theta}{\partial \gamma^k}. \tag{F.25}$$

今 p は独立変数であるから、$\bar{z}$ は分母の $\bar{T}$ の赤方偏移によって $\bar{z} \propto \bar{a}$ となることに注意する。一方、もし $q \equiv \bar{a}p$ のように宇宙膨張を切り離した「共動運動量 (comoving momentum)」を独立変数に選べば、$\bar{z} = \text{constant}$ である† 。$\partial f_t/\partial z = -f_t(1+f_t)$ より最終的に

$$\begin{aligned}\frac{Df_t}{D\lambda} &= f_t(1+f_t)\frac{\bar{z}}{1+\Theta} \\ &\times \left[\frac{1}{1+\Theta}\left(p^0\dot{\Theta} + p^k\frac{\partial\Theta}{\partial x^k} + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + \frac{d\gamma^k}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma^k}\right) - \frac{1}{\bar{a}p}\frac{d(\bar{a}p)}{d\lambda}\right].\end{aligned} \tag{F.26}$$

ドットは時間 τ に関する偏微分である。以上より、温度ゆらぎの輸送方程式は

$$\dot{\Theta} + \frac{p^k}{p^0}\frac{\partial\Theta}{\partial x^k} = \mathcal{G}_{SW} + \mathcal{G}_{bend} + \mathcal{G}_C, \tag{F.27}$$

$$\mathcal{G}_{SW} \equiv -\frac{1}{p^0}\frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + \frac{1}{\bar{a}pp^0}\frac{d(\bar{a}p)}{d\lambda}, \tag{F.28}$$

$$\mathcal{G}_{bend} \equiv -\frac{1}{p^0}\frac{d\gamma^k}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma^k}, \tag{F.29}$$

$$\mathcal{G}_C \equiv \frac{(1+\Theta)^2}{\bar{z}f_t(1+f_t)}C[f_t]. \tag{F.30}$$

この式は非線形まで使える式であり、各ソースの物理的意味は

- $\mathcal{G}_{SW}$: 重力赤方偏移 $dp/d\lambda$ による寄与。後述のように、ザクス – ヴォルフェ (Sachs-Wolfe) 効果として知られている。
- $\mathcal{G}_{bend}$: 重力レンズによる、光線の経路 γ^i の変化。
- $\mathcal{G}_C$: コンプトン散乱による衝突項 $C[f]$ を通じた、電子との相互作用による寄与。Appendix G において扱う。

† 例えば Bond (1996) では q を独立変数として扱っている。

しかし、CMB ゆらぎの主要な特徴は線形オーダーの項から得られる。線形オーダーでは、Θ の波長依存性、すなわち p 依存性は無視して良く、さらに $\mathcal{G}_{bend}$ も 2 次であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{SW} &= \frac{1}{\bar{a}pp^0}\frac{d(\bar{a}p)}{d\lambda} = \frac{1}{\bar{a}p}\frac{d(\bar{a}p)}{d\tau}, && \text{(F.31)} \\ \mathcal{G}_{bend} &= 0, && \text{(F.32)} \\ \mathcal{G}_C &= \frac{1}{\bar{z}\bar{f}_t(1+\bar{f}_t)}C[f_t]. && \text{(F.33)} \end{aligned}$$

2.2 transport equation: tetrad representation

多少蛇足ではあるが、座標表示で導いた温度ゆらぎの輸送方程式をテトラード表示に書き直しておく。

$$e_n\left[\Theta\right] + \frac{p^K}{p^n}e_K\left[\Theta\right] = \mathcal{G}_{SW} + \mathcal{G}_{bend} + \mathcal{G}_C, \tag{F.34}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{SW} &= -\frac{1}{p^n}\frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + \frac{1}{\bar{a}pp^n}\frac{d(\bar{a}p)}{d\lambda}, && \text{(F.35)} \\ \mathcal{G}_{bend} &= -\frac{1}{p^n}\frac{d\gamma^K}{d\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma^K}, && \text{(F.36)} \\ \mathcal{G}_C &= \frac{(1+\Theta)^2}{\bar{z}f_t(1+f_t)}C[f_t]. && \text{(F.37)} \end{aligned}$$

3 Sachs-Wolfe Effect & Momentum Transformation

3.1 photon energy & observer

重力赤方偏移による寄与は $\mathcal{G}_{SW}$ によって決定される。(F.31) を計算するにはまず、光子のエネルギー p を定義、言いかえればエネルギーを測定する観測者を決めねばならない。「観測者を選ぶ」という作業は、観測者が乗っている流線の 4 元ベクター $\mathbf{U}^{\mathrm{obs}}$ を選ぶということである。観測者が選ばれれば、彼によって測定されるエネルギーは $p \equiv -\mathbf{U}^{\mathrm{obs}}\cdot\mathbf{p}$ で決定される。ひとたび観測者が選ばれて p が定義されると、これはローレンツスカラーであるが、観測者を変えてしまうと観測されるエネルギーももちろん変わる。

それでは、我々はどのような観測者を選ぶべきなのだろうか。Appendix A で用いた、空間的超曲面 $\mathcal{S}_\tau$ に直交する時間的ベクター $\mathbf{n}$ は、時空の幾何学を調べるのに非常に適した

観測者であった。しかし一方で、$\mathbf{n}$ の測定する光子のエネルギー:

$$p^n \equiv -\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} = -n_0 p^0 = N p^0 \tag{F.38}$$

は「我々にとって」観測可能なエネルギーではない。我々は物質と共に運動する系の流線 $\mathbf{u}$ に乗っており、一般的には $\mathcal{S}_\tau$ に直交しているとは限らない。従って、観測量と比較する際には $p^u \equiv -\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$ を用いなければならない。

以上をふまえ、以下のような手法をとることにする。重力場の効果を $\mathbf{n}$ で測定すれば、物理的意味がクリアな幾何量で定量化することができるので、まず始めに $\mathbf{n}$ の視点で赤方偏移を定量化する。そして、運動量空間において変換 $p^n \to p^u$ を行ない、観測量を計算する。

3.2 observer 1: normal vector

(F.38) の両辺を λ で全微分する事により、$\mathbf{n}$ の測定するエネルギー p^n の発展方程式:

$$\frac{dp^n}{d\lambda} = -\mathbf{p}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{n})\cdot\mathbf{p} = -\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} - \frac{\theta}{3}\mathbf{P}\left(\mathbf{p},\mathbf{p}\right) + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}) \tag{F.39}$$

を得る。$\mathbf{P}$ は空間的超曲面への射影テンサー、$\boldsymbol{\sigma}$, θ はそれぞれ $\mathcal{S}_\tau$ の非等方体積変化率 (shear), 等方体積変化率 (expansion)、$\mathbf{A}$ は加速度 (acceleration) である。Appendix A より、$\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{A}$ は線形オーダーであることが示される。座標表示の場合、線形オーダーに限り $\sigma_{00} = \sigma_{0i} = A_0 = 0$ であるが、テトラード表示ならば任意のオーダーで $\sigma_{nn} = \sigma_{nI} = A_n = 0$ である。

(F.39) を成分表示するため、方向余弦を

$$\gamma^I \equiv \frac{p^I}{p^n} = \frac{1}{p^n} e^I_{\alpha} p^\alpha = \bar{a} e^I_{*i}\left(\frac{N^i}{N} + \frac{p^i}{Np^0}\right) \tag{F.40}$$

と定義する。$\eta_{ab}p^a p^b = 0$ より、$\delta_{IJ}\gamma^I\gamma^J = 1$ であることが確かめられる。従って、対応する座標表示は

$$\gamma^i = \bar{a}\left(\frac{N^i}{N} + \frac{p^i}{Np^0}\right) \tag{F.41}$$

であり、同様に $g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = 0$ より ${}^{(3)}g_{*ij}\gamma^i\gamma^j = 1$ を満たすことが確かめられる。次に、アフィンパラメター λ を時間 τ に変換し、左辺を

$$\frac{dp^n}{d\lambda} = p^0\frac{dp^n}{d\tau} = p^n\frac{dp^n}{Nd\tau} \tag{F.42}$$

と書き直せば、(F.39) はテトラード、座標基底をもちいてそれぞれ

$$\frac{1}{p^n}\frac{dp^n}{Nd\tau} = -\frac{\theta}{3} - \sigma_{KL}\gamma^K\gamma^L - A_K\gamma^K, \tag{F.43}$$

$$= -\frac{\theta}{3} - \frac{1}{\bar{a}^2}\sigma_{kl}\gamma^k\gamma^l - \frac{1}{\bar{a}}A_k\gamma^k. \tag{F.44}$$

と書き直せる。(F.44) では、(A.12), (F.41) を用いた。$\bar{a}$ の違いは、σ_{kl}, A_k は $\mathbf{e}_K$ で変換するのに対し、γ^k は $\mathbf{e}_{*K}$ を用いるためである。ここで、(F.43), (F.44) を導く際、線形近似を一切用いていないことは注目せばならない。この式はたとえ非線形オーダーであっても適用できるのである。(F.43), (F.44) が、$\mathbf{n}$ が測った重力赤方偏移による光子のエネルギー変化を決めている。ADM 形式で書いた事により、赤方偏移に寄与している物理量をあらわにできているのが大きな特徴である。第 1 項は等方膨張 (収縮) による赤方 (青方) 偏移、第 2 項は同じく非等方膨張 (収縮) の効果である。第 3 項目は加速度による効果であり、加速 (減速) は赤方 (青方) 偏移として寄与する。このように、重力赤方偏移によって引き起こされる CMB のゆらぎはザクス – ヴォルフェ (Sachs-Wolfe; 以下 SW) 効果 (Sachs & Wolfe 1966) と呼ばれており、CMB ゆらぎを理解する上で最も重要な効果のひとつである。

(F.43) を、メトリックの摂動 (A.26) – (A.28) について線形化する。幾何量 $\boldsymbol{\sigma}$, θ, $\mathbf{A}$ は、テトラード表示で (B.13) – (B.16) のように書けているので、

$$\frac{1}{p^n}\frac{dp^n}{Nd\tau} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} - \frac{1}{2\bar{N}}\bar{e}^k_{*K}\bar{e}^l_{*L}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^K\bar{\gamma}^L + \frac{1}{\bar{a}}\bar{e}^k_{*K}\bar{e}^l_{*L}h_{0k|l}\bar{\gamma}^K\bar{\gamma}^L + \frac{1}{2\bar{a}}\bar{e}^k_{*K}h_{00|k}\bar{\gamma}^K. \tag{F.45}$$

座標表示においても、(A.32) – (A.35) を用いて

$$\frac{1}{p^n}\frac{dp^n}{Nd\tau} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} - \frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{1}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{1}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.46}$$

以上より、線形オーダーで SW 効果のソース $\mathcal{G}_{SW}$(F.31) を書き下せば、座標表示において

$$\mathcal{G}^n_{SW} = \frac{1}{\bar{a}p}\frac{d(\bar{a}p)}{d\tau} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{\bar{N}}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{\bar{N}}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.47}$$

特に、時間座標 τ として摂動解析の際によく使われる共形時間 (conformal time) を選べば、$\bar{N} = \bar{a}$ より

$$\mathcal{G}^n_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{1}{2}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.48}$$

テトラード表示へは、$\bar{\mathbf{e}}_{*K}$ を用いて変換できる。(すなわち、$k \to K$ のように小文字を大文字に変換するだけである。)

3.3 observer 2: realistic observer

観測者として、物質と共に動く流線 **u** を考える。空間座標原点は時間軸に対しシフトベクター N^i の「速度」で動いているため、$N^i = 0$ という座標をとらない限り **n** と一致しない。しかし、**n** $\to$ **u** の変換はローレンツ変換ではない。N^i は重力的な場であり、通常使われる意味での「速度場」ではないのである。今、重力による効果のみを考えるため、固有運動に起因するドップラー効果は考慮しない。従って、我々の乗る流線 **u** は空間座標の原点に静止しているものとする。ただし、3 元固有速度 v^i を持つ系には通常のローレンツ変換によっていつでも移ることができるため、これは一般性を失っていない。$u^i \equiv 0$ を定義し、**u**·**u** $= -1$ を用いて各成分を計算すると、

$$u^\mu = \left(\frac{1}{N},\ 0,\ 0,\ 0\right)\ , \qquad u_\mu = \left(-N,\ \frac{N_i}{N}\right). \tag{F.49}$$

従って、**u** の測るエネルギー p^u は

$$\begin{aligned} p^u &\equiv -\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} = -u_0 p^0 - u_k p^k = N p^0 - \frac{N_k}{N} p^k \\ &= p^n \left(1 - \frac{N_k}{N}\frac{p^k}{p^n}\right) \end{aligned} \tag{F.50}$$

のように p^n と関係している。メトリックの摂動量 $h_{\mu\nu}$ と方向余弦 γ^i を用いて書けば、

$$p^u = p^n \left(1 - h_{0k}\bar{\gamma}^k\right). \tag{F.51}$$

この関係式を用いて $p^n \to p^u$ の変換を行なうと、

$$\frac{1}{p^u}\frac{dp^u}{Nd\tau} = \frac{1}{p^n}\frac{dp^n}{Nd\tau} - \frac{1}{\bar{N}}\dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k - \frac{1}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l. \tag{F.52}$$

従って (F.46) より、

$$\frac{1}{p^u}\frac{dp^u}{Nd\tau} = -\frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} - \frac{1}{2\bar{N}}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \frac{1}{\bar{N}}\dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k + \frac{1}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k, \tag{F.53}$$

$$\mathcal{G}^u_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k + \frac{\bar{N}}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.54}$$

p の変換は、f の不変性から導かれる $\Theta = \varDelta p/p$ を用いると温度ゆらぎの変換としてもあらわすことができる。

$$\Theta^u = \Theta^n - h_{0k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.55}$$

従って、ソースの変換は実は形式的に全く自明の操作であって、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\bar{N}}{\bar{a}}\bar{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\Theta^n &= \mathcal{G}^n_{SW}\\
\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\bar{N}}{\bar{a}}\bar{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)(\Theta^n-h_{0k}\bar{\gamma}^k) &= \mathcal{G}^n_{SW}-\dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k-\frac{\bar{N}}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l\\
\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\bar{N}}{\bar{a}}\bar{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\Theta^u &= \mathcal{G}^u_{SW}
\end{aligned}
$$

しかしこれは、何をソースと思い、何を温度ゆらぎと定義するか、という問題であり、本質的には観測者の選択の問題である。

3.4 any observers: momentum space gauge transformation

前節で行なった変換は、運動量空間における微小変換、すなわちゲージ変換である。そして、SW 効果が観測者の違い、すなわち運動量空間内でのゲージ変換に依存することが示された。従って、適切に問題を解くためには、空間座標のゲージ変換だけではなく運動量空間の自由度をも考慮しなければならない。

共形変換 (conformal transformation) とローレンツ変換 (Lorentz transformation) を含めた運動量空間における変換、$\tilde{\mathbf{p}}=\Omega(x)\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{p}$ を考える。共形因子 (conformal factor) Ω は座標の任意関数で、ローレンツ変換の行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ の成分は

$$
\Lambda^\mu_\nu=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma v_i\\ -\gamma v^i & \delta^i_j+(\gamma-1)\hat{v}^i\hat{v}_j\end{pmatrix}. \tag{F.56}
$$

γ はローレンツ因子[‡] (Lorentz factor) で $\gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}$ 、また $v^i\equiv v\hat{v}^i$ である。

線形摂動を与え、$\Omega=\bar{\Omega}+\delta\Omega$、$v\ll 1$ より $\gamma\approx 1$ とすれば、$\tilde{\mathbf{p}}=\bar{\Omega}(1+\delta\Omega/\bar{\Omega})\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{p}$ を得る。両辺に $\mathbf{U}^{\rm obs}$ を作用させれば、

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}^{\rm obs} &= \bar{\Omega}\left(1+\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}\right)\left(-\mathbf{U}^{\rm obs}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{p}\right)\\
&= \bar{\Omega}\left(1+\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}\right)\left(p^{\rm obs}+U_0^{\rm obs}v_kp^k+U_k^{\rm obs}v^kp^0\right) \qquad (F.57)\\
&\approx \bar{\Omega}p^{\rm obs}\left(1+\frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}}+\frac{U_0^{\rm obs}}{\bar{a}}v_k\bar{\gamma}^k\right), \qquad (F.58)
\end{aligned}
$$

[‡] γ を多用しているが、混乱しないようにして欲しい。

または、$\tilde{\bar{T}} = \bar{\Omega}\bar{T}$ 及び

$$\tilde{\Theta}^{\rm obs} = \Theta^{\rm obs} + \frac{\delta\Omega}{\bar{\Omega}} + \frac{U_0^{\rm obs}}{\bar{a}} v_k \bar{\gamma}^k \tag{F.59}$$

ただし、U_k, U^k は線形量である。(F.58) と前節の (F.52) を見比べれば、共形因子の摂動項の選び方により、変換 $\tilde{\mathbf{p}} = \Omega\mathbf{p}$ は観測者が変わることによるローレンツ変換以外の重力的な効果を及ぼすことが分かる。

もう一つ簡単かつ有用な例として、$\bar{\Omega} = \bar{a}$, $\delta\Omega/\bar{\Omega} = 0$, $v^i = 0$、すなわち $\tilde{\mathbf{p}} = \bar{a}\mathbf{p}$ を挙げる。光子のエネルギーは宇宙の一様等方膨張と共に赤方偏移する ($p \propto \bar{a}^{-1}$) ので、$\tilde{\mathbf{p}}$ は膨張を抜きだした共動運動量 (comoving momentum) である。この変換により、

$$\frac{1}{\tilde{p}}\frac{d\tilde{p}}{Nd\tau} = \frac{1}{p}\frac{dp}{Nd\tau} + \frac{\dot{\bar{a}}}{N\bar{a}} \tag{F.60}$$

よって、$\tilde{p}$ の発展方程式から一様等方膨張による寄与はなくなる。

3.5 Summary of SW effect

代表的な観測者に対する SW 効果を、座標表示でまとめておく。

- Normal Observer

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^n_{SW} &= -\bar{N}(\delta H) - \frac{\bar{N}}{\bar{a}^2}\sigma_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \frac{\bar{N}}{\bar{a}}A_k\bar{\gamma}^k & \text{(F.61)} \\ &= -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{\bar{N}}{\bar{a}}h_{0k|l}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l + \frac{\bar{N}}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. & \text{(F.62)} \end{aligned}$$

- Realistic Observer

$$p^u = p^n\left(1 - h_{0k}\bar{\gamma}^k\right), \tag{F.63}$$

$$\mathcal{G}^u_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k + \frac{\bar{N}}{2\bar{a}}h_{00|k}\bar{\gamma}^k. \tag{F.64}$$

- Specific Observer

$$p^s = p^n\left(1 - \frac{1}{2}h_{00} - h_{0k}\bar{\gamma}^k\right), \tag{F.65}$$

$$\mathcal{G}^s_{SW} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{kl}\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^l - \dot{h}_{0k}\bar{\gamma}^k - \frac{1}{2}\dot{h}_{00}. \tag{F.66}$$

最後の変換は、$\mathcal{G}_{SW}$ が時間微分のみにする狙いで行なったもので、メトリックの時間変動が無視できる場合光子はフリーに飛ぶことになる。しかし現実には、このような観測者を実現できる 4 元速度ベクター $\mathbf{U}^{\mathrm{obs}}$ は存在しない。従って、得られる温度ゆらぎ $\Theta^s = \Theta^n\left(1 - \frac{1}{2}h_{00} - h_{0k}\bar{\gamma}^k\right)$ は、物理的なものではないことに注意する。あくまで、計算の簡便化のために採用されているだけである[§]。

[§] Hu (1995) において、「実効温度 (effective temperature)」と呼ばれている。

付録G　Scattering & Polarization

1　Collision Integral

光子は、電子とコンプトン散乱 (Compton scattering) を通じて相互作用を行う。4 元運動量をそれぞれ $\gamma(\mathbf{p}') + e^-(\mathbf{q}') \leftrightarrow \gamma(\mathbf{p}) + e^-(\mathbf{q})$ と定義すれば、$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}' = 0$, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}' = -m_e^2$ である。電子を記述する分布関数 $g(\mathbf{q})$ を用い、$C[f_t]$ は形式的に

$$\begin{aligned} C[f_t(\mathbf{p})] &= \int q^n dV_{(q)} \int dW \left[\mathcal{C}_{\rm in}(\mathbf{p}' \to \mathbf{p}) - \mathcal{C}_{\rm out}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}')\right] \\ &= \int q^n dV_{(q)} dW \left[g(\mathbf{q}') f_t(\mathbf{p}') \left(1 + f_t(\mathbf{p})\right) - g(\mathbf{q}) f_t(\mathbf{p}) \left(1 + f_t(\mathbf{p}')\right)\right] \end{aligned} \tag{G.1}$$

と書き下せ、衝突積分 (collision integral) と呼ばれる。$dV_{(q)}$ は Appendix F で定義した不変運動量積分、q^n は $\mathbf{n}$ が観測する電子のエネルギー、dW は散乱確率、$\mathcal{C}_{\rm in}, \mathcal{C}_{\rm out}$ の $1 + f_t$ は光子の従うボーズ統計による誘導項である (フェルミ統計に従う粒子であれば $1 - f_t$) 。電子は陽子とクーロン相互作用 (Coulomb interaction) によってカップルしており、約 2000 倍重い陽子の集団的運動 (bulk motion) v_b^I の中でランダムな熱運動 (thermal motion) を行なっていると考えられる。従って分布関数をマクスウェル分布 (Maxwellian) で定義でき、

$$g(\mathbf{q}) \equiv x_e n_e (2\pi m_e T_e)^{-3/2} \exp\left(\frac{-(q^I - m_e v_b^I)^2}{2 m_e T_e}\right). \tag{G.2}$$

電離度 x_e、電子数密度 n_e、電子温度 T_e を定義すれば、電子の分布関数のモーメントは

$$\int q^n dV_{(q)} g(\mathbf{q}) = x_e n_e, \tag{G.3}$$

$$\int q^n dV_{(q)} q^I g(\mathbf{q}) = x_e n_e m_e v_b^I, \tag{G.4}$$

$$\int q^n dV_{(q)} q^I q^J g(\mathbf{q}) = x_e n_e m_e^2 \left(v_b^I v_b^J + \delta^{IJ} \frac{T_e}{m_e}\right). \tag{G.5}$$

コンプトン散乱の物理過程は量子電磁力学理論 (Quantum Electro Dynamics; QED) によって良く理解されており、量子効果を考慮に入れてフルに dW を計算することが可能である。このような計算で威力を発揮するのは、やはり Appendix B で定義したテトラード

表示であり、この章は全てテトラード表示を用いる事とする。散乱の前後でエネルギーは保存しなければならないので δ 関数を用い、また終状態の運動量空間の不変積分をかけて

$$dW = (2\pi)^4 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{q}' - \mathbf{p}') \left|M\right|^2 p'^n dV_{(p')} q'^n dV_{(q')}. \tag{G.6}$$

$\left|M\right|^2$ は散乱振幅であり、電子のスピン状態に関し始状態で平均し、終状態で和をとったものとする。

1.1 invariance of collision integral

ここで、座標変換に関する不変性をまとめておく。まず、$\left|M\right|^2 p^n p'^n q^n q'^n$ はスカラーであるように定義される (Weinberg 1995, pp.137)。散乱確率 dW と散乱断面積 $d\sigma$ との関係式は $d\sigma = v_{\mathrm{rel}}^{-1} dW$ であり、v_{rel} は始状態での相対速度である。2 粒子の相対速度は、観測者を $\mathbf{U}$ とすると一般に

$$v_{\mathrm{rel}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2 - m_p^2 m_q^2}}{(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{p})(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{q})}. \tag{G.7}$$

従って、$v_{\mathrm{rel}}(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{p})(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{q})$ は観測者 $\mathbf{U}$ の選び方によらない量である。今はテトラード系なので $\mathbf{U} = \mathbf{n}$ である。一方、定義より $d\sigma$ はスカラーであるから、

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{q}' - \mathbf{p}') \frac{\left|M\right|^2 p^n q^n p'^n q'^n}{v_{\mathrm{rel}} p^n q^n} dV_{(p')} dV_{(q')} \tag{G.8}$$

のように、両辺は矛盾なくスカラーで書けていることが確かめられる。また、

$$p^n q^n dW = p^n q^n v_{\mathrm{rel}} d\sigma = \left|\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\right| d\sigma \tag{G.9}$$

より $p^n q^n dW$ は観測者によらないので、(G.1) より $p^n C[f_t]$ のコンビネーションがスカラーであることが分かる。Appendix F において、ソースの形を (F.12), (F.15) のように選んだ理由はここにある。

1.2 cross section (electron rest-frame)

$p^n C[f_t]$ の不変性を明らかにしたので、これより問題を単純にできる系として電子の静止系 (electron rest-frame) $\tilde{q}^a = (m_e, 0, 0, 0)$ を選ぶ。電子の静止系での量は全てチルダーをつけてあらわす。テトラード表示で、光子の 4 元運動量の成分は $\tilde{p}^a = (\tilde{p}, \tilde{p}\tilde{\gamma}^I)$ と書ける。ここで $(\tilde{p}^n)^2 = \delta_{KL}\tilde{p}^K\tilde{p}^L \equiv \tilde{p}^2$, 方向余弦のなす角 $\delta_{KL}\tilde{\gamma}^K\tilde{\gamma}'^L = \cos\tilde{\beta}$ を定義する。

(G.8) において、$\tilde{q}'^n dV_{(\tilde{q}')}$ を使って $\delta(\tilde{\mathbf{q}}+\tilde{\mathbf{p}}-\tilde{\mathbf{q}}'-\tilde{\mathbf{p}}')$ のうち 3 次元部分を積分すれば、運動量の空間成分に対する保存則 $\tilde{q}'^I = \tilde{p}^I - \tilde{p}'^I$ を得る。残ったデルタ関数は、$\tilde{q}'^n = \sqrt{\delta_{KL}\tilde{q}'^K\tilde{q}'^L + m_e^2}$ を使って p' について解くと

$$\begin{aligned}
& \delta\left(\tilde{q}'^n + \tilde{p}'^n - \tilde{q}^n - \tilde{p}^n\right) \\
= \ & \delta\left(\sqrt{\delta_{KL}(\tilde{p}^K - \tilde{p}'^L)(\tilde{p}^L - \tilde{p}'^L) + m_e^2} + \tilde{p}' - m_e - \tilde{p}\right) \\
= \ & \delta\left(\sqrt{\tilde{p}^2 - 2\tilde{p}\tilde{p}'\cos\tilde{\beta} + \tilde{p}'^2 + m_e^2} + \tilde{p}' - m_e - \tilde{p}\right) \qquad \text{(G.10)} \\
= \ & \frac{\delta\left(\tilde{p}' - \tilde{p}_c(\tilde{\beta})\right)}{\left|(\tilde{p}' - \tilde{p}\cos\tilde{\beta})/\tilde{q}'^n + 1\right|} \\
= \ & \frac{\tilde{q}'^n\tilde{p}'}{m_e\tilde{p}}\delta\left(\tilde{p}' - \tilde{p}_c(\tilde{\beta})\right). \qquad \text{(G.11)}
\end{aligned}$$

$\tilde{p}_c(\tilde{\beta})$ は、エネルギー保存のデルタ関数 (G.10) を $\tilde{p}'$ について解いた解であり、

$$\tilde{p}' = \frac{\tilde{p}}{1 + (\tilde{p}/m_e)(1-\cos\tilde{\beta})} \equiv \tilde{p}'_c(\tilde{\beta}). \qquad \text{(G.12)}$$

すなわち、エネルギー $\tilde{p}$ の入射光子は、入射方向に対して $\tilde{\beta}$ の方向にエネルギー $\tilde{p}'_c$ で散乱されるのである。特に、$\tilde{p} \ll m_e$ の時は $\tilde{p}' \approx \tilde{p}$ であり、電子の静止系では弾性散乱 (erastic scattering) が良い近似で成り立つ。以上より (G.8) は、

$$\begin{aligned}
d\sigma = d\tilde{\sigma} \ &= \ (2\pi)^4 \frac{\tilde{q}'^n\tilde{p}'_c}{m_e\tilde{p}}\delta\left(\tilde{p}' - \tilde{p}_c(\tilde{\beta})\right)\left|\tilde{M}\right|^2 \tilde{p}' dV_{(\tilde{p}')} \\
&= \ (2\pi)^4 \frac{\tilde{q}'^n\tilde{p}'^3_c}{m_e\tilde{p}}\left|\tilde{M}\right|^2 d\Omega_{\tilde{p}'}. \qquad \text{(G.13)}
\end{aligned}$$

散乱振幅 $|M|^2$ は QED で計算できる (Weinberg 1995, pp.367) * 。

$$|M|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{e^4}{64(2\pi)^6 p^n p'^n q^n q'^n}\left[\frac{8(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}')^2}{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{q})} + 32(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}')^2\right]. \qquad \text{(G.14)}$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ は入射光子、$\boldsymbol{\epsilon}'$ は放射光子の偏光ベクター、ファクター 1/2 は電子の始状態のスピンに関する平均である。

(G.14) の各スカラー積は

$$\tilde{\mathbf{p}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}' \ = \ -\tilde{p}\tilde{p}' + \tilde{p}\tilde{p}'\delta_{KL}\tilde{\gamma}^K\tilde{\gamma}'^L$$

* p, q はそれぞれ、Weinberg (1995) の k, p に対応している。

$$= \tilde{p}\tilde{p}'(\cos\tilde{\beta}-1) = m_e\tilde{p}\tilde{p}'\left(\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{\tilde{p}'}\right), \tag{G.15}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}\cdot\tilde{\mathbf{q}} = -m_e\tilde{p}, \tag{G.16}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}'\cdot\tilde{\mathbf{q}} = -m_e\tilde{p}'. \tag{G.17}$$

(G.15) の最後の等号は、(G.12) を用いて $\cos\tilde{\beta}-1$ を消去することによって得られる。(G.14) – (G.17) より

$$\left|\tilde{M}\right|^2 = \frac{\alpha^2}{4(2\pi)^4\tilde{p}\tilde{p}'m_e\tilde{q}'^n}\left[\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}'}+\frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}}-2+4(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}')^2\right]. \tag{G.18}$$

$\alpha\equiv e^2/4\pi$ は、微細構造定数 (fine structure constant) である。従って微分散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\tilde{p}'}} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2}\left(\frac{\tilde{p}'_c}{\tilde{p}}\right)^2\left[\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}'_c}+\frac{\tilde{p}'_c}{\tilde{p}}-2+4(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}')^2\right]. \tag{G.19}$$

これは、クライン – 仁科 (Klein-Nishina) の公式と呼ばれている (Klein & Nishina 1929)。特に、前述のような弾性散乱の場合はトムソン散乱 (Thomson scattering) と呼ばれており、トムソン散乱の断面積 $\sigma_T\equiv 8\pi\alpha^2/3m_e^2$ を用いて

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\tilde{p}'}} = \frac{3}{8\pi}\sigma_T(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}')^2 \tag{G.20}$$

とあらわされる。もし入射光子、放射光子の偏光を問わないとするならば、偏光ベクターを入射について平均し、放射について和をとらねばならない。

$$\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega_{\tilde{p}'}}\right\rangle = \frac{3}{8\pi}\sigma_T\left\langle(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}')^2\right\rangle = \frac{3}{16\pi}\sigma_T(1+\cos^2\tilde{\beta}) = \frac{\sigma_T}{4\pi}\left(1+\frac{1}{2}P_2(\cos\tilde{\beta})\right). \tag{G.21}$$

$P_\ell(x)$ はルジャンドル関数 (Legendre function; Appendix I) である。最右辺第 1 項は等方散乱、第 2 項は角依存性による非等方散乱で、$l=2$ であることより四重極 (quadrupole) であることが分かる。このように、トムソン散乱は四重極の異方性を生成する。

(G.20) は弾性散乱の場合にのみ正しい式である。もちろん完全弾性散乱というのは理想化された場合であり、現実には非弾性散乱である。しかし、トムソン散乱の近似が悪くなるのは $\tilde{p}\gtrsim m_e = 511$ keV $\sim 6\times10^9$ K の場合であり、CMB ゆらぎの寄与を生成するような時期 ($\lesssim 10^4$ K) では、十分トムソン散乱で良い。ただしこれは全て電子の静止系での話しであり、ローレンツ変換によって電子が速度 v_e で動いている系へ移れば、

$$1 = \frac{\tilde{p}'_c}{\tilde{p}} = \frac{p'_c(1-\gamma'_I v_e^I)}{p(1-\gamma^I v_e^I)}$$

$$\frac{p'_c}{p} = 1+(\gamma'_I-\gamma_I)v^I+(\gamma'_J v^J)(\gamma'_I-\gamma_I)v^I+O(v^3). \tag{G.22}$$

のように光子はエネルギー変化を生じる。

2 Polarization

トムソン散乱の断面積 (G.20) は偏光ベクターの依存性 $(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}')^2$ を持っているため、偏光を考慮に入れて解析をしなければならない。偏光をフルに考慮した散乱問題は、Chandrasekhar (1950, pp.35, §16) に詳しい。この節は全て電子の静止系で議論しているが、表記を簡単にするためチルダーは外す。

2.1 Stokes parameters

光子の偏光状態は、ストークスパラメター (Stokes parameter) と呼ばれる量 Q, U, V によって完全に記述される。Q, U は直線偏光をあらわし、V は円偏光をあらわす。Q, U を定義するには、まず光子の振動面を測定する基準となる座標系を設定せねばならない。座標系を決めれば、N-S (南北) の振動を $Q > 0$, E-W を $Q < 0$、NE-SW (NW-SE) を $U > 0$ $(U < 0)$ と定義できる。直線偏光度は $P \equiv \sqrt{Q^2 + U^2}$ である。また、設定した座標上における振動面の位置は、N から測った位置角 $\alpha \equiv \frac{1}{2}\tan^{-1}(U/Q)$ で決められる。なぜ Q, U の 2 つが必要であったかと言えば、偏光状態を決めるには偏光度 P と位置角 α が必要であり、その 2 つの自由度を同じ次元を持つスカラー量 Q, U に振り分けたためである。すなわち、本質的に直線偏光は 2 つの自由度をもって記述されねばならない。一方、円偏光は自由度が 1 つである。ストークスパラメターにより、光の強度は I は $I = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$ と求められる。このように和で記述できるのがストークスパラメターの利点である。

以上の定義より、Q, U は座標系の「反時計まわり (右ねじ)」 ϕ 回転:

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1' \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} \tag{G.23}$$

に対して

$$\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} \tag{G.24}$$

のように変換されるため、複素ベクター $Q + iU$ を定義すれば

$$(Q \pm iU)' = e^{\mp 2i\phi}(Q + iU). \tag{G.25}$$

すなわち、複素偏光ベクター $Q \pm iU$ は、スピン ± 2 を持つ場である[†] 。一方、Θ, V は回

[†] この定義は、例えば Weinberg (1995, pp.72), 砂川 (1991, pp.154) に詳しい。ただし、『座標系』の「反時計まわり」回転は、『状態ベクター』に対する「時計まわり」回転であることに十分注意する。

転不変であるからスピン 0 である。

ところで、Chandrasekhar は座標系の「時計まわり」回転に対して (G.24) を定義している[‡]。この場合、$Q \pm iU$ は定義からスピン ∓ 2 を持つことになる。ここでは符号の不必要な混乱を避けるため、Chandrasekhar とは逆の定義 (G.23), (G.24) を用いる。

2.2 scattering matrix: $\mathsf{S}(\beta)$

入射光子と放射光子の方向が同一平面にのるような散乱面 (scattering plane) を定義する。散乱面に対して垂直な偏光ベクターをもつものを $\Theta_\perp$、平行なものを $\Theta_\parallel$ とすれば、トムソン散乱によって各々の偏光成分は

$$\begin{pmatrix} \Theta'_\parallel \\ \Theta'_\perp \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos^2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_\parallel \\ \Theta_\perp \\ U \\ V \end{pmatrix} \tag{G.26}$$

と変換される。β は散乱角であり、各々の散乱角依存性は $(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}')^2$ によって計算される。係数は、$d\sigma = (3/2)(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}')^2(d\Omega/4\pi)$ に由来する。$\Theta_\perp, \Theta_\parallel$ を、$\Theta = \Theta_\parallel + \Theta_\perp$, $Q = \Theta_\parallel - \Theta_\perp$ に関して書き直せば、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}' &= \mathsf{S}(\beta)\boldsymbol{I} \\ \begin{pmatrix} \Theta' \\ (Q+iU)' \\ (Q-iU)' \\ V' \end{pmatrix} &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos^2\beta) & -\frac{1}{4}\sin^2\beta & -\frac{1}{4}\sin^2\beta & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin^2\beta & \frac{1}{4}(1+\cos\beta)^2 & \frac{1}{4}(1-\cos\beta)^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin^2\beta & \frac{1}{4}(1-\cos\beta)^2 & \frac{1}{4}(1+\cos\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ Q+iU \\ Q-iU \\ V \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{G.27}$$

これまでの議論は、全て「散乱面」という特殊な平面上でのみ正しい。しかし、我々の座標系はもちろん散乱面そのものではないため、変換を行なわねばならない。

(1) 電子を中心とする天球座標 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$[§] を考え、$\boldsymbol{I}$ をこの座標系において定義する。

[‡] Chandrasekhar (1950, pp.35, §16) では、回転行列を $\mathsf{L}(\phi)$ と表記しているが、これは"left-handed" と言う意味で使っているのだろう。

[§] ここでのチルダーは「散乱前の座標」を示しており、電子の静止系を示しているわけではない。そもそも、この節の議論は全て電子の静止系で行なわれている。

(2) 散乱面に直交する座標系へ移る。散乱面は子午面に対して反時計まわり (右ねじ) に α の角をなしているとする。Θ, V は回転に対して不変なので、$Q \pm iU$ に対して回転行列 (G.24) を用い、$\mathbf{R}(\alpha) = \mathrm{diag}\,[1, e^{-2i\alpha}, e^{2i\alpha}, 1]$ [¶] 。

(3) トムソン散乱。散乱行列 $\mathbf{S}(\beta)$ をかける。

(4) 天球座標系に戻る。散乱後の球座標 (θ, ϕ) において、時計まわり (反右ねじ) に $\pi - \gamma$ 回転: $\mathbf{R}\left(-(\pi - \gamma)\right) = \mathrm{diag}\left[1, e^{2i(\pi-\gamma)}, e^{-2i(\pi-\gamma)}, 1\right] = \mathrm{diag}\,[1, e^{-2i\gamma}, e^{2i\gamma}, 1] = \mathbf{R}(\gamma)$.

以上の操作より、位相行列 (phase matrix) $\mathbf{P}$ を

$$\mathbf{P}(\theta, \phi; \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \equiv \mathbf{R}(\gamma)\mathbf{S}(\beta)\mathbf{R}(\alpha) \tag{G.28}$$

と定義すれば、衝突によるソース項 $\mathfrak{S}(\theta, \phi)$ は

$$\mathfrak{S}(\theta, \phi) \equiv \int \mathbf{P}(\theta, \phi; \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \boldsymbol{I}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \frac{d\tilde{\Omega}}{4\pi}. \tag{G.29}$$

従って、散乱過程における衝突積分は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}_C^{\Theta} \\ \mathcal{G}_C^{Q+iU} \\ \mathcal{G}_C^{Q-iU} \\ \mathcal{G}_C^{V} \end{pmatrix} = -\dot{\tau}_c \boldsymbol{I}(\theta, \phi) + \dot{\tau}_c \mathfrak{S}(\theta, \phi) \tag{G.30}$$

と書き下せる。$\dot{\tau}_c \equiv x_e n_e \sigma_T$ は光学的深さ (optical depth) であり、電子による散乱確率をあらわす。ここで、(G.1) と見比べてみる。(G.30) は電子の静止系での議論であり、かつ完全弾性散乱のもとでの輸送方程式である。従って電子 – 光子間のエネルギー輸送はなく、単なる衝突の問題として扱うことができるのである。第 1 項は流出項、第 2 項が流入項に対応しており、$\dot{\tau}_c$ はトムソン散乱断面積と電子の分布関数 g (G.2) の 0 次のモーメントの積である。

[¶] Hu & White (1997b) では $\mathbf{R}$ を「状態」を変換する行列として定義しているので、時計まわり回転 $-\alpha$ を施している。

2.3 phase matrix: $\mathsf{P}(\theta,\phi;\tilde\theta,\tilde\phi)$

位相行列 $\mathsf{P}(\theta,\phi;\tilde\theta,\tilde\phi)$ には、(G.21) に現われた等方、非等方散乱に加え、偏光モード毎の散乱の情報まで全て含まれている。具体的に書き下せば、

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\theta,\phi;\tilde\theta,\tilde\phi) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(1+\cos^2\beta) & -\frac{3}{8}\sin^2\beta e^{-2i\alpha} & -\frac{3}{8}\sin^2\beta e^{2i\alpha} & 0 \\ -\frac{3}{4}e^{-2i\gamma}\sin^2\beta & \frac{3}{8}e^{-2i\gamma}(1+\cos\beta)^2 e^{-2i\alpha} & \frac{3}{8}e^{-2i\gamma}(1-\cos\beta)^2 e^{2i\alpha} & 0 \\ -\frac{3}{4}e^{2i\gamma}\sin^2\beta & \frac{3}{8}e^{2i\gamma}(1-\cos\beta)^2 e^{-2i\alpha} & \frac{3}{8}e^{2i\gamma}(1+\cos\beta)^2 e^{2i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{5}} \begin{pmatrix} Y_2^0 + 2\sqrt{5}Y_0^0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}Y_2^{-2} & -\sqrt{\frac{3}{2}}Y_2^2 & 0 \\ -\sqrt{6}e^{-2i\gamma}{}_2Y_2^0 & 3e^{-2i\gamma}{}_2Y_2^{-2} & 3e^{-2i\gamma}{}_2Y_2^2 & 0 \\ -\sqrt{6}e^{2i\gamma}{}_{-2}Y_2^0 & 3e^{2i\gamma}{}_{-2}Y_2^{-2} & 3e^{2i\gamma}{}_{-2}Y_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{15}Y_1^0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{G.31}$$

${}_sY_\ell^m = {}_sY_\ell^m(\beta,\alpha)$ はスピン調和関数 (spin harmonics) であり、Appnedix I に具体的に書き下してある。

$$\mathsf{P}(\theta,\phi;\tilde\theta,\tilde\phi) = \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2, \tag{G.32}$$

$$\mathsf{P}_0 = \sqrt{4\pi}\begin{pmatrix} Y_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{G.33}$$

$$\mathsf{P}_1 = 4\pi\sum_{m=-1}^{1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Y}_1^{m*}Y_1^m \end{pmatrix}, \tag{G.34}$$

$$\mathsf{P}_2 = 4\pi\sum_{m=-2}^{2}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \tilde{Y}_2^{m*}Y_2^m & -\sqrt{\frac{3}{2}}{}_2\tilde{Y}_2^{m*}Y_2^m & -\sqrt{\frac{3}{2}}{}_{-2}\tilde{Y}_2^{m*}Y_2^m & 0 \\ -\sqrt{6}\tilde{Y}_2^{m*}{}_2Y_2^m & 3{}_2\tilde{Y}_2^{m*}{}_2Y_2^m & 3{}_{-2}\tilde{Y}_2^{m*}{}_2Y_2^m & 0 \\ -\sqrt{6}\,\tilde{Y}_2^{m*}{}_{-2}Y_2^m & 3{}_2\tilde{Y}_2^{m*}{}_{-2}Y_2^m & 3{}_{-2}\tilde{Y}_2^{m*}{}_{-2}Y_2^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{G.35}$$

ただし、今度は ${}_sY_\ell^m = {}_sY_\ell^m(\theta,\phi)$, ${}_s\tilde{Y}_\ell^{m*} = {}_sY_\ell^{m*}(\tilde\theta,\tilde\phi)$ である。(G.34), (G.35) は、スピン調和関数の加法定理 (I.33) を用いて導ける。P_0, P_1, P_2 は、それぞれパターンの単極

(monopole), 双極 (dipole), 4 重極 (quadrupole) に寄与する成分である。明らかに、V は双極のみ、$Q \pm iU$ は 4 重極のみに寄与していることが分かる。

位相行列は $\boldsymbol{I}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \to \boldsymbol{I}(\theta, \phi)$ のマッピングを与える行列である。従って、$(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \to (\theta, \phi)$ という「回転」を施していると思えば良い。実際 ${}_sY_\ell^m(\theta, \phi)$ は、(ℓ, m, s) を持つ量の回転 $(0, 0) \to (\theta, \phi)$ であり、逆にその複素共役 ${}_sY_\ell^{m*}(\theta, \phi)$ は $(\theta, \phi) \to (0, 0)$ である。従って、積 ${}_sY_\ell^{m*}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}){}_sY_\ell^m(\theta, \phi)$ は $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \to (0, 0) \to (\theta, \phi)$ を与える。(G.33) – (G.35) の対角成分は $\boldsymbol{I}$ の各成分をそのまま回転させるが、非対角成分によって Θ, $Q \pm iU$ は互いに混合されることになる。一方、V は他の成分との混合が一切ないため、初期条件として $V = 0$ ならば、以降 V は生成されることはない。トムソン散乱は円偏光を生成できないのである。

また P_2 には、計算のチェックも兼ねて重要な規則を見出すことができる。スピン 2 の $Q + iU$ にからむ行列の成分 (2 行目と 2 列目) には、必ずスピン 2 の調和関数 ${}_2Y_\ell^m$ がある。2 列目は散乱前の $\tilde{Q} + i\tilde{U}$ にかかる ${}_2\tilde{Y}_\ell^{m*}$ が、2 行目は散乱後の $Q + iU$ を記述する ${}_2Y_\ell^m$ が、それぞれ必ず存在せねばならない。その他の成分についても同様である。さしずめ、${}_2\tilde{Y}_2^{m*}{}_{-2}Y_2^m$ の意味は「散乱前の $\tilde{Q} + i\tilde{U}$ を散乱後の $Q - iU$ にする変換」というところであろう。

3 Energy Transfer

前節ではエネルギー輸送を考えない場合の衝突積分を求めた。実際、最終散乱面 (last scattering surface) ではまだ電子と光子は熱平衡状態にあるため、電子から光子へのエネルギー輸送は全く問題にならない。しかし、光子が後に高温電子ガス中を通過するような状況が実現されれば、電子の温度が光子の温度を上回り、エネルギー輸送が起こる可能性がある。このような問題を解くためには、衝突積分をエネルギー輸送も考慮して求めねばならない。フルにコンプトン散乱による衝突積分を求める事は不可能であるため、エネルギー輸送の 2 次のオーダー、すなわち、$C[f_t]$ を光子のエネルギー変化 $\delta p = p' - p$ について 2 次まで展開し、近似的な衝突積分が Kompaneets によって求められた (Kompaneets 1957) [‖]。これは Kompaneets 方程式と呼ばれており、後に Sunyaev & Zel'dovich によって天文学的に応用され、スニヤエフ – ゼルドヴィッチ (SZ) 効果と呼ばれる重要な効果を発見するに至った (Zel'dovich & Sunyaev 1969; Sunyaev & Zel'dovich 1972)。また、再イ

[‖] 電子の静止系では常に弾性散乱 ($\tilde{p}' = \tilde{p}$) は良い近似であるが、電子が動く系においては (G.22) のようにエネルギー輸送 ($p' > p$) が起こり得る。

オン化した宇宙を光子が通過する場合、イオンのクランプは重力不安定性によって集団運動をしており、「運動的」エネルギー輸送が起こる可能性がある (Zel'dovich, Illarionov & Sunyaev 1972)。

Hu, Scott & Silk (1994) は、$C[f_t]$ を $p' - p$ に関してテイラー展開して各々のオーダーの項を順に拾い出してゆくことで、0 次の等方的トムソン散乱、非等方散乱、1 次のドップラー効果、2 次の Kompaneets 方程式とドップラー効果を系統的に導出している。ただし、偏光は無視する。

$$C[f_t] = C_0[f_t] + C_{v_b}[f_t] + C_{v_b^2}[f_t] + C_K[f_t] + O\left((p'-p)^3\right), \tag{G.36}$$

$$C_0[f_t] = \dot{\tau}_c\left[(f_{t0} - f_t) + \frac{1}{2}P_2(\cos\theta)f_{t2}\right], \tag{G.37}$$

$$C_{v_b}[f_t] = -\dot{\tau}_c\gamma_I v_b^I\left(p\frac{\partial f_t}{\partial p}\right), \tag{G.38}$$

$$C_{v_b^2}[f_t] = \dot{\tau}_c\left\{\left[(\gamma_I v_b^I)^2 + v_b^2\right]\left(p\frac{\partial f_t}{\partial p}\right) + \left[\frac{11}{20}(\gamma_I v_b^I)^2 + \frac{3}{20}v_b^2\right]\left(p^2\frac{\partial^2 f_t}{\partial p^2}\right)\right\}, \tag{G.39}$$

$$C_K[f_t] = \dot{\tau}_c\frac{1}{m_e p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{p^4\left[T_e\frac{\partial f_t}{\partial p} + f_t(1+f_t)\right]\right\}. \tag{G.40}$$

ただし、$f_{t\ell} \equiv \int P_\ell(\cos\theta)f_t(d\Omega/4\pi)$ で、これは ℓ 重極のモーメントである。CMB のスペクトルの、ボーズ – アインシュタイン分布 (F.18) からのズレは非常に小さいので、f_t の p 微分に関しては

$$p\frac{\partial f_t}{\partial p} = -zf_t(1+f_t) = -\frac{ze^z}{(e^z-1)^2}, \tag{G.41}$$

$$p^2\frac{\partial^2 f_t}{\partial p^2} = z^2 f_t(1+f_t)(1+2f_t) = \frac{z^2e^z}{(e^z-1)^2}\coth\frac{z}{2} \tag{G.42}$$

を使うことができる。ここで、$z \equiv p/T$ である。Θ に関するボルツマン方程式の衝突項 (F.30) を求めれば、

$$\mathcal{G}_0 = \dot{\tau}_c\left[(\Theta_0 - \Theta) + \frac{1}{2}P_2(\cos\theta)\Theta_2\right], \tag{G.43}$$

$$\mathcal{G}_{v_b} = \dot{\tau}_c\gamma_I v_b^I, \tag{G.44}$$

$$\mathcal{G}_{v_b^2} = z(1+2f_t)\dot{\tau}_c\left[\frac{11}{20}(\gamma_I v_b^I)^2 + \frac{3}{20}v_b^2\right] - \dot{\tau}_c\left[(\gamma_I v_b^I)^2 + v_b^2\right], \tag{G.45}$$

$$\mathcal{G}_K = [z(1+2f_t) - 4]\left(\dot{\tau}_c\frac{T_e - T}{m_e}\right). \tag{G.46}$$

(G.43) は前節の結果と同じであり、偏光を無視した極限でのトムソン散乱による等方、非等方散乱の寄与である。(G.44) は、電子の静止系からのローレンツ変換によって生じた項である。光子はドップラー効果による赤方偏移、もしくは青方偏移を受けるが、ネットでのエネルギー輸送は起こらずスペクトルの形を変えることはない。(G.45) は 2 次のドップラー効果による寄与であり、電子の集団運動に起因するエネルギー輸送が存在する。(G.46) は Kompaneets 方程式であり、電子の熱的運動によってエネルギー輸送が存在する。ただし、電子と光子が熱平衡状態にある時は $T_e = T$ であるため、エネルギーの輸送は起こらない。

(G.45) と (G.46) は、電子の運動形態こそ違うが、本質的には同じ現象である。このことをよりはっきり見るため、再イオン化した宇宙において、光子がイオンクランプに多数回散乱を受けるような状況を考える。この時、$\mathcal{G}$ を v_b^I について平均化することが意味を持つ。まず、1 次のドップラー効果は $\left\langle \gamma_I v_b^I \right\rangle = 0$ で残らない。2 次は、$\left\langle (\gamma_I v_b^I)^2 \right\rangle = \langle v_b^2 \rangle /3$ より

$$\mathcal{G}_{v_b^2} = [z(1+2f_t) - 4]\left(\dot{\tau}_c \frac{\langle v_b^2 \rangle}{3}\right). \tag{G.47}$$

従って (G.45) と (G.46) は、電子が「集団運動的」か「熱運動的」かの違いだけで本質的には同じ寄与であり、光子にエネルギーを輸送し、スペクトルを変形させる効果であることが分かる。しかし、多数回散乱が起きるような状況では光子と電子の速度は同じになり、ドップラー効果の寄与はなくなってしまう。また、電子と光子のカップリングが不完全であっても、クランプの速度が非常に相対論的でなければ観測可能な影響を与えることができないため、$\mathcal{G}_{v_b^2}$ によるスペクトルの変形は常に無視しうる。

付 録H　Multipole Expansion

天球上の温度や偏光のパターンを解析する際、パターンを多重極展開 (multipole expansion) する手法が広く使われている。この章では、Hu & White (1997b), Hu, Seljak, White & Zaldarriaga (1998) らによって定式化された「全角運動量法 (total angular momentum method)」に従ってモード関数を定義する。

スピン s を持つ関数 ${}_sF(\tau, \boldsymbol{x}, \gamma)$ を、モード関数 ${}_sG_\ell^m$ で多重極展開する。

$$ {}_sF(\tau, x^i, \gamma^i) = \sum_\ell \sum_m {}_sF_\ell^{(m)}(\tau) {}_sG_\ell^m(x^i, \gamma^i). \tag{H.1} $$

- orthonormality

$$ \int d\Omega \ {}_sG_{\ell'}^{m'*} {}_sG_\ell^m = \frac{4\pi}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}. \tag{H.2} $$

1　Mode Function in Flat Space

平坦な時空では、ラプラシアンの固有関数が $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ なので

$$ {}_sG_\ell^m = (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} {}_sY_\ell^m(\gamma^i) \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}). \tag{H.3} $$

- recursion relation

$$ \begin{aligned} \gamma^i \left({}_sG_\ell^m\right)_{|i} &= i\sqrt{\frac{4\pi}{3}} k Y_1^0 {}_sG_\ell^m \\ &= k\left[\frac{{}_sc_\ell^m}{2\ell+1} {}_sG_{\ell-1}^m - \frac{{}_sc_{\ell+1}^m}{2\ell+1} {}_sG_{\ell+1}^m - i\frac{ms}{\ell(\ell+1)} {}_sG_\ell^m\right], \end{aligned} \tag{H.4} $$

$$ {}_sc_\ell^m = \sqrt{\frac{(\ell^2-m^2)(\ell^2-s^2)}{\ell^2}}. \tag{H.5} $$

異なる「角運動量量子数」を持つ Y_1^0 と ${}_sY_\ell^m$ の合成には、「クレブシュ – ゴルダン関係 (Clebsh-Gordan relation)」(I.38) を用いた。

2 Mode Function in Curved Space

$$ {}_sG_j^m = \sum_\ell (-i)^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\, {}_s\alpha_\ell^{(jm)}(\chi, q)\, {}_sY_\ell^m(\gamma^i), \tag{H.6}$$

$$ \gamma_{ij}dx^i dx^j = (-\kappa)^{-1}\left[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right], \tag{H.7}$$

$$ q^2 = k^2 + (|m|+1)\kappa, \tag{H.8}$$

$$ \gamma^i \left({}_s\alpha_\ell^{(jm)}\right)_{|i} = q\left[\frac{{}_s\kappa_\ell^m}{2\ell+1}{}_s\alpha_{\ell-1}^{(jm)} - \frac{{}_s\kappa_{\ell+1}^m}{2\ell+1}{}_s\alpha_{\ell+1}^{(jm)} - i\frac{ms}{\ell(\ell+1)}{}_s\alpha_\ell^{(jm)}\right], \tag{H.9}$$

$$ {}_s\kappa_\ell^m = {}_sc_\ell^m \frac{k}{q}\sqrt{1-(\ell^2-|m|-1)\kappa/k^2}. \tag{H.10}$$

- recursion relation

$$\begin{aligned} \gamma^i\left({}_sG_\ell^m\right)_{|i} &= k\left[\frac{{}_sc_\ell^m}{2\ell+1}\sqrt{1-(\ell^2-|m|-1)\kappa/k^2}\ {}_sG_{\ell-1}^m \right. \\ &\quad -\frac{{}_sc_{\ell+1}^m}{2\ell+1}\sqrt{1-\left((\ell+1)^2-|m|-1\right)\kappa/k^2}\ {}_sG_{\ell+1}^m \\ &\quad \left. - i\frac{ms}{\ell(\ell+1)}\sqrt{1+(|m|+1)\kappa/k^2}\ {}_sG_\ell^m\right]. \end{aligned}$$

3 Relations between Mode Functions: $Q^{(m)}$ & G_ℓ^m

Appendix D で定義したモード関数 $\mathbf{Q}^{(m)}$ との関係は、

- スカラーモード

$$ Q^{(0)} = G_0^0, \tag{H.11}$$

$$ \gamma^i Q_i^{(0)} = G_1^0, \tag{H.12}$$

$$ \gamma^i\gamma^j Q_{ij}^{(0)} = \frac{2}{3}\sqrt{1-3\kappa/k^2}\ G_2^0. \tag{H.13}$$

- ベクターモード

$$ \gamma^i Q_i^{(\pm1)} = G_1^{\pm1}, \tag{H.14}$$

$$ \gamma^i\gamma^j Q_{ij}^{(\pm1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2\kappa/k^2}\ G_2^{\pm1}. \tag{H.15}$$

- テンサーモード

$$ \gamma^i\gamma^j Q_{ij}^{(\pm2)} = G_2^{\pm2}. \tag{H.16}$$

付 録I Hyper Geometrical Functions

1 Legendre Polynominals

1.1 Legendre function: $P_\ell(x)$

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, &\text{(I.1)}\\
P_1(x) &= x, &\text{(I.2)}\\
P_2(x) &= \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), &\text{(I.3)}
\end{aligned}
$$

$$P_\ell(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_\ell^0(\theta). \tag{I.4}$$

- parity flip

$$P_\ell\left(\cos(\pi-\theta)\right) = (-1)^\ell P_\ell(\cos\theta). \tag{I.5}$$

- orthonormality

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell(x)P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\ \delta_{\ell\ell'}. \tag{I.6}$$

- recursion relations

$$
\begin{aligned}
(\ell+1)P_{\ell+1}(x) - (2\ell+1)xP_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) &= 0, &\text{(I.7)}\\
(2\ell+1)P_\ell(x) &= P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x), &\text{(I.8)}\\
(1-x^2)P'_\ell(x) + \ell xP_\ell(x) &= \ell P_{\ell-1}(x), &\text{(I.9)}\\
(1-x^2)P'_\ell - (\ell+1)xP_\ell(x) &= -(\ell+1)P_{\ell+1}(x). &\text{(I.10)}
\end{aligned}
$$

1.2 generalized Legendre function: $P_\ell^m(x)$

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_\ell(x), \tag{I.11}$$

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x). \tag{I.12}$$

- parity flip

$$P_\ell^m\left(\cos(\pi-\theta)\right) = (-1)^{\ell+m}P_\ell^m(\cos\theta). \tag{I.13}$$

- orthonormality

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell^m(x)P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\ \delta_{\ell\ell'}, \tag{I.14}$$

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell^m(x)P_{\ell'}^{-m}(x) = (-1)^m\frac{2}{2\ell+1}\ \delta_{\ell\ell'}. \tag{I.15}$$

2 Spin Harmonics: ${}_sY_\ell^m(\theta,\phi)$

スピン s の調和関数 ${}_sY_\ell^m$ は、スピン 0 の調和関数 (球面調和関数) Y_ℓ^m にスピン昇降演算子を s 回作用させることで得られる (Newman & Penrose 1966)。

$$ {}_sY_\ell^m(\theta,\phi) = \left[\frac{(\ell-s)!}{(\ell+s)!}\right]^{1/2}\wp^s\left(Y_\ell^m\right) \qquad (0\le s\le l), \tag{I.16}$$

$$ = (-1)^s\left[\frac{(\ell+s)!}{(\ell-s)!}\right]^{1/2}\bar{\wp}^{-s}\left(Y_\ell^m\right) \qquad (-l\le s\le 0). \tag{I.17}$$

$\wp$, $\bar{\wp}$ は、それぞれスピンを一つ上げ下げする昇降オペレーターである。

$$\wp\left({}_sY_\ell^m\right) = \sqrt{(\ell-s)(\ell+s+1)}\ {}_{s+1}Y_\ell^m, \tag{I.18}$$

$$\bar{\wp}\left({}_sY_\ell^m\right) = -\sqrt{(\ell+s)(\ell-s+1)}\ {}_{s-1}Y_\ell^m, \tag{I.19}$$

$$\bar{\wp}^p\wp^p\left({}_sY_\ell^m\right) = (-1)^p\frac{(\ell-s)!(\ell+s+p)!}{(\ell+s)!(\ell-s-p)!}\ {}_sY_\ell^m. \tag{I.20}$$

具体的に書き下せば、スピン s を持つ関数 ${}_sF$ に対し

$$\wp\left({}_sF\right) = -\sin^s\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\sin^{-s}\theta_sF, \tag{I.21}$$

$$\bar{\wp}\left({}_sF\right) = -\sin^{-s}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\sin^{s}\theta_sF. \tag{I.22}$$

- complex conjugate

$$ {}_sY_\ell^{m*} = (-1)^{s+m} {}_{-s}Y_\ell^{-m}. \tag{I.23} $$

- parity flip

$$ {}_sY_\ell^m(\pi-\theta, \phi-\pi) = (-1)^\ell {}_{-s}Y_\ell^m(\theta,\phi). \tag{I.24} $$

- orthonormality

$$ \int d\Omega \ {}_sY_{\ell'}^{m'*}(\theta,\phi) {}_sY_\ell^m(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}. \tag{I.25} $$

- completeness

$$ \sum_{l,m} {}_sY_\ell^{m*}(\theta',\phi') {}_sY_\ell^m(\theta,\phi) = \delta\left(\cos\theta - \cos\theta'\right)\delta\left(\phi-\phi'\right). \tag{I.26} $$

- rotation matrix

${}_sY_\ell^m$ は、スピン s を持つ量を回転させる行列でもある。

$$ \mathcal{D}^\ell_{-s,m}(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} {}_sY_\ell^m(\beta,\alpha)e^{-is\gamma}. \tag{I.27} $$

α, β, γ は、座標系の任意の回転変換をあらわす「オイラー角 (Euler angle)」である (砂川 1991, pp.152)。ただし、回転は反時計まわり (右ねじ) にとってある。例としてスピン 1 を持つ状態をオイラー角 (α,β,γ) だけ回転させれば、状態に作用する回転行列は (砂川 1991, pp.164):

$$ U^{-1}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha\hat{J}_3}e^{-i\beta\hat{J}_2}e^{-i\gamma\hat{J}_3}, \tag{I.28} $$

$$ = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \begin{pmatrix} {}_1Y_1^1 e^{-i\gamma} & Y_1^1 & {}_{-1}Y_1^1 e^{i\gamma} \\ {}_1Y_1^0 e^{-i\gamma} & Y_1^0 & {}_{-1}Y_1^0 e^{i\gamma} \\ {}_1Y_1^{-1} e^{-i\gamma} & Y_1^{-1} & {}_{-1}Y_1^{-1} e^{i\gamma} \end{pmatrix}. \tag{I.29} $$

${}_{\pm1}Y_\ell^m = {}_{\pm1}Y_\ell^m(\beta,\alpha)$, $Y_\ell^m = Y_\ell^m(\beta,\alpha)$ であり、

$$ {}_1Y_1^0(\beta,\alpha) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\beta, \tag{I.30} $$

$$ {}_1Y_1^{\pm1}(\beta,\alpha) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}(1\mp\cos\beta)e^{\pm i\alpha}, \tag{I.31} $$

$$ {}_{-1}Y_1^{\pm1}(\beta,\alpha) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}(1\pm\cos\beta)e^{\pm i\alpha}. \tag{I.32} $$

- addition theorem

  ${}_sY_\ell^m$ は回転行列であることが確かめられたので、加法定理を導くことができる。

$$\sum_m {}_{s_1}Y_\ell^{m*}(\tilde{\theta},\tilde{\phi})_{s_2}Y_\ell^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}{}_{s_2}Y_\ell^{-s_1}(\beta,\alpha)e^{-is_2\gamma}. \tag{I.33}$$

  (α,β,γ) は、$(\tilde{\theta},\tilde{\phi})$ と (θ,ϕ) を結ぶ回転変換のオイラー角である。特に $s_1=s_2=0$ の時、良く知られた式:

$$\sum_m Y_\ell^{m*}(\tilde{\theta},\tilde{\phi})Y_\ell^m(\theta,\phi)=\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\beta). \tag{I.34}$$

  を得る。

- Clebsch-Gordan relation 量子力学の言葉では、スピン調和関数 ${}_sY_\ell^m$ は「軌道角運動量量子数」ℓ, 「磁気量子数」m, 「スピン角運動量量子数」s を持つ状態の固有関数である。異なる軌道/スピン角運動量を持つ状態を合成する処方箋は量子力学の枠組みの中で定式化されており、「クレブシュ – ゴルダン係数 (Clebsch-Gordan coeffecient)」を用いて合成された状態を展開することができる (砂川 1991, pp.167)。

$$\begin{aligned}|\ell_1,\ell_2;\ell,m\rangle &= \sum_{m_1,m_2}|\ell_1,\ell_2;m_1,m_2\rangle\langle\ell_1,\ell_2;m_1,m_2|\ \ell_1,\ell_2;\ell,m\rangle, &\text{(I.35)}\\ |\ell_1,\ell_2;\ell,-s\rangle &= \sum_{s_1,s_2}|\ell_1,\ell_2;-s_1,-s_2\rangle\langle\ell_1,\ell_2;-s_1,-s_2|\ \ell_1,\ell_2;\ell,-s\rangle. &\text{(I.36)}\end{aligned}$$

  ここで、$|\ell_1,\ell_2;m_1,m_2\rangle$ は 2 つの状態の軌道角運動量オペレータ $\boldsymbol{L}_1^2$, $\boldsymbol{L}_2^2$、その 3 軸成分のオペレータ $L_{1,z}$, $L_{2,z}$ の同時固有状態であり、$|\ell_1,\ell_2;\ell,m\rangle$ は $\boldsymbol{L}_1^2$, $\boldsymbol{L}_2^2$ と合成された軌道角運動量 $\boldsymbol{L}^2$, L_z の同時固有状態である。$m\to -s$ は、スピンオペレータに関する同様の定義である。ただし、軌道角運動量とスピン角運動量は合成しない。

$$\begin{aligned}&{}_{s_1}Y_{\ell_1}^{m_1}\,{}_{s_2}Y_{\ell_2}^{m_2}\\ = &\sqrt{\frac{2\ell_1+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{2\ell_2+1}{4\pi}}\\ &\times\sum_{\ell,m,s}\langle\ell_1,\ell_2;m_1,m_2|\ \ell_1,\ell_2;\ell,m\rangle\langle\ell_1,\ell_2;-s_1,-s_2|\ \ell_1,\ell_2;\ell,-s\rangle\\ &\times\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}{}_sY_\ell^m. &\text{(I.37)}\end{aligned}$$

  ボルツマン方程式の左辺で必要になる例は、

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\,{}_sY_\ell^m$$

$$= \frac{{}_s c_\ell^m}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell-1)}} {}_s Y_{\ell-1}^m + \frac{{}_s c_{\ell+1}^m}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} {}_s Y_{\ell+1}^m - \frac{ms}{\ell(\ell+1)} {}_s Y_\ell^m, \quad \text{(I.38)}$$

$${}_s c_\ell^m = \sqrt{\frac{(\ell^2-m^2)(\ell^2-s^2)}{\ell^2}}. \quad \text{(I.39)}$$

2.1 spin-0 (spherical harmonics): $Y_\ell^m(\theta,\phi)$

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{1/2} P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \quad \text{(I.40)}$$

$$Y_\ell^{m*} = (-1)^m \; Y_\ell^{-m}. \quad \text{(I.41)}$$

文献によっては、

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \epsilon\left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{1/2} P_\ell^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}, \quad \text{(I.42)}$$

$$\epsilon = \begin{cases} (-1)^m & (m>0), \\ 1 & (m \le 0), \end{cases} \quad \text{(I.43)}$$

$$Y_\ell^{m*} = Y_\ell^{-m}. \quad \text{(I.44)}$$

m が奇数の時、両者は符号が異なるので注意する。

- $m = 0$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \text{(I.45)}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad \text{(I.46)}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right). \quad \text{(I.47)}$$

- $m = \pm 1$

$$Y_1^{\pm1} = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, \quad \text{(I.48)}$$

$$Y_2^{\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}. \quad \text{(I.49)}$$

- $m = \pm 2$

$$Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}. \quad \text{(I.50)}$$

2.2 spin-2: ${}_{\pm 2}Y_\ell^m(\theta,\phi)$

$$ {}_{\pm 2}Y_\ell^m(\theta,\phi) = \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\right]^{1/2} \left(W_\ell^m \pm i X_\ell^m\right), \tag{I.51} $$

$$ W_\ell^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) Y_\ell^m, \tag{I.52} $$

$$ X_\ell^m = \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\right) Y_\ell^m. \tag{I.53} $$

ここで、W_ℓ^m は $(-1)^\ell$ のパリティを持つが、 X_ℓ^m は パリティ$(-1)^{\ell+1}$ であることは重要である (Kamionkowski, Kosowski & Stebbins 1997) * 。すなわち、(I.51) から明らかなように ${}_{\pm 2}Y_\ell^m$ の線形結合

$$ \left({}_2Y_\ell^m + {}_{-2}Y_\ell^m\right)/2 = \left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\right]^{1/2} W_\ell^m, \tag{I.54} $$

$$ \left({}_2Y_\ell^m - {}_{-2}Y_\ell^m\right)/2 = i\left[\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}\right]^{1/2} X_\ell^m \tag{I.55} $$

より、異なるパリティを持つ調和関数をつくることができるのである。

- $m=0$

$$ {}_{\pm 2}Y_2^0 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta. \tag{I.56} $$

- $m=\pm 1$

$$ {}_2Y_2^{\pm 1} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\sin\theta\left(1\mp\cos\theta\right)e^{\pm i\phi}, \tag{I.57} $$

$$ {}_{-2}Y_2^{\pm 1} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\sin\theta\left(1\pm\cos\theta\right)e^{\pm i\phi}. \tag{I.58} $$

- $m=\pm 2$

$$ {}_2Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{5}{64\pi}}\left(1\mp\cos\theta\right)^2 e^{\pm 2i\phi}, \tag{I.59} $$

$$ {}_{-2}Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{5}{64\pi}}\left(1\pm\cos\theta\right)^2 e^{\pm 2i\phi}. \tag{I.60} $$

* Zerilli (1970); 中村, 三尾, 大橋 (1998, pp.101) では、X_ℓ^m の定義は $\sin\theta$ 異なり、パリティ $(-1)^\ell$ を持つ量としている。

3 Bessel Function: $J_\ell(x)$

$$
\begin{aligned}
J_0(0) &= 1, && \text{(I.61)}\\
J_\ell(0) &= 0 \qquad \text{for } \ell \neq 0, && \text{(I.62)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty J_\ell(x)dx &= 1, && \text{(I.63)}\\
\int_0^a xJ_0(x)dx &= aJ_1(a). && \text{(I.64)}
\end{aligned}
$$

- Bessel's integral formulae

$$J_\ell(x) = \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{d\phi}{2\pi} \exp\left(i(\ell\phi - x\sin\phi)\right). \tag{I.65}$$

特に $\ell = 0$ の時、

$$J_0(x) = \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{d\phi}{2\pi} \exp\left(-ix\sin\phi\right) = \int_{\alpha-\pi/2}^{3\pi/2+\alpha} \frac{d\phi}{2\pi} \exp\left(-ix\cos\phi\right). \tag{I.66}$$

最後の等号は $\phi \to \phi + \pi/2$ として求められる。

4 Spherical Bessel Function: $j_\ell(x)$

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x), \tag{I.67}$$

$$
\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}, && \text{(I.68)}\\
j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, && \text{(I.69)}
\end{aligned}
$$

$$\int_0^\infty j_\ell(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left[(\ell+1)/2\right]}{\Gamma\left[(\ell+2)/2\right]} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}}. \tag{I.70}$$

最後の近似は、$\ell \gg 1$ でのスターリング (Stirling) 近似である。

- recursion relation

$$
\begin{aligned}
(2\ell+1)j_\ell(x) &= xj_{\ell-1}(x) + xj_{\ell+1}(x), && \text{(I.71)}\\
(2\ell+1)j'_\ell(x) &= \ell j_{\ell-1}(x) - (\ell+1)j_{\ell+1}(x). && \text{(I.72)}
\end{aligned}
$$

- Rayleigh's formulae

$$\exp(-ikr\cos\theta) = \sum_\ell (2\ell+1)(-i)^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta) \tag{I.73}$$

$$= \sum_\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}(-i)^\ell j_\ell(kr) Y_\ell^0(\theta) \tag{I.74}$$

$$= \sum_{\ell,m} 4\pi(-i)^\ell j_\ell(kr) Y_\ell^{m*}(\hat{k}) Y_\ell^m(\hat{q}). \tag{I.75}$$

ただし、$\hat{k}\cdot\hat{q} = \cos\theta$。

付 録J　Correspondences

線形摂動量の記法は、文献によりまちまちでありしばしば混乱を招く。この章では、主な文献と本論文の量との対応関係を示し、文献間の変換をスムーズにすることを狙いとする。

1 Metric Perturbations

	Bardeen (1980)	*Kodama & Sasaki* (1984)	*Mukhanov et al.* (1992)
metric sign	$-+++$	$-+++$	$+---$
$\bar{N}$	S	a	a
$h_{00}^{(S)}$	$-2AQ^{(0)}$	$-2AY$	-2ϕ
$h_{0i}^{(S)}$	$-B^{(0)}Q_i^{(0)}$	$-BY_i$	$B_{\|i}$
$h_{ij}^{(S)}$	$2H_L Q^{(0)3}g_{ij} + 2H_T^{(0)}Q_{ij}^{(0)}$	$2H_L Y\gamma_{ij} + 2H_T Y_{ij}$	$-2\psi\gamma_{ij} + 2E_{\|ij}$
$h_{0i}^{(V)}$	$-B^{(1)}Q_i^{(1)}$	$-B^{(1)}Y_i^{(1)}$	$-S_i$
$h_{ij}^{(V)}$	$2H_T^{(1)}Q_{ij}^{(1)}$	$2H_T^{(1)}Y_{ij}^{(1)}$	$F_{i\|j} + F_{j\|i}$
$h_{ij}^{(T)}$	$2H_T^{(2)}Q_{ij}^{(2)}$	$2H_T^{(2)}Y_{ij}^{(2)}$	h_{ij}

	Ma & Bertschinger (1995)	*Bond* (1996)	*Hu* (1997)
metric sign	$-+++$	$-+++$	$-+++$
$\bar{N}$	a	a	a
$h_{00}^{(S)}$	-2ψ	-2ν	$-2\Psi Q^{(0)}$
$h_{0i}^{(S)}$	$w_i^{\parallel}$	$\frac{1}{a}\Psi_{n\|i}$	—
$h_{ij}^{(S)}$	$-2\phi\delta_{ij} + \chi_{ij}^{\parallel}$	$2\varphi^{(3)}g_{*ij} - \left(\psi_{\|ij} + \psi_{\|ji}\right)$	$2\Phi Q^{(0)}\delta_{ij}$
$h_{0i}^{(V)}$	$w_i^{\perp}$	$\frac{1}{a^2}N_i^{(V)}$	$-VQ_i^{(1)}$
$h_{ij}^{(V)}$	$\chi_{ij}^{\perp}$	$h_{ij}^{(V)}$	—
$h_{ij}^{(T)}$	χ_{ij}^{T}	$h_{ij}^{(TT)}$	$2HQ_{ij}^{(2)}$

	Hwang & Noh (1998)	*Takada* (1998)
metric sign	$-+++$	$-+++$
$\bar{N}$	a	1
$h_{00}^{(S)}$	-2α	$-2\tilde{\alpha}$
$h_{0i}^{(S)}$	$-\beta_{,i}$	$a\beta_{L,i}$
$h_{ij}^{(S)}$	$2\varphi g_{ij}^{(3)} + 2\gamma_{,i\|j}$	$2\phi\delta_{ij} + \left(h_{L,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta_f h_L\right)$
$h_{0i}^{(V)}$	$-bY_i^{(v)}$	$a\beta_T^i$
$h_{ij}^{(V)}$	$c\left(Y_{i\|j}^{(v)} + Y_{j\|i}^{(v)}\right)$	$h_{T,j}^i + h_{T,i}^j$
$h_{ij}^{(T)}$	$2C_{ij}^{(t)}$	h_{TTij}

2 Gauge Invariants

This Thesis	*Bardeen* (1980)	*Kodama & Sasaki* (1984)	*Mukhanov et al.* (1992)
Φ_A	Φ_A	Ψ	Φ
Φ_H	Φ_H	Φ	Ψ
ϵ_g	ϵ_g	$\mathit{\Delta}_s$	—
ϵ_m	ϵ_m	$\mathit{\Delta}$	$\delta\varepsilon_m^{(\mathrm{gi})}$
ϵ_ζ	—	$\mathit{\Delta}_g$	—
$V_s^{(0)}$	$v_s^{(0)}$	V	—
$V_s^{(1)}$	$v_s^{(1)}$	$V_s^{(1)}$	—
$V_c^{(1)}$	$v_c^{(1)}$	$V^{(1)}$	—

3 Temperature Fluctuations

This Thesis	*Hu & White* (1997)	*Bond* (1996)	*Zaldarriaga & Seljak* (1997)
Θ, Q, U, V	Θ, Q, U, V	Δ_t, Δ_Q, Δ_U, Δ_V	T, Q, U, V
$\Theta_\ell^{(0)}$	$\Theta_\ell^{(0)}$	$(2\ell+1)\Delta_{t\ell}^{(S)}$	$(2\ell+1)\Delta_\ell^{(S)}$
$\Theta_\ell^{(1)}$	$\Theta_\ell^{(1)}$	—	—
$\Theta_\ell^{(2)}$	$\Theta_\ell^{(2)}$	$(2\ell+1)\Delta_{t\ell}^{(T)}/\sqrt{2}$	$(2\ell+1)\Delta_\ell^{(T)}/\sqrt{2}$