目 次

第 1 章　概観 —CMB 研究の歴史— **2**

1　1948 年—CMB の誕生と衰退: Gamow, Alpher & Herman 2

2　1951 年—CMB 観測前史: Tanaka et al. 3

3　1964 年—CMB 復活: Dicke & Peebles 3

4　1965 年—そして検出へ: Penzias & Wilson 4

4.1　2.7K 黒体放射 5

5　1967 年—CMB の温度は一様ではない?: Sachs & Wolfe 5

6　1968 年—ダンプする温度ゆらぎ: Silk 7

6.1　バリオンモデルにおける Silk 減衰 8

6.2　CDM モデルにおける Silk 減衰 9

7　1969 年—高温電子のイタズラ: Zel'dovich & Sunyaev 10

7.1　Sunyaev–Zel'dovich 効果 10

7.2　y パラメター 11

8　1970 年—ドップラーピーク: Peebles & Yu 11

8.1　バリオンモデルにおけるドップラーピーク 13

9　1987 年—完成された理論 I: Bond & Efstathiou 14

9.1　CDM モデルにおけるドップラーピーク 15

10　1988 年—CMB は黒体ではない?!: Matsumoto et al. 16

11　1990 年—完璧な黒体: COBE/FIRAS 18

11.1　FIRAS 19

12　1992 年—0.001%のゆらぎ: COBE/DMR 19

12.1　DMR 20

12.2　Sachs–Wolfe 効果の角度相関パワースペクトル 20

12.3　ゆらぎの大きさ 23

13 1995 年—完成された理論 II: Hu & Sugiyama 24
13.1 「動的」Sachs–Wolfe 効果と $\Omega_{\rm m}h^2$ 25
13.2 $\Omega_{\rm b}h^2$ を決める 26
14 2000 年—5%の宇宙論: MAP 29

第 2 章 宇宙の晴れ上がり **34**
1 一様等方膨張宇宙における諸量 34
1.1 Newton 的描像による Friedmann 方程式の導出 34
1.2 Hubble パラメターと密度パラメター 34
1.3 宇宙論パラメターあれこれ 36
1.4 Hubble パラメターの近似式 36
1.5 共形時間の近似式 37
1.6 共動角径距離と共形時間の関係 37
1.7 共動角径距離の近似式 38
2 晴れ上がる宇宙 38
2.1 電離平衡近似は正しいか 39
2.2 再結合のプロセス 40
2.3 脱結合とヴィジビリティ 41

第 3 章 温度ゆらぎと物質ゆらぎの進化 I **45**
1 基礎方程式 45
2 エントロピーゆらぎの時間発展 47
3 非等方ストレスの役割 47
4 スーパーホライズンスケールの解 47
4.1 放射優勢期 $(w = 1/3)$ 48
4.2 物質優勢期 $(w = 0)$ 50
5 スーパーホライズンスケールの温度ゆらぎ 51
5.1 断熱ゆらぎ: $S(0) = 0$ 54
5.2 等曲率ゆらぎ: $\Phi_{\rm H}(0) = 0$ 55

第 4 章 温度ゆらぎと物質ゆらぎの進化 II **56**
1 物質の運動方程式 56

1.1 晴れ上がり以降の物質ゆらぎの進化 56
2 放射の運動方程式 58
2.1 タイトカップリング近似 58
2.1.1 0 次解 59
2.1.2 1 次解: $\Omega_{\rm b}h^2$ と $\Omega_{\rm m}h^2$ 60
2.1.3 2 次解: Silk 減衰 64
3 観測される角度スケールと $\Omega_{\rm m}+\Omega_\Lambda$ 66

第 5 章 観測 HOWTO **69**
1 角度相関スペクトル 69
1.1 2 点相関関数との関係 69
1.2 温度パターンの多重極展開 70
2 ウインドー関数 70
2.1 アンテナビームパターン 71
2.2 チョッピング観測 71
2.3 干渉計 74
3 ノイズレベルの評価 77

第1章　概観 —CMB研究の歴史—

1　1948年—CMBの誕生と衰退: Gamow, Alpher & Herman

宇宙背景放射 (CMB) に対するこれまでの研究の歴史を概観してみようと思う。CMB の研究にまつわる有名なエピソードは多いが、ここでは終戦後の 1940 年後半における George Gamow の仕事からスタートする。Edwin Hubble による 1929 年の宇宙膨張の発見により、静的ではなく動的に膨張・進化する宇宙が論じられるようになったわけだが、その自然な帰結として、宇宙初期における高温・高密度状態がその後の膨張によって冷えてゆくという描像を考える事ができる。この点に着目した Gamow は、陽子による中性子捕獲:

$$\mathrm{n} + \mathrm{p} \to \mathrm{D} + \gamma$$

が契機となって元素合成が起こり、さらに D が ^{4}He を生成し... といったように現在宇宙に存在する元素全てを宇宙初期に生成しようとした。しかし高温宇宙においては、中性子捕獲で生成された D は逆過程である光分解反応によってすぐ壊されてしまう。宇宙が $T \sim 10^9$ K まで冷えると、光は D を分解するだけのエネルギーを持たないため中性子捕獲が進むようになる。彼は、D が生成される条件を

$$\langle \sigma v \rangle \, n_{\mathrm{b}} t \sim 1 \tag{1.1}$$

とし、$T \sim 10^9$ K での宇宙年齢 $t \sim 200$ sec を用いて $n_{\mathrm{b}} \sim 10^{18}$ cm^{-3} を得た (Gamow 1948)。$\langle \sigma v \rangle$ は、散乱断面積と相対速度の熱平均である。この値の持つ意味は大きい。Gamow 自身は論文の中で触れていないが、$T \sim 10^9$ K での n_{b} を現在の値 $\sim 10^{-7}$ と比較してやれば、$n_{\mathrm{b}} \propto T^3$ より現在の温度 $T_{\gamma 0}$ を

$$T_{\gamma 0} \sim 10^9 \text{ K} \times \left(\frac{10^{-7}}{10^{18}} \right)^{1/3} \sim 5 \text{ K} \tag{1.2}$$

と見積もる事ができる。Gamow の仕事を受け、Ralph Alpher と Robert Herman はこのような議論によって宇宙初期の光は現在 5 K 程度の温度を持つだろうと結論した (Alpher & Herman 1949)。CMB である。

しかし Gamow の理論では、彼自身が後に指摘しているように、質量数 5 の安定な元素が存在しないため初期宇宙における元素合成は ^{4}He でストップし、それより重い元素は ^{7}Li, ^{7}Be がほんのわずかに生成されるだけである。^{4}He の質量比率が 0.24 程度なのに対し、^{7}Li, ^{7}Be は 10^{-10} のオーダーである。この「欠点」のため Gamow の理論は忘れられ、Alpher & Herman の仕事もまた、忘れられる事となった。今日ではこれは「欠点」ではなく、^{4}He までの軽元素の存在量は上記の元素合成で説明でき、それ以上の重元素は星内部で生成されるとされている。

2 1951 年—CMB 観測前史: Tanaka et al.

後述するように 1965 年の CMB の検出は有名だが、それより 14 年も前の 1951 年、名古屋大学空電研究所 (現在の ST 研) の田中春夫のグループにより空の絶対温度が $0-5$ K であるという報告がされていた。しかし掲載された雑誌が日本語のものであった (名古屋大学空電研究所報告) のと、その 2 年後に創刊された同研究所の英文誌も天文・物理業界になじみが薄かったため、広く知られる事はなかった。

彼らは、太陽電波の観測の際のキャリブレータとして空の温度を用いようと考えた。それよりも前に空の温度が 50 K であるという報告がなされていたが、田中らはその値が大きすぎると考え再測定を行なった結果、波長 8 cm で上記の温度を得たのだった。戦後間もない時期で設備も不十分な状態にも関わらず、5 K というシビアな上限値を得ていた事は驚きである。後述の松本らも含め、少なくとも、CMB そのものの測定においては日本人もがんばっているのである。

3 1964 年—CMB 復活: Dicke & Peebles

—1964 年, Princeton University, New Jersey— すっかり忘れられていた CMB であったが、Princeton 大学の Robert Dicke は、Gamow, Alpher & Herman の仕事を「全く知らないまま」、独立に CMB の存在可能性に気づいていた。彼は理論・観測・実験全てをこなすオールラウンドプレイヤーであり、実験を指揮するかたわら、理論的研究を同じく Princeton 大

学の Jim Peebles に行なうよう勧めたのであった。そのアイデアのとりことなった Peebles は精力的に計算をすすめ、温度 10 K の黒体放射を予言する論文を Physical Review に投稿した。1965 年の事である。結果はリジェクトであった。Gamow および Alpher & Herman によってすでにやられた仕事であるから、というのが主な理由である。その後も Gamow から皮肉タップリの手紙をもらったりと、結構大変だったらしい。

4　1965 年—そして検出へ: Penzias & Wilson

—1965 年, Bell Telephone Laboratories, New Jersey— おそらく CMB の研究の歴史の中で最も有名なエピソードである、Arno Penzias と Robert Wilson の物語である。Bell Telephone Labotatories の 6-m ホーンアンテナのテストを波長 7.35 cm(周波数 4 GHz) 帯において行っていた Penzias と Wilson は、説明のできないシグナルに悩まされていた。非常に慎重に、思いつく限りのシグナルを取り除いても、まだ温度にして 3.5 ± 1.0 K のシグナルが残されたままであった (Penzias & Wilson 1965; 以下 PW)。しかも、そのシグナルは空のどの方向を向けても同じ強度で入ってくる...。普通このような DC 成分は受信器側に問題がある場合がほとんどであり、だからこそ彼らは慎重になったのである。

結局 Penzias はこのシグナルの正体を議論すべく Princeton のチームに電話をかけるのだが、ここに一つ偉大な偶然が存在していた。Peebles が、彼の CMB の研究をセミナーで発表した際、聴衆の一人に Penzias の友人がいたのである。セミナーを聞いた後しばらくして Penzias と電話で話していたその友人は、Penzias から謎のシグナルの存在を教えられ、彼に Princeton のチームに相談するように勧めたのであった。かくして Dicke は Penzias からの電話を受け取り、CMB の発見が決定的なものとなったのである。ところで、Penzias と Wilson は本当に慎重であり、論文を投稿した後で再び同じ観測を行なっている。それで同じ結果を得たわけだが、彼らのこうした姿勢があったからこそ微弱なシグナルの検出が可能になったのであり、彼らの発見を単なる「偶然」で片付けるのは大きな誤りである。

この発見により CMB の存在が明らかになったが、単一波長での観測であるためスペクトルを知る事はできない。つまり、CMB がこれまで予言されていたような「黒体放射」であるかどうかは、まだ明らかではないのである。PW から約半年後、Princeton のグループは波長 3.2 cm(周波数 9.4 GHz) において CMB の測定に成功、$T = 3.0 \pm 0.5$ K を得た (Roll & Wilkinson 1966)。PW と同じ温度であり、黒体放射である事をサポートしている。その後も続々と他波長帯、主に Rayleigh–Jeans 帯 ($\nu \ll 56\ T_{2.7}$ GHz) での測定結果が報告され、

スペクトルは温度がほぼ 2.7 K の黒体放射である事が明らかになった。

4.1 2.7K 黒体放射

黒体放射の輝度 $B(T)$ は温度だけで決定され、スペクトルは

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k_{\rm B}T}-1} \tag{1.3}$$

であり、$\nu_{\rm 1G} \equiv \nu/1{\rm GHz}$, $T_{2.7} \equiv T/2.7{\rm K}$ として

$$\frac{2h\nu^3}{c^2} = 1.47\times10^3\ \nu_{\rm 1G}^3\ {\rm Jy\ str^{-1}}, \qquad \frac{h\nu}{k_{\rm B}T} = 0.0178\ \nu_{\rm 1G}\ T_{2.7}^{-1}, \tag{1.4}$$

ただし ${\rm Jy} \equiv 10^{-23}\ {\rm erg\ sec^{-1}\ cm^{-2}\ Hz^{-1}}$ である。$T = 2.7$ K の黒体放射の代表的数値をまとめておくと、

- ピーク波長: $\lambda_{\rm p} = 1.89\ T_{2.7}^{-1}$ mm
- ピーク周波数: $\nu_{\rm p} = 159\ T_{2.7}$ GHz
- ピーク輝度: $B_{\nu_{\rm p}}(2.7{\rm K}) = 3.70\times10^8\ {\rm Jy\ str^{-1}}$
- Rayleigh–Jeans 輝度: $B_\nu^{\rm RJ}(2.7{\rm K}) = 8.30\times10^4\ \nu_{\rm 1G}^2\ T_{2.7}\ {\rm Jy\ str^{-1}}$

PW の測定を例にとれば、波長 7.35 cm(4 GHz) において 6-m のアンテナが持つビームサイズの半値幅は $\theta_{\rm FWHM} = 1.2\times7.35/600 = 0.015\ {\rm rad} = 0.84\ {\rm deg}$。従って測定される輝度は

$$B_{\rm 4GHz}^{\rm RJ}(T) = 8.30\times10^4\times4^2\times(\frac{2\pi}{8\ln2}\times0.015^2) = 340\ T_{2.7}\ {\rm Jy\ beam^{-1}} \tag{1.5}$$

であり、この式を使って測定値より温度を推定できるのである。

しかし、ピーク付近やさらに高周波になると大気吸収のために地上からの観測はどんどん困難となってゆくため、その後の CMB の測定はすなわちミリ・サブミリ帯の電波観測へのチャレンジであった。

5 1967年—CMBの温度は一様ではない?: Sachs & Wolfe

宇宙論の分野における最も大きな問題の一つに「物質ゆらぎ」の問題がある。現在観測される宇宙には銀河や銀河団をはじめとする様々な非一様性が存在しているのは承知の事

実であり、これらを説明するのに重力不安定性を用いるならば、宇宙初期において構造のタネとなる物質ゆらぎが存在しなくてはならない。このゆらぎの大きさに関して様々な議論があったのだが、今はそれは置いておく事にして、とりあえず物質ゆらぎの存在を認めよう。ゆらぎを定量化するものとして「密度ゆらぎ」:

$$\delta_{\rm m} \equiv \frac{\Delta\rho_{\rm m}}{\rho_{\rm m}} \tag{1.6}$$

を定義する。密度ゆらぎは Poisson 方程式 $\nabla^2\Phi_{\rm A} = 4\pi G\rho\delta_{\rm m}a^2/c^2$ に従ってニュートンポテンシャル $\Phi_{\rm A}$ を生成し、重力赤方偏移によって温度ゆらぎ

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_*}{T} + \Phi_{\rm A*} \tag{1.7}$$

を生じる。ここで、$\Delta T_*/T$ は温度ゆらぎの初期条件、$\Phi_{\rm A*}$ はポテンシャルの初期条件である。

初期条件として、単位物質あたりのエントロピーはどこをとっても一定であるという条件をおいてみよう。宇宙のエントロピー密度 s はほとんど放射が担っているので $s \propto T^3$ であり、物質の数密度を $n_{\rm m}$ とすれば $\rho_\gamma \propto T^4$ より

$$\begin{aligned} \Delta\left(s/n_{\rm m}\right) &= 0 \\ 3\frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta n_{\rm m}}{n_{\rm m}} &= 0 \\ \frac{\Delta T}{T} &= \frac{1}{3}\delta_{\rm m} = -\frac{2}{3}\Phi_{\rm A} \end{aligned} \tag{1.8}$$

という関係が得られる。最後の等号は Poisson 方程式、連続の式およびオイラーの式より得られる関係式 $\delta_{\rm m} = -2\Phi_{\rm A}$ を用いた (式 (3.44))。以上よりネットな温度ゆらぎは

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3}\Phi_{\rm A*} \tag{1.9}$$

と表される。式 (1.9) は 1967 年に Sachs と Wolfe によって導かれ、後に「Sachs–Wolfe(SW) 効果」と呼ばれるに至った非常に重要な結果である (Sachs & Wolfe 1967)。ただしこの結果は、断熱条件 (1.8) のもとでのみ正しく、「断熱ゆらぎ」と呼ばれている。一方、$\Delta(s/n_{\rm m}) \neq 0$ によって表されるゆらぎは「エントロピーゆらぎ」と呼ばれ、例えば「等温ゆらぎ $(\Delta T_* = 0)$」や「等曲率ゆらぎ $(\Phi_{\rm A*} = 0)$」といった条件を考える事ができる。一般のゆらぎは断熱ゆらぎとエントロピーゆらぎを加えたもので表せるが、どちらの条件がより正しいのかは 1992 年に温度ゆらぎが実際に検出されるまで解決の糸口も見えない問題であった。

なお、ここでの SW 効果の導出法はオリジナルの論文とはかなり異なっている。ここでは Newton ゲージでの断熱ゆらぎを用いたが、SW は synchronous ゲージでの等温ゆらぎを用いている。両者がゲージ変換によって同じ結果を与えるのは興味深い。SW 効果はゲージに依存する効果であるため解釈も難しく、30 年以上経った今日でも解釈に関して論文が出たりするトピックである。上記の導出は、解釈の一つである。

6 1968 年—ダンプする温度ゆらぎ: Silk

宇宙の晴れ上がり以前は CMB とバリオンは Thomson 散乱を通じて強くカップルしているため、バリオンの密度にゆらぎがあると CMB の温度にもゆらぎが生じる事になる。一方、先述の SW 効果は純粋に重力的な効果なので、こうしたカップリングによって生じるゆらぎとは別のものである。

しかしこうしたカップリングは決して完全なものではなく、小さなスケールで見れば光子とバリオンの運動にはズレがある。従って光子は Thomson 散乱によるランダムウオークによって進める距離だけ拡散し、そのスケール以下のゆらぎをならしてしまうのである。このスケールは、晴れ上がりの時期 $z_* = 1000$ において共動距離で測ると

$$\begin{aligned} \lambda_{\rm D*} &= (c\tau_*)^{1/2}(\sigma_{\rm T}x_{\rm e}n_{\rm e}a)_*^{-1/2} \\ &\sim 2.9\ (\Omega_{\rm m}h^2)^{-1/4}(\Omega_{\rm b}h^2)^{-1/2}(1-Y_{\rm P}/2)^{-1/2}(z_*/10^3)^{-5/4}x_{\rm e*}^{-1}f_{\rm R*}^{1/2}\ {\rm Mpc} \end{aligned} \quad (1.10)$$

と評価できる。$x_{\rm e}$ は電子の電離度であり、自由電子の数密度を $x_{\rm e}n_{\rm e}$ で表す。また

$$\begin{aligned} n_{\rm e} &= n_{\rm p} = n_{\rm b} - n_{\rm n} = n_{\rm b} - 2n_{\rm He} = \frac{\rho_{\rm b}}{m_{\rm p}}\,(1-Y_{\rm P}/2) \\ &= 1.1\times10^{-5}\ (1+z)^3(\Omega_{\rm b}h^2)(1-Y_{\rm P}/2)\ {\rm cm}^{-3} \end{aligned} \quad (1.11)$$

を用いた。$n_{\rm e} = n_{\rm p}$ は中性条件、$n_{\rm b} = n_{\rm p} + n_{\rm n}$ は全バリオンの数密度、$n_{\rm p}$, $n_{\rm n}$, $n_{\rm He}$ はそれぞれ陽子, 中性子, ^{4}He の数密度である。中性子は全て ^{4}He にとりこまれたとして $n_{\rm n} = 2n_{\rm He}$ を用いた。$Y_{\rm P} \equiv m_{\rm He}n_{\rm He}/\rho_{\rm b} \simeq 4m_{\rm p}n_{\rm He}/\rho_{\rm b}$ は ^{4}He の存在量を質量比で表したものであり、$Y_{\rm P} \simeq 0.24$ が観測より得られている。

τ は共形時間:

$$\tau \equiv \int a(t)^{-1}{\rm d}t = \int \frac{{\rm d}a}{Ha^2} \simeq 2(\Omega_{\rm m}H_0^2)^{-1/2}f_{\rm R}(z)\ z^{-1/2} \qquad \left(z \gg \frac{|\Omega_{\rm m}+\Omega_\Lambda|}{\Omega_{\rm m}}\right), \quad (1.12)$$

$f_{\rm R}(z)$ は放射優勢期の宇宙膨張によるファクターで

$$f_{\rm R}(z) \equiv (1+z/z_{\rm eq})^{1/2} - (z/z_{\rm eq})^{1/2} \tag{1.13}$$

である。また

$$z_{\rm eq} \equiv \frac{\Omega_{\rm m}}{\Omega_\gamma + \Omega_\nu} = 4.2\times10^4\ (\Omega_{\rm m}h^2)(1-f_\nu)T_{2.7}^{-4} \tag{1.14}$$

は全放射と全物質の密度が同じとなる赤方偏移、f_ν は放射成分中のニュートリノの密度比であり、3 種類のニュートリノモデルで $f_\nu \simeq 0.405$ である* 。これより

$$z_*/z_{\rm eq} \sim 4.0\times10^{-2}\ (\Omega_{\rm m}h^2)^{-1} \tag{1.17}$$

を得る。多少複雑になったが、$f_{\rm R}(z)$ は $z_* = 1000, \Omega_{\rm m}h^2 = 0.25-1$ において $f_{\rm R*} \sim 0.9-0.8$ のように $10-20\%$ 程度の比較的大きな補正を与えるため、あえて加えた。

6.1　バリオンモデルにおける Silk 減衰

式 (1.10) に戻ろう。Joseph Silk は、晴れ上がり以前の膨張宇宙における放射輸送の式を近似的に解くことにより $\lambda_{\rm D}$ を導いた (Silk 1968)。これは後に「Silk 減衰」と呼ばれるようになる非常に重要な効果であり、この減衰のため CMB とバリオンのゆらぎは特徴的なスケールを持つようになる。当時はコールドダークマター (CDM) という概念はなく、宇宙はバリオンだけで構成されていると考えられていたので、$\Omega_{\rm m} = \Omega_{\rm b}$ とおき $x_{\rm e*} \sim 1$ とすれば

$$\lambda_{\rm D*} \sim 3\ (\Omega_{\rm b}h^2)^{-3/4}\ {\rm Mpc} \qquad \text{for baryon model} \tag{1.18}$$

を得る。$Y_{\rm P}$ および $f_{\rm R*}^{1/2}$ の依存性を無視した。このスケール以下のゆらぎがならされるのである。$\lambda_{\rm D*}$ に含まれているバリオンの質量は

$$M_{\rm D*} = \frac{4\pi}{3}\rho_{\rm b0}(\lambda_{\rm D*}/2)^3 \sim 4\times10^{12}\ (\Omega_{\rm b}h^2)^{-5/4}\ {\rm M}_\odot \tag{1.19}$$

---

* f_ν を以下のように定義する。

$$f_\nu \equiv \frac{\rho_{\nu0}}{\rho_{\gamma0}+\rho_{\nu0}}. \tag{1.15}$$

$T_{\nu0} = (4/11)^{1/3}T_{\gamma0}$ を考慮すれば、ニュートリノの種類の数を N_ν として

$$\rho_{\nu0} = N_\nu \times \frac{7}{8} \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \rho_{\gamma0} \simeq 0.227\ N_\nu\rho_{\gamma0} \tag{1.16}$$

よって、$N_\nu = 3$ に対して $f_\nu \simeq 0.405$ を得る。

で、銀河程度のサイズを与える† 。これ以下のゆらぎは消えてしまうわけだから、$M_{\rm D*}$ をもった構造がまず形成される事になる。$\Omega_{\rm b}h^2 < 1$ とすればさらにスケールは大きくなり、構造形成は大規模構造から形成されるトップダウン型になる。

6.2 CDM モデルにおける Silk 減衰

ここで、CDM を考慮に入れた宇宙論パラメター: $\Omega_{\rm m} = 1$, $\Omega_{\rm b} = 0.05$, $h = 0.5$ をあてはめてみると、

$$\lambda_{\rm D*} \sim 37\ \Omega_{\rm m}^{-1/4}(\Omega_{\rm b}/0.05)^{-1/2}(h/0.5)^{-3/2}\ {\rm Mpc} \qquad \text{for standard CDM model,} \tag{1.20}$$

また、ゆらぎの波数で表せば

$$k_{\rm D*} = \frac{2\pi}{\lambda_{\rm D*}} \sim 0.17\ \Omega_{\rm m}^{1/4}(\Omega_{\rm b}/0.05)^{1/2}(h/0.5)^{3/2}\ {\rm Mpc}^{-1}. \tag{1.21}$$

$z \gg 1$ における共動角形距離の近似式:

$$r_\theta(z \gg 1) \simeq 2c(\Omega_{\rm m}H_0^2)^{-1/2} f_{\rm G}, \tag{1.22}$$

$$f_{\rm G} \equiv \begin{cases} \Omega_{\rm m}^{-1/2} & (\Omega_\Lambda = 0), \\ 1 + \ln \Omega_{\rm m}^{0.085} & (\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{\rm m}), \end{cases} \tag{1.23}$$

を用いて $\lambda_{\rm D*}$ の見込む角度を計算すれば

$$\theta_{\rm D*} = \frac{\lambda_{\rm D*}/2}{r_\theta *} \sim 5'\ f_{\rm G}^{-1}\Omega_{\rm m}^{1/4}(\Omega_{\rm b}/0.05)^{-1/2}(h/0.5)^{-1/2}, \tag{1.24}$$

この角度に対応する角波数は

$$\ell_{\rm D*} = k_{\rm D*}r_{\theta *} = \frac{\pi}{\theta_{\rm D*}} \sim 2 \times 10^3\ f_{\rm G}\Omega_{\rm m}^{-1/4}(\Omega_{\rm b}/0.05)^{1/2}(h/0.5)^{1/2} \tag{1.25}$$

である。ここで、開いた宇宙では $f_{\rm G} = \Omega_{\rm m}^{-1/2}$ より、低密度になるほど急速に r_θ が大きくなる事に注意せねばならない。つまり、開いた宇宙では見込む角度が平坦なケースに比べて $\Omega_{\rm m}^{-1/2}$ だけ小さいのである。例えば $\Omega_{\rm m} = 0.3$ の宇宙では、平坦なケース ($\Omega_{\rm m} = 1$ または $\Omega_{\rm m} = 0.1$, $\Omega_\Lambda = 0.9$) に比べて見込む角度はほぼ半分になる。

† Silk (1968) の与える質量はこの値の $1/100$ 程度であるが、これは彼のダンピングの条件が $M \ll M_{\rm D*}$ であるためである。後述の Peebls & Yu (1970) によるボルツマン方程式の数値解により、$M_{\rm D*}$ 程度のゆらぎもダンプする事が分かった。

最後に、$\lambda_{\rm D*}$ に含まれるバリオンの質量は

$$M_{\rm D*} \sim 9 \times 10^{13}\ \Omega_{\rm m}^{-3/4}(\Omega_{\rm b}/0.05)^{-1/2}(h/0.5)^{-5/2}\ {\rm M}_\odot. \tag{1.26}$$

しかしこの場合、CDM は CMB とカップルしないため Silk 減衰を受けず成長できる。バリオンのゆらぎも晴れ上がり以降は CDM のゆらぎに追いつくように急速に成長するため、もっと小さな質量の構造から形成されるボトムアップ型となる。

7　1969 年—高温電子のイタズラ: Zel'dovich & Sunyaev

たとえ CMB が黒体放射で生成されたとしても、それがそのまま黒体放射で観測されるとは限らない。熱平衡が保たれないような状況で CMB に何らかの形でエネルギーが流れれば、黒体のスペクトルはいとも簡単にくずれてしまうだろう。現実の宇宙において、そのような可能性は考えられないのだろうか。

7.1　Sunyaev–Zel'dovich 効果

Zel'dovich とSunyaev は、CMB と電子が熱平衡になかった場合、逆コンプトン散乱 ($\mathrm{e}^- + \gamma \to \mathrm{e}^- + \gamma$) を通じた電子から CMB へのエネルギー輸送による黒体スペクトルの変形を調べる事により、次の式を導いた (Zel'dovich & Sunyaev 1969)。

$$\frac{\Delta T}{T}(\nu) = \left(\frac{h\nu}{k_{\rm B}T}\coth\frac{h\nu}{2k_{\rm B}T} - 4\right)\int \sigma_{\rm T} x_{\rm e} n_{\rm e} \frac{k_{\rm B}(T_{\rm e}-T)}{m_e c^2} c{\rm d}t \tag{1.27}$$

従って、CMB が電子と熱平衡でない時に電子が何らかの過程によってヒートアップされれば CMB の黒体スペクトルが歪められる事となる。これは Sunyaev–Zel'dovich(SZ) 効果と呼ばれている。SZ 効果の重要な性質をいくつか挙げれば、

(1) $T_{\rm e} \neq T$ の時のみ $\Delta T \neq 0$

(2) $\Delta T/T$ が周波数依存性を持っている → 黒体放射を歪めている

(3) Rayleigh–Jeans 帯において $\left(\frac{h\nu}{k_{\rm B}T}\coth\frac{h\nu}{2k_{\rm B}T} - 4\right) = -2$

(4) $\nu < 217$ GHz で $\Delta T < 0$, $\nu \simeq 217$ GHz で $\Delta T \simeq 0$, $\nu > 217$ GHz で $\Delta T > 0$

7.2 y パラメター

SZ効果の大きさは、式 (1.27) のうち、y パラメターと呼ばれる周波数に依存しない項:

$$\begin{aligned} y &\equiv \int \sigma_{\rm T} x_{\rm e} n_{\rm e} \frac{k_{\rm B}(T_{\rm e}-T)}{m_e c^2} c{\rm d}t \\ &= 3.0\times10^{-11}(1-Y_{\rm P}/2)(\Omega_{\rm b}h^2)T_{2.7}\int x_{\rm e}\left(\frac{T_{\rm e}-T}{T}\right)(1+z)^3\frac{h^{-1}H_0}{H}{\rm d}z \end{aligned} \quad (1.28)$$

で評価できる。ここで、式 (1.11) および ${\rm d}t/{\rm d}z = -H^{-1}(1+z)^{-1}$ を用いた。式 (1.28) は大きい z にウエイトがかかっているので、$z \gg 1$ における近似式 $H \sim H_0\Omega_{\rm m}^{1/2}z^{3/2}$ を使えば

$$y \simeq 7.5\times10^{-13}(1-Y_{\rm P}/2)\left(\frac{\Omega_{\rm b}\Omega_{\rm m}^{-1/2}h}{0.025}\right)T_{2.7}\int x_{\rm e}\left(\frac{T_{\rm e}-T}{T}\right)z^{5/2}{\rm d}\ln z \quad (1.29)$$

を得る。例えば $z\sim100$ にわたって $T_{\rm e}\sim10^5$ K の電離ガス ($x_{\rm e}=1$) が広がっているとすれば、$T\sim270\,T_{2.7}$ K より $y\sim10^{-4}$ を得る。当時はCMBが全波長に渡って黒体であるかどうかは全く分かっておらず、ズレがどのくらいかも見当がつかなかったため、電子をヒートアップしてスペクトルを歪める現象をいくらでも考える事ができたわけである。しかし、現在の制限は全天の平均値で (Fixsen et al. 1996)

$$|\langle y\rangle| < 1.5\times10^{-5} \quad (1.30)$$

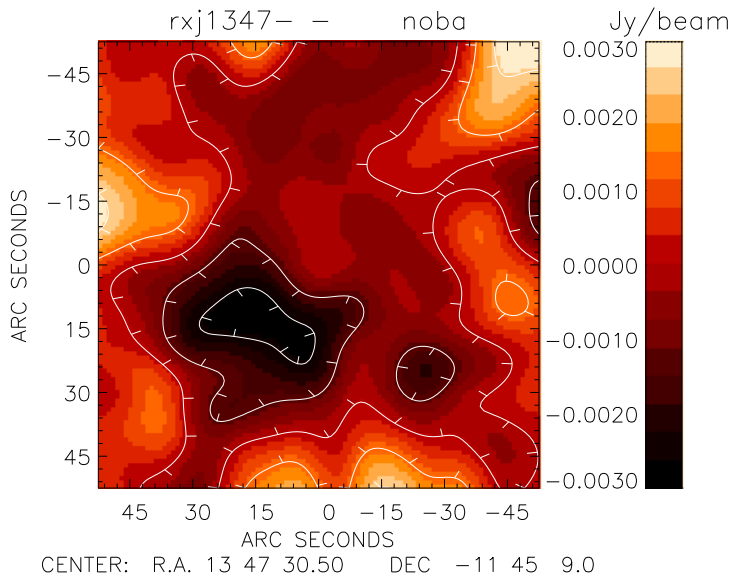
であるため、先程の例は許されない。同様の議論により電子にエネルギーを渡すようなプロセスに対して厳しい制限をつける事ができるようになったのである。

一方、全天の平均ではなく、個々の天体に関してはSZ効果は観測可能である (Sunyaev & Zel'dovich 1972)。銀河団内には 1 Mpc ほどの領域に $T_{\rm e}\sim10^8$ K の高温電子ガスが存在している事が分かっている。電子密度は $x_{\rm e}n_{\rm e}\sim10^{-3}$ cm^{-3} であり、以上から y を評価してやれば $y\sim3\times10^{-5}$、Rayleigh–Jeans 温度にして $\Delta T\sim0.2$ mK を得る。現在の電波観測技術においてこれはそれほど難しい数字ではなく、多くの銀河団に対してSZ効果は測定されている (図 1.1)。

8 1970年—ドップラーピーク: Peebles & Yu

SW効果の節で述べたように、ポテンシャルの存在によってCMBの温度は $(\Delta T/T)_{\rm SW} = \Phi_{\rm A}/3$ だけ変化する。これは宇宙の晴れ上がり以前における断熱ゆらぎの初期条件によって生じるものであり、重力のみによる一般相対論的効果である。

図 1.1: 銀河団 RXJ1347-1145 における SZ 効果。野辺山宇宙電波観測所の 7 素子ボロメータアレイ、NOBA(=Nobeyama Bolometer Array) を用いて撮像した。波長 2-mm(150 GHz) において SZ 効果は温度が下がったように見えるため、銀河団の中心近くで輝度にへこみが見える。ただし、イメージ上はフラックス単位 (Jy $14''\mathrm{beam}^{-1}$) で表してある。



しかしゆらぎのスケールがホライズンより小さい場合、重力以外に Thomson 散乱と放射圧力による力学的効果を考えねばならない。そのためには散乱を考慮した光子–バリオン系のボルツマン方程式を解く必要があり、最初の数値計算が Peebles と Yu によって 1970 年に行なわれた (Peebles & Yu 1970)。CDM を考慮していない事を除けば、主要な物理はほとんど全てこの論文に含まれていると言って良い。当時は宇宙の全物質はバリオンから成っていると考えられていたので、バリオンのみの宇宙における計算を行ない、彼らはバリオンゆらぎがあるスケールにおいて顕著なピークを持つことを発見した。CMB は Thomson 散乱を通じてバリオンと強くカップルしているため、CMB のゆらぎも同スケールにピークを持つ。これが後に「(1st) ドップラーピーク」と呼ばれるものである[‡]。

8.1 バリオンモデルにおけるドップラーピーク

彼らの結果が示すドップラーピークは大きく、対応する角度スケール $15'$ ほどのところに $\Delta T/T \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ と非常に大きな温度ゆらぎを作ってしまい、現在の観測値と矛盾してしまう。その理由は以下の通りである。バリオンだけの宇宙では晴れ上がりの時期に音速 $c_{\rm s}$ が光速の 10%程度まで落ち込んでしまう。

$$c_{\rm s} = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}} \sim \frac{c}{\sqrt{3}} R^{-1/2} \qquad \text{for } R \gg 1, \tag{1.31}$$

$$R \equiv \frac{3\rho_{\rm b}}{4\rho_\gamma} = 31.5\ \Omega_{\rm b} h^2 T_{2.7}^{-4} \left(\frac{1+z}{10^3}\right)^{-1}. \tag{1.32}$$

このため、共動 Jeans 長 $\lambda_{\rm J}$:

$$\lambda_{\rm J} \equiv c_{\rm s}\sqrt{\frac{\pi}{G\rho a^2}} \sim \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}} c_{\rm s} (aH)^{-1} \sim 5\ c_{\rm s}(aH)^{-1} \tag{1.33}$$

が共動ハッブルホライズンスケール $c(aH)^{-1}$ の半分程となり、小さなスケールまでバリオンゆらぎが成長しすぎてしまうのである。この Jeans 長の見込む角度は、$z_* = 1000$ における $\lambda_{\rm J}$:

$$\lambda_{\rm J*} \sim 50\ (\Omega_{\rm m} h^2)^{-1/2} (\Omega_{\rm b} h^2)^{-1/2}\ {\rm Mpc}, \tag{1.34}$$

[‡] ただし、現在ドップラーピークという名前は正しく物理を反映していない事が分かっている。実際にピークを形成しているのは、速度場による文字通りの「ドップラー効果」ではなく、密度ゆらぎによる音波である。従って、「アコースティックピーク (Acoustic Peak) と呼ぶのが正しい。ここでは歴史的にドップラーピークと呼ぶが、国際会議などでドップラーピークと言うと、必ずツッコミが入る。

および晴れ上がりまでの共動角径距離 $r_{\theta *}$(式 (1.22)) を用いて

$$\theta_{\rm J*} = \frac{\lambda_{\rm J*}/2}{r_{\theta *}} \sim 15' \ f_{\rm G}^{-1} (\Omega_{\rm b} h^2)^{-1/2} \tag{1.35}$$

また、$\lambda_{\rm J*}$ 中に含まれるバリオンの質量は

$$M_{\rm J*} = \frac{4\pi}{3} \rho_{b0} (\lambda_{\rm J}/2)^3 \sim 2 \times 10^{16} \ (\Omega_{\rm b} h^2)^{-2} \ {\rm M}_\odot \tag{1.36}$$

で、観測されているリッチクラスターの質量と同程度かそれ以上を与える事から、Peebles & Yu はドップラーピークが銀河団の種であると期待していた。しかし彼らも指摘しているように、この質量は仮定した宇宙論パラメターに大きく左右されるため、この時点ではっきりした事を言うことはできない。

現在の計算は CDM を考慮しており、バリオンの量は $\Omega_{\rm b} h^2 \sim 0.01$ 程度であるため光子–バリオン系の音速は晴れ上がり時期まで $c_{\rm s} \sim c/\sqrt{3}$ である (式 (1.31))。従って Jeans 長はハッブルホライズンよりも大きく (式 (1.33))、バリオンのゆらぎは大きく成長できずにアコースティック振動を行なう事になる。このように、バリオンだけの宇宙と CDM 入りの宇宙はゆらぎの進化において定性的な違いを持つが、温度ゆらぎの計算の基本的枠組みはこの Peebles & Yu の仕事以来変わっていないと言えるだろう。

9　1987 年—完成された理論 I: Bond & Efstathiou

1987 年の Richard Bond と George Efstathiou による論文により、ガウシアン統計に基づく現在の CMB の理論はほぼ完成したと言って良いだろう。彼らは Peebles & Yu (1970) の方法に基づいてボルツマン方程式を数値的に解き、CMB のあらゆる側面を詳しく、定量的に計算した。彼らの論文は

- 断熱ゆらぎと等曲率ゆらぎの両方を考慮
- CDM を考慮
- CMB の偏光の効果を取り入れ、偏光パターンを予言
- 温度ゆらぎのピークの性質と統計を予言
- 2 点相関関数 $C(\theta)$ の予言

- 角度相関スペクトル C_ℓ の予言

と、CMB のゆらぎの理論において関心のあるほとんど全ての内容を尽くしている。この計算で、Peebles & Yu の結果に現れていた大きなドップラーピークはなくなっている。ただし、CDM を入れる事によりバリオンモデルが抱えていた大きすぎる温度ゆらぎの問題が回避される事は、彼ら自身がすでに明らかにしていた (Bond & Efstathiou 1984)。

9.1 CDM モデルにおけるドップラーピーク

CDM の支配的な宇宙においては、$z_* = 1000$ でも音速は $c_{\rm s*} \sim c/\sqrt{3}$ である (式 (1.31) において $R < 1$) ため、$\lambda_{\rm J*} \sim 3c(aH)_*^{-1}$ よりホライズンスケール程度のバリオンのゆらぎも音速でアコースティック振動を行なう事になる。アコースティック振動のフェイズは音速のパーティクルホライズン $r_{\rm s}$ で決まっており、

$$r_{\rm s}(\tau) \equiv \int_0^\tau c_{\rm s}(\tau'){\rm d}\tau' \sim c_{\rm s}\tau \sim 88\ (\Omega_{\rm m}h^2)^{-1/2}(f_{\rm R}(10^3)/0.8)(z/10^3)^{-1/2}\ {\rm Mpc} \tag{1.37}$$

である。ここで、興味ある領域に渡って $c_{\rm s}$ が一定 ($\sim c/\sqrt{3}$) であるとし、共動時間 τ には式 (1.12) を用いた。

以上より、晴れ上がり時の音速のホライズンは以下のような特徴的スケールを持つ。

- $r_{\rm s*}$ の見込む角度

$$\theta_{\rm s*} = \frac{r_{\rm s*}}{r_{\theta*}} \sim 0.^\circ\!84\ f_{\rm G}^{-1}(f_{\rm R*}/0.8), \tag{1.38}$$

これはドップラーピークの位置を決める重要な量である。再び式 (1.23) を記せば、

$$f_{\rm G} \equiv \begin{cases} \Omega_{\rm m}^{-1/2} & (\Omega_\Lambda = 0), \\ 1 + \ln \Omega_{\rm m}^{0.085} & (\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{\rm m}), \end{cases}$$

より、ドップラーピークが観測される位置はまさに宇宙の曲率で決められる事が分かる (図 1.2)。

- ゆらぎの 3 次元パワースペクトルの波数

$$k_{\rm s*} = \frac{\pi}{r_{\rm s*}} \sim 3.6 \times 10^{-2}\ (\Omega_{\rm m}h^2)^{1/2}(f_{\rm R*}/0.8)^{-1}\ {\rm Mpc}^{-1}, \tag{1.39}$$

- 2 次元球面に投影された 2 次元角度相関スペクトルの角波数

$$\ell_{\rm s*} = k_{\rm s*}r_{\theta*} \sim 210\ f_{\rm G}(f_{\rm R*}/0.8)^{-1}, \tag{1.40}$$

- $r_{\mathrm{s}*}$ に含まれるバリオンの質量

$$M_{\mathrm{s}*} \sim 4 \times 10^{16}\ (\Omega_{\mathrm{b}}/0.05)\Omega_{\mathrm{m}}^{-3/2}(f_{\mathrm{R}*}/0.8)^3 h^{-1}\ \mathrm{M}_\odot. \tag{1.41}$$

特徴的なスケールとして、ドップラーピークの他に、前述の Silk 減衰のスケールが挙げられる。そして期待通り、パワースペクトルは $k_{\mathrm{D}*}$(式 (1.21))、角度相関スペクトルは $\ell_{\mathrm{D}*}$(式 (1.25)) でそれぞれダンプしており、それは 2 点相関関数のコヒーレンススケールが $\theta_{\mathrm{D}*}$(式 (1.24)) 程度である事にも現れている。

既に見たように、ドップラーピークが観測される位置は宇宙の曲率を直接反映している (式 (1.38),(1.40)) ため、この位置を測ることによって $\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_\Lambda$ を正確に決める事ができる。

10　1988 年—CMB は黒体ではない?!: Matsumoto et al.

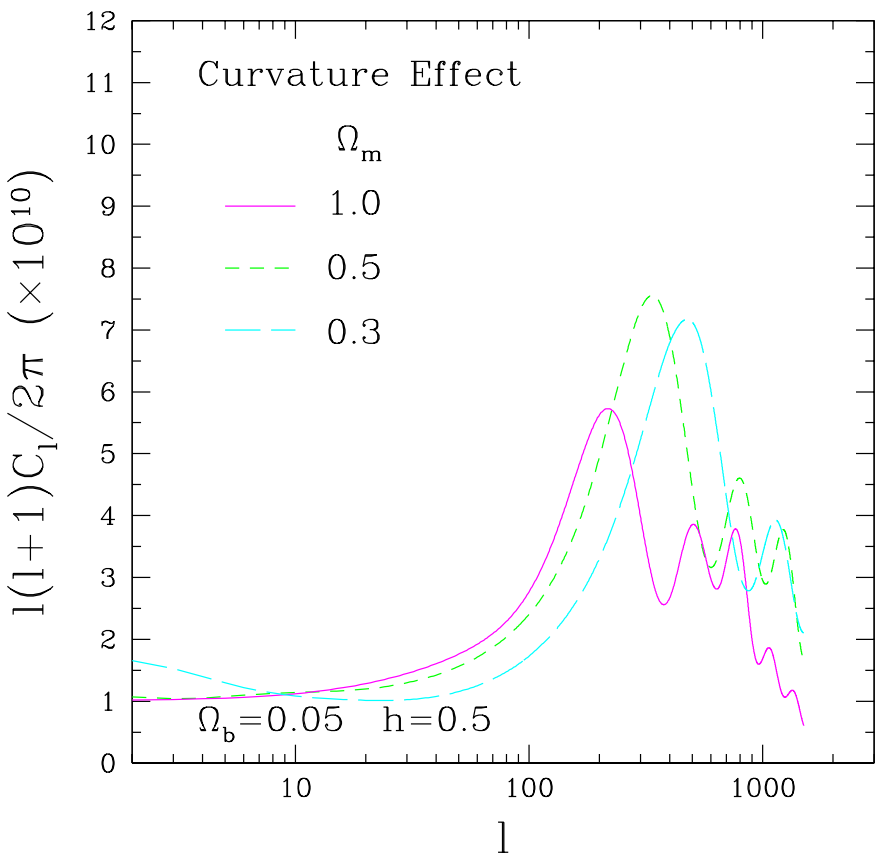
Penzias & Wilson の CMB の発見以来、CMB が本当に黒体スペクトルをしているかどうか確かめるべく多くの測定がなされ、1970 年までに波長 3 mm 以上の Rayleigh–Jeans 帯のスペクトルが $T_{\gamma 0} = 2.7$ K の黒体放射である事がほぼ明らかとなった (Peebles 1971, §V, pp.132)。しかし、この領域ではスペクトルは $B_\nu \propto \nu^2$ のように特徴的なスケールを持たないため、ピーク波長 (~ 2 mm) をはさんでサブミリ領域での測定がどうしても必要であった。

サブミリ領域の観測の難しさは、主に 2 つある。(1) 大気による吸収・放射のためシグナルが著しく弱められてしまう事、(2) サブミリ波を検出できる高感度 (低ノイズ) の検出器を作るのが難しい事、である。(1) の解決には、地上を離れて気球やロケットを使って観測を行なう事が挙げられるだろう。(2) は、ボロメータ技術の発展により徐々に解消されつつある。

とにかくトライは続けられ、いくつかの観測結果が報告された。Woody & Richards (1979) の結果に代表されるように、確かにピークをはさんで Wien 領域に向かって輝度は落ちていたが、2.7 K の黒体放射スペクトルからはズレているようであった (Woody–Richards distortion)。

1987 年、歴史的な測定は敢行される。名古屋大学の松本敏雄が中心となった、名古屋と Berkeley のロケットによる共同実験である。名古屋がロケットを提供し、Berkeley が検出器を提供した。当時の名古屋は近赤外線の地上・気球およびロケット観測を行なっていたが、Woody & Richards (1979) のデータを見て名古屋から Berkeley に共同研究を申し入れ

図 1.2: 温度ゆらぎの角度相関スペクトル C_ℓ と、宇宙の曲率によるドップラーピークのシフト。ただし $\Omega_\Lambda = 0$ である。この場合、ドップラーピークがプロジェクトされる ℓ は $\Omega_{\rm m}^{1/2}$ に比例おり、$\Omega_{\rm m}$ が小さくなるほどドップラーピークは ℓ の大きい方へずれてゆく。



た。名古屋では遠赤外線の技術開発は全く初めてであり、遠赤外技術のメッカであった大阪大学工学部の阪井清美の協力とともに佐藤伸二と松尾宏によってサブミリ波の開発が行なわれた。検出器であるボロメータの開発も行なわれたが、Berkeley の達成していた感度に及ばなかった。

観測は順調に進められ、全てがうまくいっているようであった。チャネルは全部で 6 つ、番号毎に波長は $\lambda = 1160, 709, 481, 262, 137, 102\ \mu\mathrm{m}$ ($\nu = 258, 423, 624, 2186, 2944$ GHz) である。結果は 1988 年論文として発表され、その衝撃の内容は CMB 業界をゆるがした (Matsumoto, Hayakawa, Matsuo, Murakami, Sato, Lange & Richards 1988)。チャネル 1 を除く全てのチャネルで、CMB の輝度が黒体放射を有意に上回っていたのである。そのうち短波長側のチャネル $4-6$ については 20 K の星間ダストモデルで説明できたが、残る $1-3$ チャネルについて説明がつかない。この当時報告されていた Rayleigh–Jeans 帯での温度は $T_{\gamma 0} = 2.74 \pm 0.02$ K(Smoot et al. 1987) であったのに対し、チャネル $1-3$ で測定された温度はそれぞれ $2.779 \pm 0.018, 2.995 \pm 0.017, 3.175 \pm 0.027$ K であり、チャネル 2,3 の温度は 2.7 K を 20σ 近く超過している。データの質も良く、その後の解析でも系統的エラーは見つからなかった。

スペクトルが歪んでいる—。これを先述の SZ 効果と解釈し、y パラメター (式 (1.28)) でフィットすると $y = 0.019$ を与える。z にある遠方天体からのダスト放射と解釈すれば、ダストの温度を $3.55(1+z)$ K とするとデータをうまく説明する。いずれにせよ、この結果により high-z の宇宙で何かが起こっている事が示唆されたのであった。—1990 年までは。

11　1990 年—完璧な黒体: COBE/FIRAS

大気が邪魔なら、気球、ロケット、そして人工衛星という事になる。1974 年に端を発した NASA による CMB 衛星計画は、その後 John Mather を筆頭に準備が進められ、COBE(=*COsmic Background Explorer*) と名付けられて打ち上げの時を待っていた。COBE の使命は、(1) センチ波から遠赤外線までの正確なスペクトルを測定する、(2) 温度ゆらぎを検出・測定する、(3) 宇宙赤外背景放射のマッピング、であった。

11.1 FIRAS

FIRAS(=*Far InfraRed Absolute Spectrometer*) と名づけられた検出器は、その名の通り分光器である。短波長側にウエイトが置かれ、波長 1 cm から CMB のピークをまたいで 100 μm に渡る領域を、67 バンドに分光するものである。

1989 年 11 月 18 日、無事打ち上げに成功した COBE により即座に明らかになった事実とは—。COBE の撮った、たった最初の 9 分間のデータにより、1965 年の最初の発見いらい続いていた「CMB は黒体放射か?」という論争は劇的に解決を迎えたのだった (Mather et al. 1990)。

- 全 67 バンドに渡り、1% の精度で黒体放射
- 温度は $T_{\gamma 0} = 2.735 \pm 0.06$ K

1990 年 1 月、アメリカ天文学会における Mather の発表はスタンディング・オベーションによって讃えられた。その後 FIRAS の全天サーベイが終了し、FIRAS の結果は

- 全 67 バンドに渡り、0.03% の精度で黒体放射
- 温度は $T_{\gamma 0} = 2.726 \pm 0.010$ K
- Sunyaev–Zel'dovich 効果によるスペクトルの歪み (式 (1.28)): $|\langle y \rangle| < 2.5 \times 10^{-5}$
- 有限の化学ポテンシャル μ によるスペクトルの歪み: $|\langle \mu \rangle| < 3.3 \times 10^{-4}$

と結論づけられた (Mather et al. 1994)。それぞれの結果はさらに少し改良され、1996 年に

- $T_{\gamma 0} = 2.728 \pm 0.004$ K
- $|\langle y \rangle| < 1.5 \times 10^{-5}$
- $|\langle \mu \rangle| < 0.9 \times 10^{-4}$

とされた (Fixsen et al. 1996)。

12 1992 年—0.001%のゆらぎ: COBE/DMR

COBE のもう一つの使命が、これまで見つかっていない温度ゆらぎの検出である。そのために用意された検出器は、DMR(=*Differential Microwave Radiometer*) と呼ばれている。

12.1 DMR

DMR は Rayleigh–Jeans 帯における 3 バンド: $\lambda = 3.3, 5.7, 9.5$ mm ($\nu = 31.5, 53, 90$ GHz) にチューンされた検出器である。FIRAS は CMB の温度を 0.004 K の精度まで測定したのに対し、DMR は FIRAS のつけたエラーバーのさらに 1/100 以下の温度の異方性を検出せねばならないのだから、FIRAS のように「9 分間で」というワケにはいかない。2 年間の観測を経て、1992 年に DMR は温度ゆらぎの検出に成功した。実に $\Delta T = 30 \pm 5\ \mu K$—CMB の温度 2.73 K の 0.001%— というわずかな異方性の存在が、初めて明らかにされたのであった (Smoot et al. 1992)。

ところで、DMR の見たゆらぎは何であったのだろうか。温度ゆらぎのドップラーピークが 1° あたりに現れる事は Bond & Efstathiou の節で述べた通りである (式 (1.40))。そしてそれは、晴れ上がり時の音速のパーティクルホライズン、つまりほぼ当時のホライズンサイズに相当するスケールであった。一方で DMR のビームサイズは $\theta_{\rm FWHM} = 7°$、従って一つのビームの中に晴れ上がり時期のホライズンが 50 個程度おさまる事になる。言いかえれば、DMR は晴れ上がり時期まで互いにコンタクトをとれなかったスケールに存在するゆらぎ—SW 効果を観測しているのである。ビームサイズ $\theta_{\rm FWHM}$ をもつ観測を行なった場合、得られる角度相関スペクトルは $\exp(-\ell^2\theta^2_{\rm FWHM}/8\ln 2)$ のファクターによって、ある $\ell_{\rm max}$ より細かいスケールの情報は急速に失われる。$\ell_{\rm max}$ を評価すれば、

$$\begin{aligned} e^{-\ell^2_{\rm max}\theta^2_{\rm FWHM}/8\ln 2} &= \frac{1}{2} \\ \ell_{\rm max} &= \frac{\sqrt{8}\ln 2}{\theta_{\rm FWHM}} \sim \frac{110}{\theta_{\rm FWHM}/1°} \end{aligned} \tag{1.42}$$

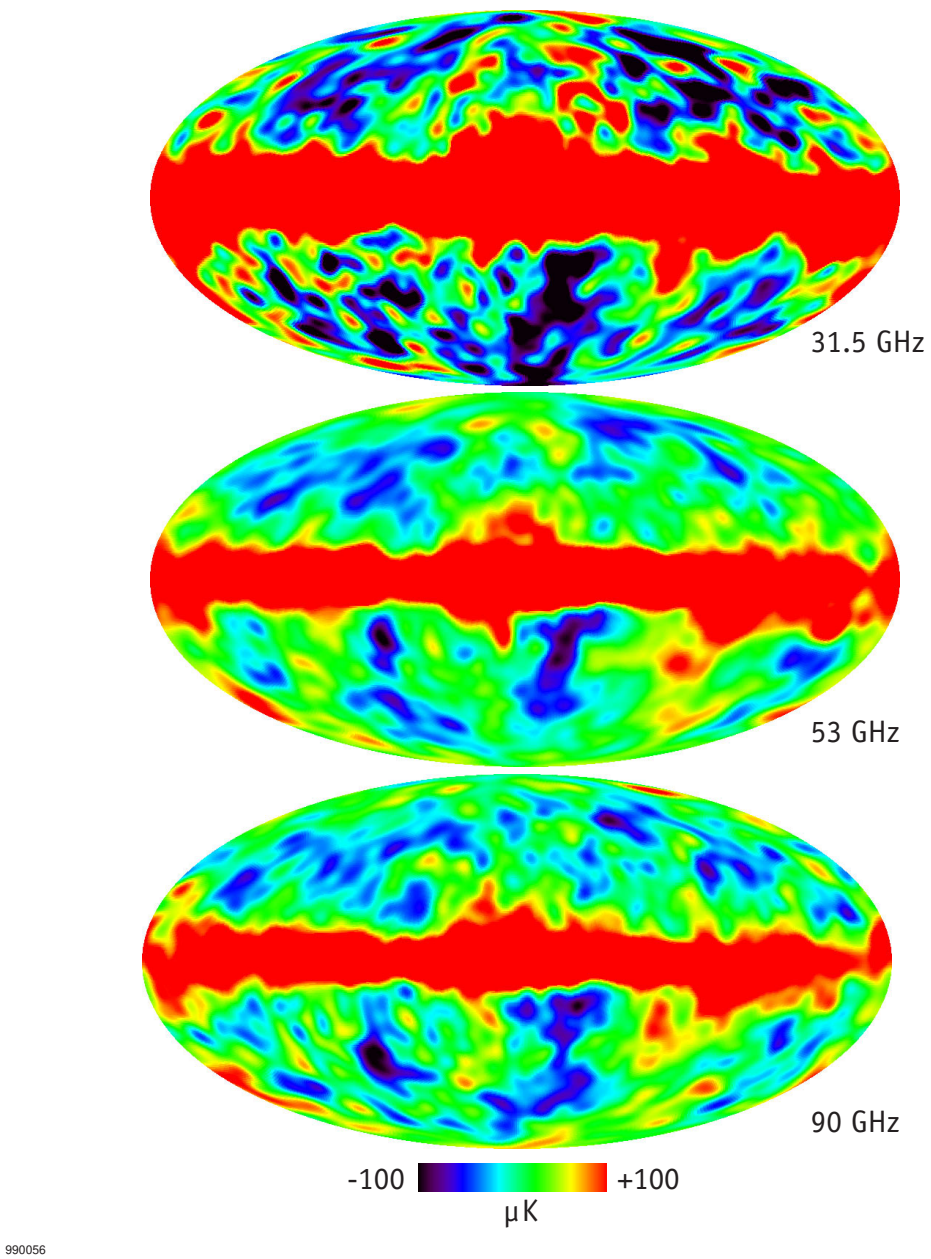
となり、DMR のビームでは $\ell_{\rm max} \sim 16$ を得る。

12.2 Sachs–Wolfe 効果の角度相関パワースペクトル

SW 効果による角度相関スペクトル C_ℓ は、以下のようにして求める事が可能である。現在 (τ_0) 天球上の γ の方向に観測される温度ゆらぎは、晴れ上がり時期の重力ポテンシャルによるものであるから

$$\frac{\Delta T}{T}(\boldsymbol{\gamma}, \tau_0) = \frac{1}{3}\Phi_{\rm A}(\boldsymbol{\gamma}, \tau_*) \tag{1.43}$$

図 1.3: COBE の 4 年間の観測で得られた CMB 温度ゆらぎの全天マップ。上から 31.5, 53, 90 GHz 帯のマップで、中央の赤いバンドは銀河面からの放射である。



であり、これをフーリエ変換してやると

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k},\boldsymbol{\gamma},\tau_0)=\frac{1}{3}\Phi_{\rm A}(\mathbf{k},\tau_*)e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}c(\tau_0-\tau_*)}=\frac{1}{3}\Phi_{\rm A}(\mathbf{k},\tau_*)\sum_\ell(-i)^\ell(2\ell+1)j_\ell(kc\Delta\tau_*)P_\ell(\mu), \tag{1.44}$$

ここで $\Delta\tau_*\equiv\tau_0-\tau_*$, $\mu\equiv\hat{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\gamma}$ である。最後の等号では Rayleigh の公式を用いて exp を展開した。$\Delta T/T$ も同様に μ に関して Legendre 展開:

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k},\boldsymbol{\gamma},\tau_0)=\sum_\ell(-i)^\ell\Theta_\ell(k,\mu,\tau_0)P_\ell(\mu) \tag{1.45}$$

すれば、

$$\Theta_\ell(k,\mu,\tau_0)=\frac{1}{3}\Phi_{\rm A}(\mathbf{k},\tau_*)(2\ell+1)j_\ell(kc\Delta\tau) \tag{1.46}$$

を得る。$j_\ell(kc\Delta\tau)$ は k 空間のスペクトルを ℓ 空間に射影する役割を担っている。以上より、C_ℓ の定義に従えば

$$C_\ell\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k^2\frac{\left\langle|\Theta_\ell(k,\mu,\tau_0)|^2\right\rangle}{(2\ell+1)^2}{\rm d}k=\frac{2}{9\pi}\int_0^\infty k^2P_\Phi(k,\tau_*)j_\ell^2(kc\Delta\tau_*){\rm d}k. \tag{1.47}$$

$P_\Phi(k,\tau)\equiv\left\langle|\Phi_{\rm A}(\mathbf{k},\tau)|^2\right\rangle$ はポテンシャルのパワースペクトルであり、現在の宇宙論の標準モデルでは

$$P_\Phi(k,\tau)=2\pi^2\Delta^2_{\rm H\Phi}(\tau)k^{-3}\left(\frac{ck}{H_0}\right)^{n-1} \tag{1.48}$$

のようにモデル化されている。$\Delta_{\rm H\Phi}(\tau)$ は、現在のハッブルホライズンに対応するスケール $(k=c^{-1}H_0)$ の重力ポテンシャルの大きさ・進化を表すファクターである。このモデルを用いると式 (1.47) は解析的に積分できて

$$C_\ell=\frac{4\pi}{9}\Delta^2_{\rm H\Phi*}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4}(H_0\Delta\tau)^{1-n}\frac{\Gamma[(3-n)/2]}{\Gamma[(4-n)/2]}\frac{\Gamma[\ell+(n-1)/2]}{\Gamma[\ell+(5-n)/2]}\right\} \tag{1.49}$$

を得る。特に Harrison–Zel'dovich スペクトルと呼ばれている $n=1$ のケースでは

$$C_\ell^{n=1}=\frac{2\pi}{9}\Delta^2_{\rm H\Phi*}\left[\ell(\ell+1)\right]^{-1} \tag{1.50}$$

と簡単化される。導出の際には $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ を用いた。$\ell(\ell+1)C_\ell^{n=1}$ は ℓ に依らず一定に保たれる。

12.3 ゆらぎの大きさ

$\Delta_{\mathrm{H}\Phi *}$ を用いる代わりに、四重極モーメント C_2 で C_ℓ を表すのも便利である。

$$C_\ell = C_2 \frac{\Gamma[(9-n)/2]}{\Gamma[(n+3)/2]} \frac{\Gamma[\ell + (n-1)/2]}{\Gamma[\ell + (5-n)/2]}. \tag{1.51}$$

COBE チームは C_2 を表す量として以下に定義される温度の次元を持つ $Q_{\mathrm{rms-PS}}$ を用いている。

$$Q_{\mathrm{rms-PS}} \equiv T_{\gamma 0} \sqrt{\frac{5}{4\pi} C_2}. \tag{1.52}$$

これは、2 点相関関数 $C(\theta)$ を

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell+1) C_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{1.53}$$

のように Legendre 展開した時の展開係数が $(2\ell+1)C_\ell/4\pi$ である事から由来する量である。また、$\ell(2\ell+1)C_\ell/4\pi$ は $\ln \ell$ あたりのパワーをあらわし、あるスケール ℓ における温度ゆらぎの大きさを反映している。ここで、$\ell \gg 1$ において

$$\frac{\ell(2\ell+1)C_\ell}{4\pi} \simeq \frac{\ell(\ell+1)C_\ell}{2\pi} \tag{1.54}$$

であり、後者は $n=1$ のケースでスペクトルがフラットである (式 (1.50)) 事から、温度ゆらぎをあらわす標準的な量として良く使われている。

以上のように $Q_{\mathrm{rms-PS}}$ と n が SW 効果のパラメターとなるが、両者はきつく相関しており独立に精度良く決めるのは難しい。そこで、例えば $n=1$ を固定して決めてやれば

$$Q^{n=1}_{\mathrm{rms-PS}} = 18.67 \pm 1.26 \ \mu\mathrm{K} \tag{1.55}$$

が得られ (Bunn & White 1997)、式 (1.50), (1.52) から

$$\Delta^{n=1}_{\mathrm{H}\Phi *} = \sqrt{\frac{27}{\pi} C_2^{n=1}} = \sqrt{\frac{108}{5}} \left(\frac{Q^{n=1}_{\mathrm{rms-PS}}}{T_{\gamma 0}} \right) \sim 3 \times 10^{-5} \tag{1.56}$$

を得る。密度ゆらぎの大きさは Poisson 方程式:

$$k^2 \Delta_{\Phi *} = \frac{3}{2} \left(\frac{Ha}{c} \right)^2_* \delta_{\mathrm{m}*} \tag{1.57}$$

$$\Delta_{\Phi *} = \frac{3}{2} \left(\frac{H_0}{ck} \right)^2 \Omega_{\mathrm{m}} a_*^{-1} \delta_{\mathrm{m}*} = \frac{3}{2} \left(\frac{H_0}{ck} \right)^2 \Omega_{\mathrm{m}} \delta_{\mathrm{m}0}, \tag{1.58}$$

より、現在のホライズンスケールにおいて

$$\delta_{\rm Hm0}^{n=1} = \frac{2}{3}\Omega_{\rm m}^{-1}\Delta_{\rm H\Phi *}^{n=1} \sim 2\times 10^{-5}\ \Omega_{\rm m}^{-1} \tag{1.59}$$

と求められる。導出において、$z_{\rm eq} \gg z \gg 1$ における近似式: $H \simeq H_0\Omega_{\rm m}^{1/2}a^{-3/2}$ および $z \ll z_{\rm eq}$ における密度ゆらぎの成長率 $\delta_{\rm m} \propto a$ を用いた[§] 。

ここでは SW 効果のみ考えたが、Bunn & White (1997) では SW 効果以外の効果も取り入れ、$2 < \ell < 19$ のデータを用いて $n \neq 1$ の時にも使えるようなフィッティング公式を導いている。それによれば、$\tilde{n} \equiv n-1$ として

$$\begin{aligned}
\delta_{\rm Hm0} &= 1.95\times 10^{-5}\Omega_{\rm m}^{-0.35-0.19\ln\Omega_{\rm m}-0.17\tilde{n}}e^{-\tilde{n}-0.14\tilde{n}^2} \qquad (\Omega_\Lambda = 0), & (1.60)\\
&= 1.94\times 10^{-5}\Omega_{\rm m}^{-0.785-0.05\ln\Omega_{\rm m}}e^{-0.95\tilde{n}-0.169\tilde{n}^2} \qquad (\Omega_\Lambda = 1-\Omega_{\rm m}) & (1.61)
\end{aligned}$$

であり、$\Omega_{\rm m} = 1, n = 1$ のケースでは上述の単純な議論と同じ結果を与える。$\Omega_{\rm m}$ 依存性はだいぶ異なるが、これは $\delta_{\rm m}$ の成長率の違いや $\Omega_{\rm m} \neq 1$ の時に現れる SW 効果以外の効果、および曲率を持つモデルではフーリエ変換ができない事などによる。

13　1995 年—完成された理論 II: Hu & Sugiyama

Bond & Efstathiou の節で述べたように、1987 年の彼らの論文によって CMB のゆらぎの理論は定量的に完成したと言って良い。しかし、数値計算のデメリットは計算結果が「なぜそうなるか」をそのままでは理解できない事である。複雑な微分方程式系であるがゆえ、CMB のゆらぎに関する定性的な理解は遅れていたのである。光子–バリオン系のアコースティック振動や Silk 減衰の基本的な役割、および曲率によるアコースティック振動の位置の移動 (式 (1.40)) などは理解されていたが、温度ゆらぎは宇宙論パラメターを少し変えただけも大きく変化し、逆に異なるパラメターセットで同じゆらぎを作る事ができるなど、複雑なパラメター依存性の理由は理解されないままであった。

1995 年、Berkeley の Wayne Hu と、当時東京大学の助手であり同じく Berkeley に CMB の研究のため来ていた杉山直により、CMB ゆらぎの計算における解析的手法がまとめられた (Hu & Sugiyama 1995)。適当な近似とフィッティング公式を駆使し、解析的に問題を解く事によって数値計算だけでは明らかにできない物理を理解しようとしたわけである。結果、アコースティック振動におけるバリオンの役割、重力ポテンシャルの役割、晴れ上が

[§] 厳密には $\Omega_{\rm m} \neq 1$ の時 $\delta_{\rm m} \propto a$ は成り立っておらず、曲率が重要になる時期において成長は遅くなる。

り時期のゆらぎと観測されるゆらぎの対応関係... などが続々と明らかにされた。特に重要であったのは、放射優勢期のホライズン内における重力ポテンシャルの時間変化がゆらぎの大きさに重要な寄与を持つ事を明らかにした点であった。

13.1 「動的」Sachs–Wolfe 効果と $\Omega_{\rm m}h^2$

放射優勢期にホライズン内に入ったゆらぎのふるまいを考える。光子–バリオン系のゆらぎは、放射圧によるアコースティック振動を行なうため成長できない。CDM のゆらぎは、重力収縮のタイムスケール $t_{\rm ff}$ が

$$t_{\rm ff} \sim (G\rho_{\rm m})^{-1/2} = (G\rho_\gamma)^{-1/2}\left(\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\rm m}}\right)^{1/2} \sim H^{-1}\left(\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\rm m}}\right)^{1/2} \gg H^{-1} \qquad (\rho_\gamma \gg \rho_{\rm m}) \tag{1.62}$$

と、宇宙膨張のタイムスケールより長いためやはり成長できない。全ての成分のゆらぎが成長できないため、ポテンシャルは Poisson 方程式より

$$-k^2\Phi_{\rm A} = \frac{4\pi G\rho_\gamma\delta}{c^2}a^2 = \frac{4\pi G\rho_{\gamma 0}\delta}{c^2}a^{-2} \tag{1.63}$$

のように、物質優勢期になって CDM のゆらぎが成長するようになるまで減衰してしまう。

ポテンシャルの時間変化による温度ゆらぎは、

$$\frac{\Delta T}{T} = \int 2\dot\Phi_{\rm A}{\rm d}\tau \sim -2\Phi_{\rm A}(0) \tag{1.64}$$

ここで、もっとも極端なケースとして初期のポテンシャル $\Phi_{\rm A}(0)$ が減衰によってゼロになるとした。SW 効果による $\Delta T/T = \Phi_{\rm A}(0)/3$ (式 (1.9)) と比べれば、実に 6 倍の寄与である。これは「動的 Sachs–Wolfe 効果 (ISW 効果)」と呼ばれており、これらの効果を無視して温度ゆらぎを計算すると数値計算の結果を大きく下回ってしまうのである。

また、ISW 効果は宇宙論パラメターのうち $\Omega_{\rm m}h^2$ に深く関わっている。式 (1.14) より、放射優勢期から物質優勢期に移る時期は $z_{\rm eq} \propto \Omega_{\rm m}h^2$ であるから、$\Omega_{\rm m}h^2$ が小さくなると放射優勢である時期が長くなり、その分 ISW 効果を受けるゆらぎのスケールの範囲が広くなる。$z_{\rm eq}$ でホライズンに入るゆらぎのスケールは

$$k_{\rm eq} \equiv a_{\rm eq}H_{\rm eq} = \sqrt{2}(\Omega_{\rm m}H_0^2)^{1/2}a_{\rm eq}^{-1/2} = 9.67\times10^{-2}\ \Omega_{\rm m}h^2(1-f_\nu)^{1/2}T_{2.7}^{-2}\ {\rm Mpc}^{-1}, \tag{1.65}$$

これを見込む角波数は

$$\ell_{\rm eq} = k_{\rm eq}r_{\theta *} \simeq 580\ (\Omega_{\rm m}h^2)^{1/2}f_{\rm G}(1-f_\nu)^{1/2}T_{2.7}^{-2}. \tag{1.66}$$

以上より、$f_\nu \simeq 0.405$ を用いれば

$$\ell_{\rm eq} \sim \begin{cases} 220\ (h/0.5) & (\Omega_\Lambda = 0) \\ 220\ \Omega_{\rm m}^{1/2}(1+\ln\Omega_{\rm m}^{0.085})(h/0.5) & (\Omega_\Lambda = 1-\Omega_{\rm m}) \end{cases} \tag{1.67}$$

を得る。このスケールは 1st ドップラーピークと同じであり、結果としてドップラーピークが高くなるのである (図 1.4)。ピークの位置から $\Omega_{\rm m}+\Omega_\Lambda$ を求められるのはすでに述べた通りであるが、ピークの高さからは $\Omega_{\rm m}h^2$ の情報を得ることができ、これらから $\Omega_{\rm m}$, Ω_Λ を分離して決める事が可能となる。$\Omega_\Lambda = 0$ のケースでは h のみの依存性になっている事も興味深い。

13.2　$\Omega_{\rm b}h^2$ を決める

温度ゆらぎの観測によってバリオンの存在量を正確に決められる事を示したのも重要である。音速の式 (1.31) をもう一度書けば、

$$c_{\rm s} = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}},$$

$$R = \frac{3\rho_{\rm b}}{4\rho_\gamma} = 31.5\ \Omega_{\rm b}h^2 T_{2.7}^{-4}\left(\frac{1+z}{10^3}\right)^{-1},$$

従ってバリオンの量 $\Omega_{\rm b}h^2$ を増やす事により音速が落ち、光子–バリオン流体の「重さ」が増えるため流体はより圧縮される。一方、放射圧が弱まっているため膨張点は同じに保たれ、アコースティック振動のゼロ点は変化し、慣性の増加によって振動の振幅も大きくなる。C_ℓ は温度ゆらぎの 2 乗であるから、結果として 1st ドップラーピークを始めとする奇数ピークが上がり、偶数ピークが相対的に下がる事になる。このように奇数と偶数のピークでふるまいの異なる効果は $\Omega_{\rm b}h^2$ 以外に存在せず、CMB の観測によるパラメター決定において宇宙の曲率 $(\Omega_{\rm m}+\Omega_\Lambda)$ 同様、最も良く決まるパラメターである (図 1.5)

これらは彼らの仕事のほんの一例であり、CMB のゆらぎに関するほとんど全ての効果に定性的な理解を与えたばかりでなく、彼らは解析解を用いて定量的にも数値計算の結果を 5%の精度で再現するという離れ業をやってのけた。結果、宇宙論パラメターへの依存性を定量的に理解する事に成功したわけである。彼らの仕事により CMB のゆらぎの理論は完全に理解され、その後の研究は CMB の温度ゆらぎを用いていかに宇宙論パラメターを正しく決めるか、という方向へ加速度的に進んでいった。その先駆けとなった仕事が Jungman,

図 1.4: 放射優勢期のポテンシャルの時間変動による、ピークのブースト。$\Omega_{\rm m}h^2$ を減らすと放射密度と物質密度のつりあいの時期 $z_{eq} \propto \Omega_{\rm m}h^2$ が遅れ、放射優勢期にホライズンに入ったゆらぎのスケールが大きくなる。放射優勢期のホライズン内の温度ゆらぎはポテンシャルの時間変化による外力を受けて共鳴的に大きくなり、ドップラーピークが増大する。

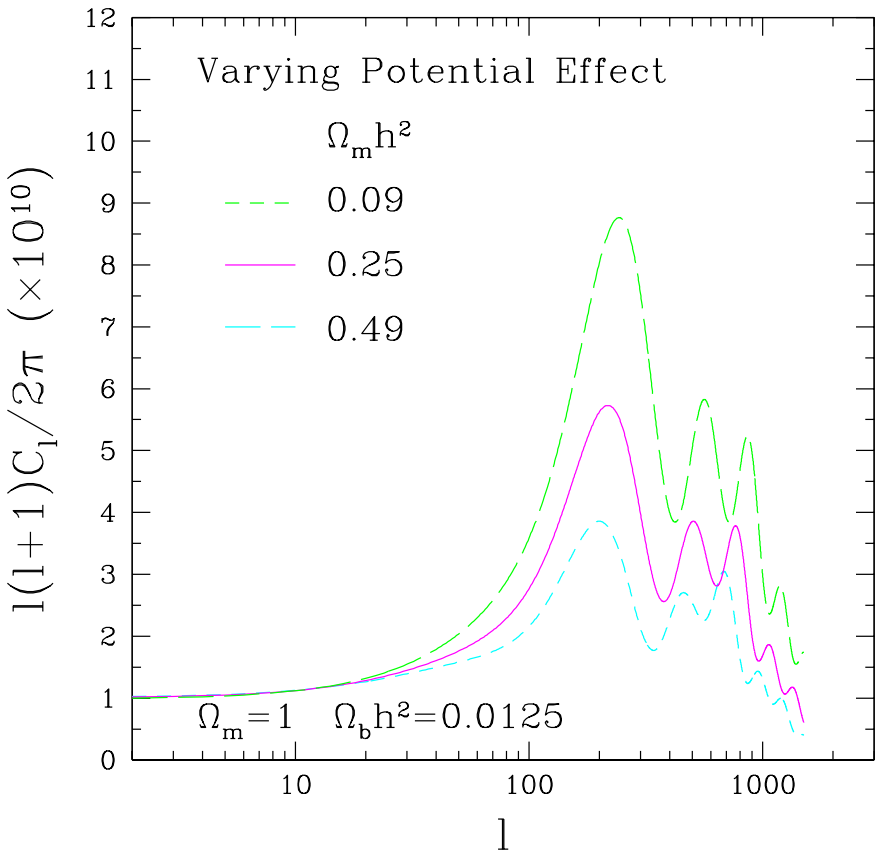
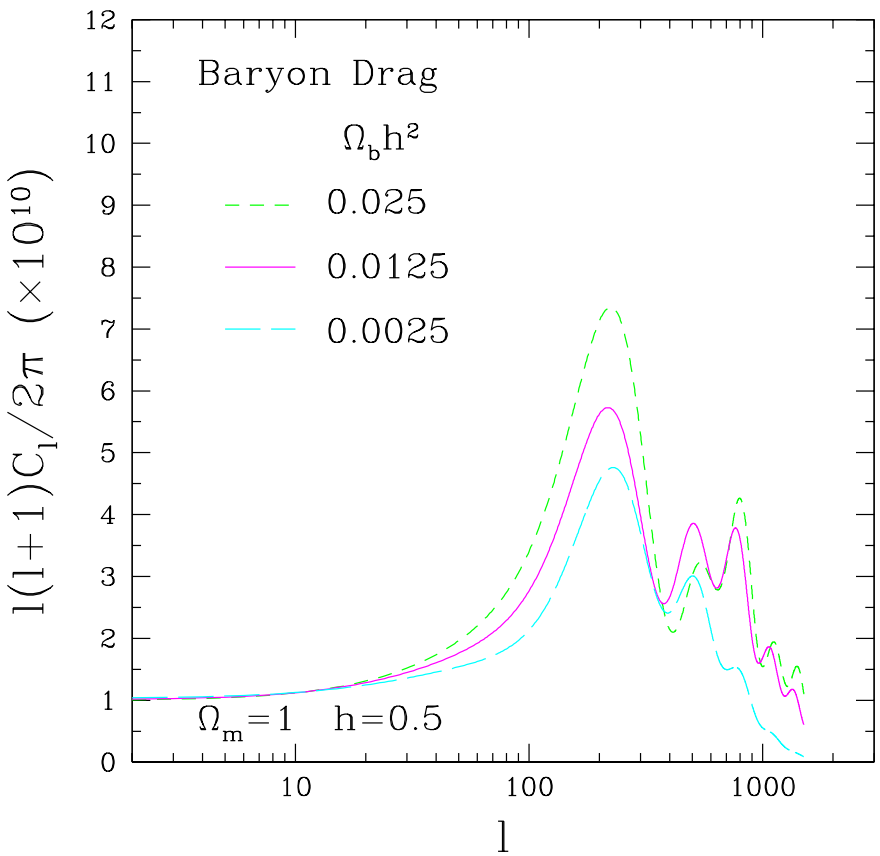


図 1.5: バリオンの効果。$\Omega_b h^2$ を増やすと、$R \propto \Omega_b h^2$ が増えるためアコースティック振動のゼロ点が上にシフトし、圧縮フェイズである 1st, 3rd ピークが相対的に上がる。



Kamionkowski, Kosowski & Spergel (1996) であり、解析解に基づくコードが従来のものより計算速度が早い事を利用して宇宙論パラメターの決定精度を求めた。

14 2000 年—5%の宇宙論: MAP

COBE によるゆらぎの発見以降、観測における現在の興味は 1st ドップラーピークの検出に集中している。各国のグループがこぞって検出を競い、1° スケールのゆらぎの測定を報告している。

1999 年になり、注目される報告が相次いだ。

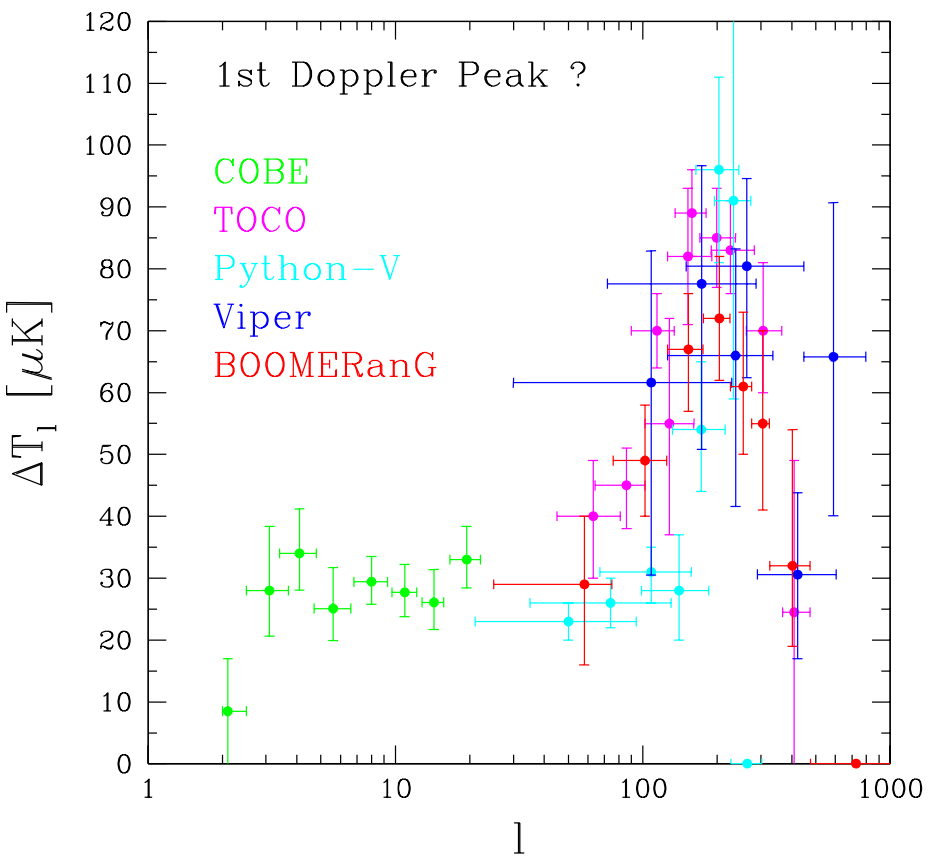
- TOCO (Torbet et al. 1999; Miller et al. 1999)
  $45 < \ell < 367$
- Python-V (Coble et al. 1999)
  $21 < \ell < 227$
- Viper (Peterson et al. 1999)
  $30 < \ell < 448$
- BOOMERanG (Mauskopf et al. 1999)
  $25 < \ell < 476$

これらが注目に値する理由は、単一の観測で広い ℓ をカバーしている事である。バラバラの観測でピークらしき構造が見えたとしても、バラバラの条件で観測したものをそのまま信じるのは厳しい。また、単一の観測であればキャリブレーションも同一であるから、ピークの高さが信用できなくてもピークの形は信用でき得る。1st ピークで曲率を測るにはピークの「位置」を測れば良いのだから、十分というわけである。図 1.6 は、上記の結果に COBE を加えたものである。全ての観測が $\ell \sim 200$ にピークの存在を示唆しているのが見てとれる。これを信じれば、宇宙はフラットという事になるだろう。

このピークが本物かどうかは、やはり衛星で決着がつく事になりそうだ。2000 年 11 月 7 日打ち上げ予定の NASA の CMB 観測衛星、MAP(=*Microwave Anisotropy Probe*) である (図 1.7) バンドは $\lambda = 13.6, 10.0, 7.5, 5.0, 3.3$ cm ($\nu = 22, 30, 40, 60, 90$ GHz)、ビームサイズは 90GHz で $\theta_{\rm FWHM} = 13'$ であり、式 (1.42) より

$$\ell_{\rm max} = \frac{670}{\theta_{\rm FWHM}/10'} \sim 520 \qquad \text{at 90 GHz}$$

図 1.6: COBE, TOCO, Python-V, Viper, BOOMERanG による CMB 温度ゆらぎの測定値。$l \sim 200$ にピークがあるのが見てとれる。



を得る。3rd ピークは厳しいかもしれないが、1st ピークには十分な分解能である (図 1.8)

Efstathiou & Bond (1999) によれば、MAP により宇宙論パラメターは以下の決定精度で決められる事が期待されている (エラーは全て 1σ)。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(\Omega_{\rm b}h^2)}{\Omega_{\rm b}h^2} &= 0.028, \\
\frac{\delta(\Omega_{\rm m}h^2)}{\Omega_{\rm m}h^2} &= 0.097, \\
\frac{\delta h}{h} &= 0.082, \\
\delta\Omega_\Lambda &= 0.16.
\end{aligned}$$

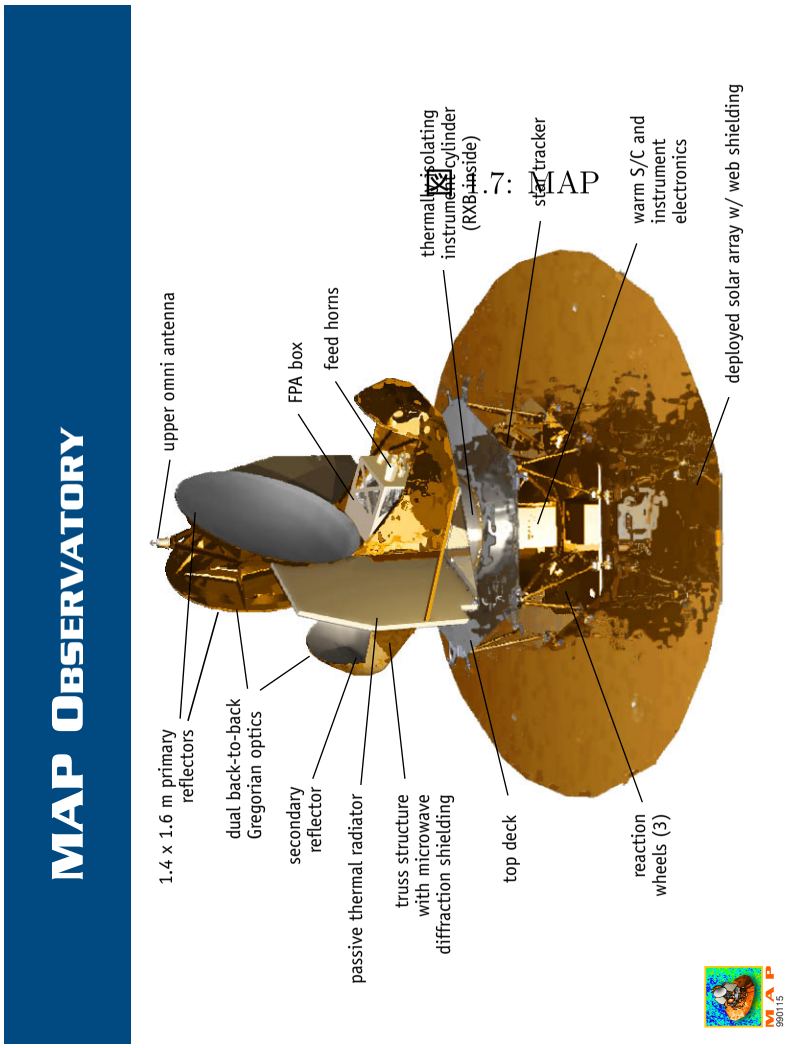

MAP Observatory
upper omni antenna
FPA box
feed horns
thermally isolating instrument cylinder (RXB inside)
star tracker
warm S/C and instrument electronics
deployed solar array w/ web shielding
1.4 x 1.6 m primary reflectors
dual back-to-back Gregorian optics
secondary reflector
passive thermal radiator
truss structure with microwave diffraction shielding
top deck
reaction wheels (3)
MAP
990115

図 1.7: MAP

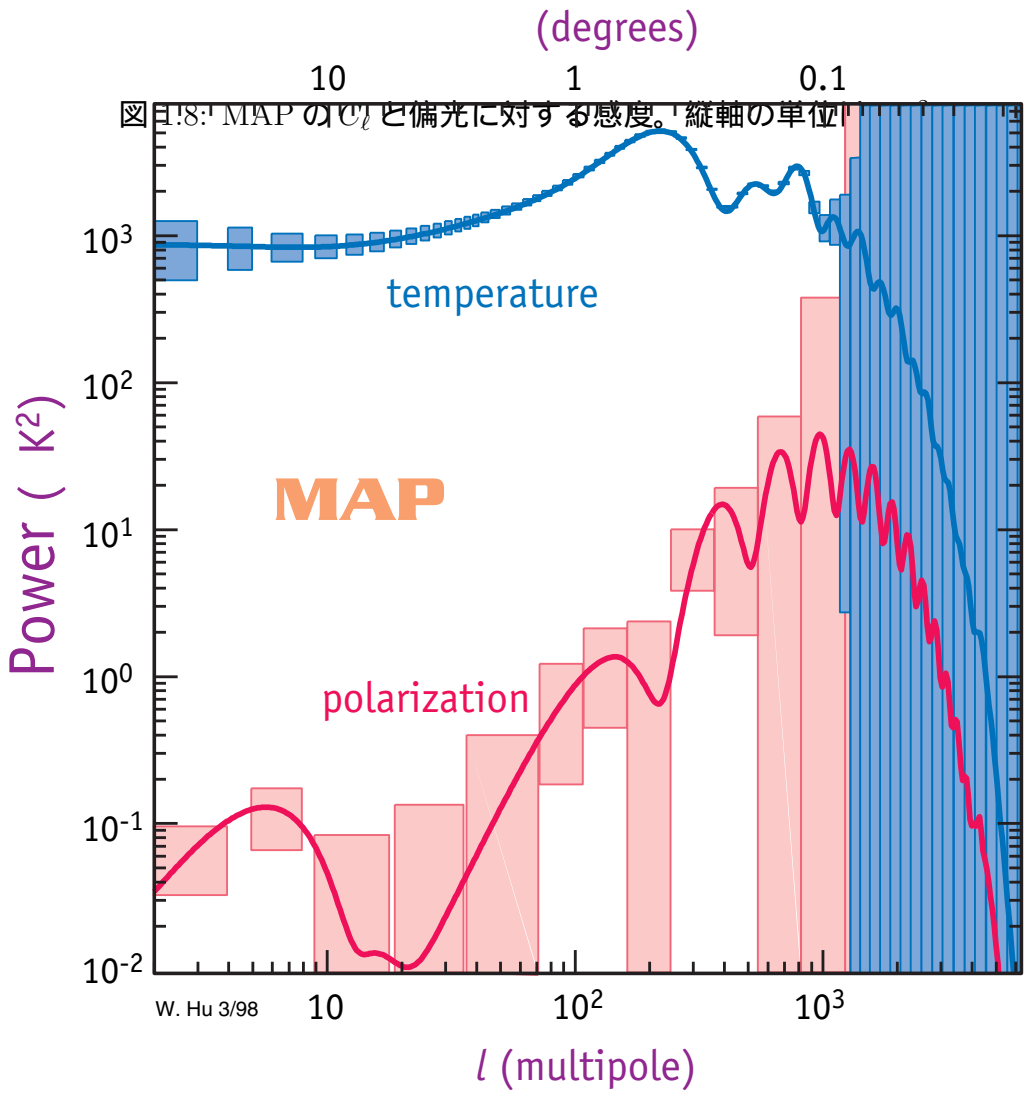


図 1.8: MAP の C_ℓ と偏光に対する感度。縦軸の単位は μK^2。

990040

www.sns.ias.edu/~whu/cmbex.html

第2章　宇宙の晴れ上がり

1　一様等方膨張宇宙における諸量

1.1　Newton 的描像による Friedmann 方程式の導出

宇宙膨張を記述する基礎方程式は、実は一般相対論を使うことなしに Newton 的描像で導く事が可能である。ある半径スケールを $\mathcal{R}$ とし、宇宙膨張による時間変化を無次元量であるスケールファクター $a(t)$ で表す。半径 $\mathcal{R}a(t)$ 内にある質量を M とすれば $a(t)$ の従うべき運動方程式は

$$\mathcal{R}\frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM}{\mathcal{R}^2 a^2}. \tag{2.1}$$

$\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ をかけて積分すればエネルギー方程式が得られ、

$$\frac{\mathcal{R}}{2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{GM}{\mathcal{R}^2 a} - \frac{\kappa c^2}{2}. \tag{2.2}$$

ここで κ は積分定数であり、$(\text{長さ})^{-2}$ の次元を持つように c^2 を導入した。負符号も任意に選んだ。M は密度 ρ を用いて

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho(\mathcal{R}a)^3$$

と書けるので、式 (2.2) は

$$\left(\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{a^2} \tag{2.3}$$

となる。これが Friedmann 方程式と呼ばれる、一様等方膨張を記述する方程式である。

1.2　Hubble パラメーターと密度パラメーター

一様等方に膨張する時空を記述する 4 次元線素は

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[-c^2\mathrm{d}\tau^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\kappa r^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{2.4}$$

のように書ける。κ は 3 次元空間における曲率を表すパラメターであり、$\kappa^{-1/2}$ は曲率半径である。前項で導いた Friedmann 方程式 (2.3) 中の積分定数はこの κ に対応しており、それは Einstein 方程式から Friedmann 方程式を導く事によって示される。また、τ は共形時間で通常の時間 t とは

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{a} \tag{2.5}$$

で結ばれている。通常の時間を使っても良いが、後の簡便性のためにこれからは共形時間のみを用いる事にする。

スケールファクター $a(\tau)$ は、現在を 1 として定義する。宇宙膨張による赤方偏移とは $a = (1+z)^{-1}$ で結ばれている。この線素を用いて Einstein 方程式から Friedmann 方程式を導けば、再び式 (2.3):

$$H^2(a) \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(a) - \frac{\kappa c^2}{a^2} \tag{2.6}$$

を得る。ドットは τ による微分、$\rho(a)c^2$ は宇宙の全エネルギー密度であり、主に

$$\rho(a) = \sum_{\mathrm{f}} \rho_{\mathrm{f}}(a) \equiv \rho_{\mathrm{m}}(a) + \rho_{\gamma}(a) + \rho_{\nu}(a) + \rho_{\Lambda}(a) = \rho_{\mathrm{m}0}a^{-3} + \rho_{\gamma 0}a^{-4} + \rho_{\nu 0}a^{-4} + \rho_{\Lambda 0} \tag{2.7}$$

と書ける。順番に、物質・光子・軽いニュートリノ・真空を表し、ゼロのついた量は現在の量である。また真空のエネルギー密度は「宇宙定数 Λ」を用いて

$$\rho_{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \text{一定} \tag{2.8}$$

のように定義する。Λ は (長さ)$^{-2}$ の次元を持つ。それぞれの a に対する依存性は、以下のように導ける。

- ρ_{m}
  質量保存 $\rho_{\mathrm{m}}a^3 = \text{一定} \leftrightarrow \rho_{\mathrm{m}} \propto a^{-3}$.

- ρ_{γ}, ρ_{ν}
  相対論的成分はエネルギー密度 $\rho c^2 \propto T^4$ を持ち、断熱膨張であるからエントロピー一定 ($T^3a^3 = \text{一定}$) より、$\rho \propto T^4 \propto a^{-4}$.

次に、密度パラメター Ω_{f}:

$$\Omega_{\mathrm{f}} \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{\mathrm{f}0} \tag{2.9}$$

を定義すれば、Friedmann 方程式 (2.6) は

$$H^2(a) = H_0^2\left[\Omega_{\mathrm{m}}a^{-3} + \Omega_{\gamma}a^{-4} + \Omega_{\nu}a^{-4} + \Omega_{\Lambda} + \left(1 - \sum_{\mathrm{f}}\Omega_{\mathrm{f}}\right)a^{-2}\right] \tag{2.10}$$

と書き下せる。

1.3　宇宙論パラメターあれこれ

現在の観測によって得られている宇宙論パラメターの値をざっと見ておく。

- Hubble 定数 (Freedman 1999)

$$H_0 = 71 \pm 3 \text{ (statistical)} \pm 7 \text{ (systematic) km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

- バリオン密度パラメター (Burles & Tytler 1998a,b)

$$(\mathrm{D/H}) = (3.4 \pm 0.3) \times 10^{-5} \rightarrow \Omega_{\mathrm{b}} h^2 = 0.02 \pm 0.002$$

- 全物質密度パラメター
  - M/L 関係 (Bahcall, Lubin & Dorman 1995)

$$\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{(M/L)_{\mathrm{obs}}}{(M/L)_{\mathrm{c}}} \sim \frac{300\ h}{1400\ h} \sim 0.21$$

  - 銀河団のガスフラクション (Mohr et al. 1998)

$$\frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{m}}} \sim \frac{M_{\mathrm{gas}}}{M} = (0.075 \pm 0.002) h^{-3/2} \rightarrow \Omega_{\mathrm{m}} \sim 0.32\ (\Omega_{\mathrm{b}} h^2/0.02)(h/0.71)^{-1/2}$$

1.4　Hubble パラメターの近似式

式 (2.10) の 1 項目と 4 項目、あるいは 1 項目と 5 項目の大きさを見比べれば、$a \ll (\Omega_{\mathrm{m}}/\Omega_\Lambda)^{1/3}$, $a \ll \Omega_{\mathrm{m}}/\left|1 - \sum_{\mathrm{f}} \Omega_{\mathrm{f}}\right|$ の領域において

$$H(a) \simeq H_0 a^{-3/2} \left[\Omega_{\mathrm{m}} + (\Omega_\gamma + \Omega_\nu)\,(a_{\mathrm{eq}}/a) a_{\mathrm{eq}}^{-1}\right]^{1/2}, \tag{2.11}$$

ここで a_{eq}^{-1} の表式:

$$a_{\mathrm{eq}}^{-1} \equiv \frac{\Omega_{\mathrm{m}}}{\Omega_\gamma + \Omega_\nu} = \frac{\Omega_{\mathrm{m}}}{\Omega_\gamma}(1 - f_\nu) = 4.2 \times 10^4\ (\Omega_{\mathrm{m}} h^2)(1 - f_\nu) T_{2.7}^{-4} \tag{2.12}$$

を代入すれば、有用な $H(a)$ の近似式として

$$H(a) \simeq H_0 \Omega_{\mathrm{m}}^{1/2} a^{-3/2} \left[1 + (a_{\mathrm{eq}}/a)\right]^{1/2} \qquad \left(a \ll \frac{\Omega_{\mathrm{m}}}{\left|1 - \sum_{\mathrm{f}} \Omega_{\mathrm{f}}\right|}, \left(\frac{\Omega_{\mathrm{m}}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3}\right) \tag{2.13}$$

を得る。放射優勢時から晴れ上がり時まではこの式で全て記述できるため便利である。また、式 (2.12) の導出の際

$$\Omega_\gamma = 2.38 \times 10^{-5}\ h^{-2} T_{2.7}^4 \tag{2.14}$$

を用いたが、これより

$$\sum_{\rm f} \Omega_{\rm f} \simeq \Omega_{\rm m} + \Omega_\Lambda \tag{2.15}$$

である事が分かる。

1.5 共形時間の近似式

近似式 (2.13) を用いると、共形時間を a で表す事ができる。定義より

$$\tau(a) = \int_0^a \frac{{\rm d}a}{a^2 H(a)} \simeq (\Omega_{\rm m} H_0^2)^{-1/2} \int \frac{{\rm d}a}{(a+a_{\rm eq})^{1/2}} = 2(\Omega_{\rm m} H_0^2)^{-1/2} a^{1/2} f_{\rm R}(a), \tag{2.16}$$

$$f_{\rm R}(a) \equiv (1 + a_{\rm eq}/a)^{1/2} - (a_{\rm eq}/a)^{1/2}. \tag{2.17}$$

$a \simeq z^{-1}$ を用いれば、1 章の式 (1.12) を導くことができる。

1.6 共動角径距離と共形時間の関係

共形時間は、次のようにも表すことができる。光はヌル測地線 $({\rm d}s = 0)$ を通るので 4 次元線素 (2.4) より

$$c{\rm d}\tau = \pm \frac{{\rm d}r}{\sqrt{1-\kappa r^2}}. \tag{2.18}$$

ここで、プラスは原点から外向きに向かう光、マイナスはその逆である。今、時刻 τ に動径座標 r を出発し τ_0 に原点に到着する光を考えると、

$$c\Delta\tau = -\int_r^0 \frac{{\rm d}r}{\sqrt{1-\kappa r^2}} = |\kappa|^{-1/2} \int_0^{|\kappa|^{1/2} r} \frac{{\rm d}x}{\sqrt{1 \mp x^2}} = \begin{cases} \kappa^{-1/2} \sin^{-1}\left(\kappa^{1/2} r\right) & (\kappa > 0) \\ r & (\kappa = 0) \\ |\kappa|^{-1/2} \sinh^{-1}\left(|\kappa|^{1/2} r\right) & (\kappa < 0) \end{cases} \tag{2.19}$$

を得る。ただし $\Delta\tau \equiv \tau_0 - \tau$ である。

一方、原点から角度 θ で見込まれる、座標 r のものが持つ共動長さは $D = r\theta$ であるから、共動角径距離 r_θ を以下のように定義できる。

$$r_\theta \equiv \frac{D}{\theta} = r. \tag{2.20}$$

すなわち座標距離と共動角径距離は一致する。式 (2.19) を用いれば、共動角径距離は共形時間で書けて

$$r_\theta(\tau) = \begin{cases} \kappa^{-1/2} \sin\left(\kappa^{1/2} c\Delta\tau\right) & (\kappa > 0) \\ c\Delta\tau & (\kappa = 0) \\ |\kappa|^{-1/2} \sinh\left(|\kappa|^{1/2} c\Delta\tau\right) & (\kappa < 0) \end{cases} \tag{2.21}$$

を得る。以上より D を見込む角度は κ の符号によって大きく異なり、$\kappa > 0$ の時 $\theta > D/(c\Delta\tau)$、$\kappa < 0$ の時 $\theta < D/(c\Delta\tau)$ を与える。

1.7　共動角径距離の近似式

$r_\theta(\tau)$ を z の関数で書き表すと非常に複雑な関数形になってしまうが、$z \gg \Omega_{\rm m}^{-1}$ のケースでは非常に単純化される。

$$r_\theta \simeq 2c(\Omega_{\rm m} H_0^2)^{-1/2} f_{\rm G} \qquad (z \gg \Omega_{\rm m}^{-1}), \tag{2.22}$$

$$f_{\rm G} \equiv \begin{cases} \Omega_{\rm m}^{-1/2} & (\Omega_\Lambda = 0), \\ 1 + \ln \Omega_{\rm m}^{0.085} & (\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{\rm m}). \end{cases} \tag{2.23}$$

従って、r_θ は z に依らず一定となり、どんなに遠くのものであっても $z \gg \Omega_{\rm m}^{-1}$ であれば見込む角度は同じである事を意味している。また、$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{\rm m}$ のケースでは宇宙は平坦 $(\kappa = 0)$ だが、宇宙の進化の仕方が $\Omega_{\rm m} = 1$ とは異なるために $f_{\rm G}$ の補正が存在する。例えば $\Omega_{\rm m} = 0.3$ の時 $f_{\rm G}^{\rm flat} \sim 0.9$ である。

2　晴れ上がる宇宙

光子が自由電子と共存するような系では、トムソン散乱によってお互いが相互作用を行なう。そのタイムスケールは式 (1.11) を用いて

$$\begin{aligned} t_{\rm C} &\equiv (c\sigma_{\rm T} x_{\rm e} n_{\rm e})^{-1} \\ &= 4.5 \times 10^{18}\ x_{\rm e}^{-1} (1+z)^{-3} (\Omega_{\rm b} h^2)^{-1} (1 - Y_{\rm P}/2)^{-1}\ \ {\rm sec} \\ &\sim 10^{13}\ x_{\rm e}^{-1} (1+z)^{-3} \left(\frac{\Omega_{\rm b} h^2}{0.0125}\right)^{-1} (1 - Y_{\rm P}/2)^{-1}\ \ {\rm yrs}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

$x_{\rm e}$ は電離度で、$x_{\rm e} n_{\rm e}$ が自由電子の数密度である。式 (2.24) より、もし宇宙が完全電離 $(x_{\rm e} = 1)$ であり続けたとすれば、$z \gg 10$ において $t_{\rm C} \ll 10^{10}$ yrs、すなわちトムソン散乱のタイム

スケールは宇宙年齢よりも短い。つまりCMB光子はその時期まで電子による散乱に邪魔されてまっすぐ進めない事になる。実際には$z \sim 1000$の時期に自由電子は陽子に捕獲(再結合; recombination)されてHを形成するため電離度は急激に小さくなり、CMBはまっすぐ進めるようになる。これは脱結合(decoupling)と呼ばれている。

2.1 電離平衡近似は正しいか

脱結合のプロセスは電子の再結合の詳細によって決まるが、もし電離平衡が成り立っていれば問題が非常に簡単に解ける。この条件が満たされるためにはHのイオン化エネルギー: $B_1 = 13.6\ \mathrm{eV} = 1.58 \times 10^5\ \mathrm{K}$ * より大きいエネルギーを持つ光子の数が、陽子1個あたりに十分多くなければならない。あるエネルギー$h\nu$を持つ光子の数密度$n_\gamma(\nu)$は

$$n_\gamma(\nu) = \frac{8\pi\nu^2/c^3}{e^{h\nu/k_\mathrm{B}T} - 1} \tag{2.25}$$

であり、晴れ上がり時の温度$T_* \sim 2700\ \mathrm{K} \sim 0.23\ \mathrm{eV}$を考えれば、今興味あるエネルギーバンド$h\nu > 13.6\ \mathrm{eV}$において$h\nu \gg k_\mathrm{B}T$が成り立っているので

$$n_\gamma(\nu) \simeq \frac{8\pi\nu^2}{c^3} e^{-h\nu/k_\mathrm{B}T} \tag{2.26}$$

と近似できる。一方、全数密度比n_γ/n_pは$n_\gamma \propto T^3 \propto a^{-3}$, $n_\mathrm{p} \propto a^{-3}$より宇宙膨張とともに一定値:

$$\frac{n_\gamma}{n_\mathrm{p}} = 3.6 \times 10^7\ (1 - Y_\mathrm{P}/2)(\Omega_\mathrm{b}h^2)^{-1}T_{2.7}^3 \sim 3 \times 10^9\ (\Omega_\mathrm{b}h^2/0.0125)^{-1} \tag{2.27}$$

に保たれる。ここで全数密度比は$n_\gamma(\nu)$のピーク$h\nu_\mathrm{p} \sim 0.44\ (T/2700\ \mathrm{K})\ \mathrm{eV}$での値でほぼ決まっているとすれば、晴れ上がり時において

$$\frac{n_\gamma(13.6\mathrm{eV})}{n_\mathrm{p}} \sim 3 \times 10^9 \times \frac{13.6^2\ e^{-13.6/0.23}}{0.44^2\ e^{-0.44/0.23}} \sim 4 \times 10^{-13}, \tag{2.28}$$

すなわち電離平衡は全く成り立っていない事になる。電離平衡を用いて良い領域$(n_\gamma(13.6\mathrm{eV})/\mathrm{n_p} \gtrsim 1)$は$T \gtrsim 6000\mathrm{K}$のみである。実際にはLyman–$\alpha$ (10.2 eV)の光子が十分あれば電離平衡の式が良い近似で成り立ち、$T \gtrsim 4000\mathrm{K}$がだいたいの閾値である。

---

* $1\ \mathrm{eV} = 1.16 \times 10^4\ \mathrm{K}$

2.2　再結合のプロセス

これまでの議論より、基底状態は晴れ上がり時に電離平衡でない事が分かったが、$n \geq 2$ の励起状態に関しては $n = 2$ の電離エネルギー: $B_2 = 3.4$ eV を用いれば $n_\gamma(3.4\mathrm{eV})/n_\mathrm{p} \sim 4.5 \times 10^5$ であり十分平衡状態である事が分かる。従って基底状態と $n = 2$ の状態に関して解けば十分であり、考慮すべきプロセスは以下の 2 つのしぼられる。

- 2 光子遷移: $2\mathrm{s} \to 1\mathrm{s} + \gamma + \gamma$
- Lyman–α 遷移: $2\mathrm{p} \to 1\mathrm{s} + \gamma$

前者の放出する光子のエネルギーは 10.2 eV 以下であるから作られた H を再電離する事はないが、後者は電離してしまう。しかし、宇宙膨張のために光子は H を電離する前に赤方偏移でエネルギーを失うため、後者のケースも再結合に寄与する。

このプロセスは Peebles によって 1968 年に解かれ (Peebles 1968)、彼の結果は基本的に現在も使われている。彼によって導かれた結果は、

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_\mathrm{e} n_\mathrm{e}}{n_\mathrm{b}}\right) = \left[\alpha_\mathrm{c}\frac{x_\mathrm{e}^2 n_\mathrm{e}^2}{n_\mathrm{b}} - \beta_\mathrm{c}\frac{n_\mathrm{1s}}{n_\mathrm{b}} e^{-(B_1-B_2)/k_\mathrm{B}T}\right] C, \tag{2.29}$$

また、$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -H(1+z)$、式 (1.11):

$$n_\mathrm{e} = n_\mathrm{b}(1 - Y_\mathrm{P}/2),$$

および中性水素の数密度 n_1s:

$$n_\mathrm{1s} = n_\mathrm{b} - x_\mathrm{e} n_\mathrm{p} - 4n_\mathrm{He} = n_\mathrm{b}(1 - x_\mathrm{e})(1 - Y_\mathrm{P}) \tag{2.30}$$

を用いれば、式 (2.29) は

$$-\frac{dx_\mathrm{e}}{\mathrm{d}z} = \left[-\alpha_\mathrm{c} n_\mathrm{b} x_\mathrm{e}^2 (1 - Y_\mathrm{P}/2) + \beta_\mathrm{c}(1 - x_\mathrm{e})\left(\frac{1 - Y_\mathrm{P}}{1 - Y_\mathrm{P}/2}\right) e^{-(B_1-B_2)/k_\mathrm{B}T}\right] \frac{C}{H(1+z)} \tag{2.31}$$

と書き換えられる。第 1 項が再結合、第 2 項が電離を表す。ここで

$$\alpha_\mathrm{c} = 2.84 \times 10^{-13}\ (T/10^4)^{-1}\ \mathrm{cm}^3\ \mathrm{s}^{-1}, \tag{2.32}$$

$$\beta_\mathrm{c} \equiv \alpha_\mathrm{c}\left(\frac{2\pi m_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-B_2/k_\mathrm{B}T}, \tag{2.33}$$

はそれぞれ再結合係数, 電離係数で残りの係数は

$$C \equiv \frac{1 + K\Lambda_{2s\to 1s} n_{1s}}{1 + K(\Lambda_{2s\to 1s} + \beta_c) n_{1s}}, \qquad \Lambda_{2s\to 1s} = 8.22458\ \mathrm{s}^{-1}, \tag{2.34}$$

$$K \equiv \frac{\lambda_\alpha^3}{8\pi} H^{-1}, \qquad \lambda_\alpha = 1.216 \times 10^{-5}\ \mathrm{cm}, \tag{2.35}$$

と定義される。C の分子第 1 項は Lyman–α 遷移からの寄与、第 2 項は 2 光子遷移 ($\Lambda_{2s\to 1s} \equiv$ 遷移確率) の寄与である。分母の β_c は Lyman–α 遷移にともなう電離を表し、その分再結合が遅れる。

式 (2.31) の精度を上げるには、

(1) 放射と物質の熱平衡からのズレを考慮に入れ、式 (2.31) 中の T を電子の温度 T_e に置き換えて T_e の発展の式を同時に解く

(2) α_c の精度を上げる

(3) $n \geq 2$ の電離平衡仮定をはずす

などが考えられる。(1) は Peebles (1968) において既に考慮されている。(2) はその後の計算において改訂が行なわれている。(3) はごく最近になって行なわれ、【RECFAST】という専用コードが配布されている (Seager, Sasselov & Scott 1999)。しかし、全てを考慮しても Peebles (1968) の x_e からのズレは 30%以下であり、CMB のゆらぎの計算でのズレは 10%以下である。

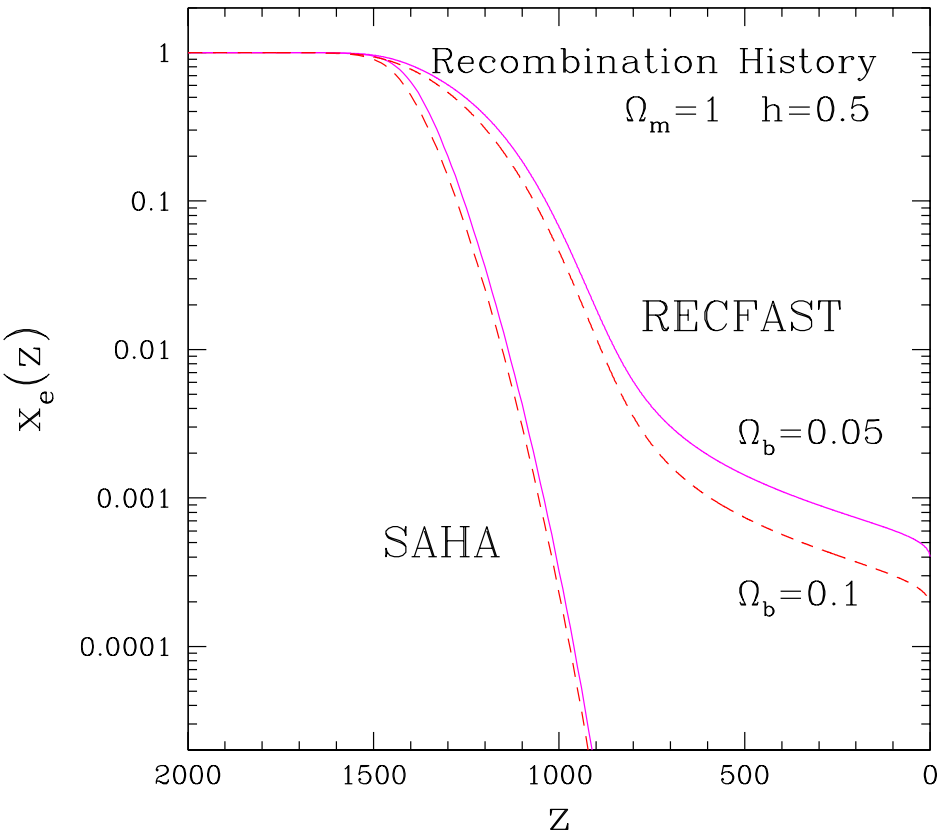
図 2.1 に、RECFAST による計算と、電離平衡の仮定のもとで x_e を計算したものをプロットした。これより、電離平衡の結果は $z \lesssim 1500$ ($T \lesssim 4000$ K) において著しくズレている事がわかる。また、電離度は現在でもゼロにはならず、$x_e \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ 程度が残る。

2.3 脱結合とヴィジビリティ

図 2.1 より自由電子は $z \sim 1000$ で再結合する事が分かるが、実際に CMB の光子が散乱されずに進めるようになる時期はまた別に求めねばならない。まず、トムソン散乱の光学的厚さ τ_C を以下のように定義する。

$$\tau_C \equiv \int \sigma_T x_e n_e a \mathrm{d}\tau. \tag{2.36}$$

図 2.1: 自由電子の再結合。$\Omega_{\rm m} = 1$, $h = 0.5$ のモデルにおいて $\Omega_{\rm b} = 0.05, 0.1$ について電離度 $x_{\rm e}$ の進化をプロットした。上側のカーブは RECFAST による計算、下側は Saha の電離平衡の式を解いたもの。$z \lesssim 1500$ $(T \lesssim 4000\ {\rm K})$ において両者は著しくズレている事がわかる。



これは散乱確率なので、ヴィジビリティ(透明度)は $e^{-\tau_{\rm C}}$ と表せる。これを τ で微分すれば、微分ヴィジビリティ関数 $\mathcal{V}(\tau)$ として

$$\mathcal{V}(\tau) \equiv (e^{-\tau_{\rm C}})^{\cdot} = \dot{\tau}_{\rm C} e^{-\tau_{\rm C}} = \sigma_{\rm T} x_{\rm e} n_{\rm e} a e^{-\tau_{\rm C}} \tag{2.37}$$

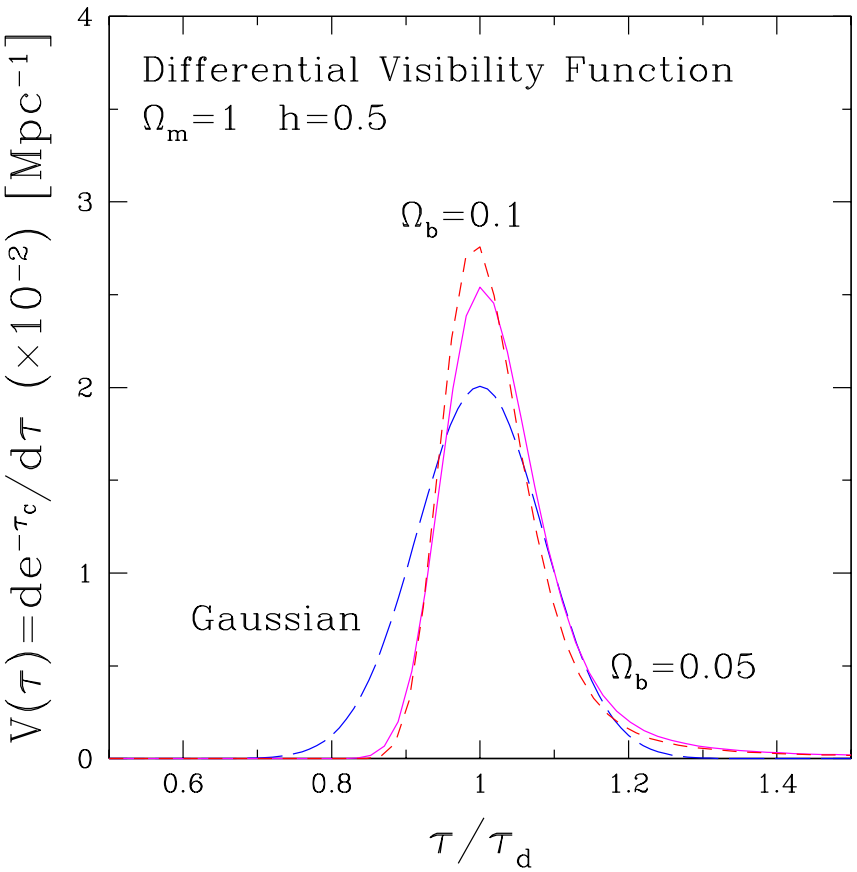
を得る。$\mathcal{V}(\tau)$ は透明度の時間変化、つまり晴れ上がりのプロセスを表している。図 2.1 で見たように、$x_{\rm e}$ は $z_* \sim 1000$ で急に小さくなるので、$\mathcal{V}(\tau)$ は脱結合期 $\tau_{\rm d} \sim \tau_*$ を中心にピークを持つ関数となる事が期待される。

図 2.2 に、微分ヴィジビリティ $\mathcal{V}(\tau)$ をプロットした。期待通り、$\tau_{\rm d}$ にピークを持つ関数となっている。わずかに非対称であるが、これは $\tau < \tau_{\rm d}$ では $\tau_{\rm C}(\tau)$ が急速に大きくなるため $\mathcal{V}(\tau)$ は鋭く落ちる。一方 $\tau > \tau_{\rm d}$ では $e^{-\tau_{\rm C}} \simeq 1$ であり、$\dot{\tau}_{\rm C} \propto n_{\rm e} a \propto (1+z)^2 \propto \tau^{-4}$ より $\mathcal{V}(\tau)$ は比較的なだらかに落ちるのである。また、ピークの幅は $\sigma_{\mathcal{V}} \sim 0.2\tau_{\rm d}$ 、すなわち脱結合期のパーティクルホライズンの約 20% である。問題を簡単化するための第ゼロ次近似としては、$\mathcal{V}(\tau) = \delta(\tau - \tau_{\rm d})$ とデルタ関数として扱う方法がある。これは考えているゆらぎの波長が $\sigma_{\mathcal{V}} \sim 50$ Mpc よりも大きい場合には正しい結果を与える。第 1 次近似では、$\mathcal{V}(\tau)$ をガウシアン:

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_{\mathcal{V}}^2}} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_{\rm d})^2}{2R_{\mathcal{V}}^2}\right) \tag{2.38}$$

で近似するものである。ここで $R_{\mathcal{V}} \equiv \sigma_{\mathcal{V}}/\sqrt{8\ln 2} \sim 0.08\tau_{\rm d}$ である。図 2.2 に、数値計算との比較のためガウシアン近似をプロットした。あまり精度は良くないが、デルタ関数を用いるよりは精度を上げる事ができる。実際有限の $\mathcal{V}$ の厚みのため、$R_{\mathcal{V}} \sim 20$ Mpc 以下のスケールのゆらぎはダンプしてしまう。

図 2.2: 微分ヴィジビリティ関数 $\mathcal{V}(\tau) \equiv \dot{\tau}_{\rm C} e^{-\tau_{\rm C}}$。$\Omega_{\rm m} = 1$, $h = 0.5$ のモデルにおいて $\Omega_{\rm b} = 0.05, 0.1$ のケースをプロットした。$\mathcal{V}(\tau)$ は脱結合期 $\tau_{\rm d}$ にピークを持つ。ピークの幅は $\sigma_{\mathcal{V}} \sim 0.2\tau_{\rm d}$。また、中心 $\tau_{\rm d}$, 幅 $\sigma_{\mathcal{V}}$ を持つガウシアンによる近似形をプロットした。



第3章　温度ゆらぎと物質ゆらぎの進化I

この節と次節では、ゆらぎの進化を一般相対論を用いて解析的に追う。これらの進化はEinstein方程式と光子–物質系の運動方程式によって解く事が可能である。問題は一般に非常に複雑であるが、ここではちょっとしたテクニックを用いて、問題を非常に簡単に解けるアプローチを紹介する。この節では$c = 1$という単位系を用い、また全ての量をFourier空間で表す。従って空間微分ひとつにつきkがひとつかかる。さらに、ここで導入する量は全てNewton的描像 (*Newtonian slicing*) において物理的意味をもつゲージ不変量である[*]。

1　基礎方程式

ゆらぎの進化はEinstein方程式によって完全に記述できるが、一般に複雑な方程式系となる。しかしEinstein方程式と流体の運動方程式を組み合わせる事で問題を簡単化する事ができる。流体の運動方程式はEinstein方程式と独立ではないが、導くのが比較的易しく、また解釈も容易であるため有用である。

まず、最も簡単に導けるEinstein方程式は

$$k^2 C_\kappa \Phi_{\rm H} = 4\pi G\rho a^2 \left(\epsilon_{\rm g} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{ka}V_{\rm s}\right), \tag{3.1}$$

$$k^2\left(\Phi_{\rm H} + \Phi_{\rm A}\right) = -8\pi G\rho a^2 w\pi, \tag{3.2}$$

ここで、

$$w \equiv \frac{p}{\rho}, \tag{3.3}$$

$$C_\kappa \equiv 1 - \frac{3\kappa}{k^2}, \tag{3.4}$$

[*] 異なるゲージ (例えば *synchronous gauge*) において物理的意味をもつゲージ不変量を用いると、密度ゆらぎの発展のふるまいが定性的に変わる事に注意。ゲージの選び方はもの事の見方、あるいは解釈の仕方と言い替える事ができる。ここではNewton的な重力不安定によるゆらぎの発展、という見方 (ゲージ) で話を進める。

- $\Phi_{\rm A} \equiv$ Newton ポテンシャル
- $\Phi_{\rm H} \equiv$ 曲率のゆらぎ
- $\epsilon_{\rm g} \equiv$ 全エネルギー密度のゆらぎ $= \sum_{\rm f} \delta\rho_{\rm f} / \sum_{\rm f} \rho_{\rm f}$
- $V_{\rm s} \equiv$ 速度場
- $\pi \equiv$ 非等方ストレス

である。式 (3.1) は Poisson 方程式に相当しているが、一般相対論的効果によって速度場もポテンシャルに寄与する。また 3 次元曲率の効果 C_κ が含まれている。式 (3.2) は Newton 的な対応を持たないが、Newton 理論で扱える範疇の物質は非等方ストレスが小さいのでこの式によって $\Phi_{\rm H} = -\Phi_{\rm A}$ となる。従って式 (3.1) は Newton ポテンシャルに対する通常の Poisson 方程式に帰着する。

次に流体の運動方程式は

$$\left(\frac{\epsilon_{\rm g}}{1+w}\right)^{\cdot} + kV_{\rm s} = -3\dot{\Phi}_{\rm H} - 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{w}{1+w}\Gamma, \tag{3.5}$$

$$\dot{V}_{\rm s} + (1-3c_{\rm s}^2)\frac{\dot{a}}{a}V_{\rm s} = k\left[\frac{c_{\rm s}^2}{1+w}\epsilon_{\rm g} + \Phi_{\rm A} - \frac{2w}{3(1+w)}C_\kappa\pi + \frac{w}{1+w}\Gamma\right]. \tag{3.6}$$

それぞれ連続の式・Euler の式である。こうして見ると、非相対論的な流体の運動方程式とほとんど変わらない事が分かる。連続の式では右辺にポテンシャルの時間変化や宇宙膨張といった相対論的効果が付与されている。Euler の式では、左辺第 2 項に宇宙膨張の効果がある以外は非相対論的な式と同じである。ところでこれらはトータルのエネルギー密度・速度場に対する方程式であり、成分間の相互作用は考慮されていない。相互作用に関しては次章で扱う。Γ は第 1 章の Sachs–Wolfe の項で少し触れたエントロピーゆらぎを表す量であり、流体が 2 成分以上から成る系では一般に存在する。

$$\Gamma \equiv \frac{1}{2}\sum_{{\rm f}{\rm f}'} \frac{\rho_{\rm f}(1+w_{\rm f})\rho_{{\rm f}'}(1+w_{{\rm f}'})}{\rho^2 w(1+w)}\left(c_{\rm sf}^2 - c_{{\rm sf}'}^2\right) S_{{\rm f}{\rm f}'}, \qquad w = \sum_{\rm f} w_{\rm f}, \tag{3.7}$$

$$S_{{\rm f}{\rm f}'} \equiv \frac{\delta_{\rm f}}{1+w_{\rm f}} - \frac{\delta_{{\rm f}'}}{1+w_{{\rm f}'}}, \tag{3.8}$$

f は成分を表す添字で、放射 (r), 物質 (m) である。例えば放射優勢期における放射–物質系では

$$\Gamma_{\rm mr} = -\frac{\Omega_{\rm m}}{\Omega_{\rm r}} S_{\rm mr} a = -S_{\rm mr}\frac{a}{a_{\rm eq}} \tag{3.9}$$

である。最後の等号は、放射密度と物質密度が等しくなる時期 (式 (2.12)):

$$a_{\rm eq}^{-1} = \frac{\Omega_{\rm m}}{\Omega_{\rm r}}$$

を用いた。

2 エントロピーゆらぎの時間発展

$\Gamma_{\rm mr}$ の時間発展は $S_{\rm mr}$ によって決められるが、これは連続の式 (3.5) から求められる。

$$\dot{S}_{\rm mr} = -k(V_{\rm sm} - V_{\rm sr}). \tag{3.10}$$

従って放射と物質の相対速度によって決められる事になり、物質と放射が共に運動するような系においては $S_{\rm mr} =$ 一定 となる。

3 非等方ストレスの役割

非等方ストレス π は、式 (3.2) を通じて Newton ポテンシャル $\Phi_{\rm A}$ と曲率ゆらぎ $\Phi_{\rm H}$ をずらせる。ストレスは圧力において主要な寄与を持つ放射成分によってサプライされているが、光子はトムソン散乱を通じて等方化されるため、物質との相互作用が弱いニュートリノが π のソースである。これによる効果は放射優勢期において

$$\frac{\Phi_{\rm H} + \Phi_{\rm A}}{\Phi_{\rm A}} = -\frac{2}{5} f_\nu \simeq -0.162, \tag{3.11}$$

よって近似的に無視できる。

4 スーパーホライズンスケールの解

これより、基礎方程式 (3.1)–(3.6) をストレスフリー ($\pi = 0$), スーパーホライズンスケール:

$$\frac{k}{aH} = \frac{ka}{\dot{a}} \ll 1,$$

宇宙の曲率が無視できる時期:

$$a \ll \frac{\Omega_{\rm m}}{|1 - \Omega_{\rm m} - \Omega_\Lambda|},$$

の条件のもとで解く。スーパーホライズンスケールでは運動方程式において成分間の相互作用がないため、式 (3.1)–(3.6) を使って良い。以上より、π, $(k/aH)^2$ および κ の項を無視する事によってコンシステントな解を得る。

まず Poisson 方程式 (3.1) より

$$\epsilon_{\rm g} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{ka}V_{\rm s} \qquad \left(\text{super horizon; } \frac{k}{aH} \ll 1\right). \tag{3.12}$$

残る Einstein 方程式 (3.2) より

$$\Phi_{\rm H} = -\Phi_{\rm A} \qquad (\text{stress free; } \pi = 0)\,. \tag{3.13}$$

解 (3.12) を連続の式 (3.5), Euler の式 (3.6) に代入すれば

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}V_{\rm s}\right)^{\cdot} = k\left(\dot{\Phi}_{\rm H} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{w}{1+w}\Gamma\right), \tag{3.14}$$

$$\dot{V}_{\rm s} + \frac{\dot{a}}{a}V_{\rm s} = k\left(\Phi_{\rm A} + \frac{w}{1+w}\Gamma\right) = k\left(-\Phi_{\rm H} + \frac{w}{1+w}\Gamma\right). \tag{3.15}$$

ただし式 (3.14) においてスーパーホライズン近似より $k^2V_{\rm s}/3$ の項を無視した。式 (3.15) を (3.14) に代入すれば、ストレスフリー・スーパーホライズンスケール近似における運動方程式:

$$\left(\dot{V}_{\rm s} + 2\frac{\dot{a}}{a}V_{\rm s}\right)^{\cdot} = \frac{w}{1+w}k\left(\dot{\Gamma} + \frac{\dot{a}}{a}\Gamma\right) \tag{3.16}$$

を得る。放射–物質系における Γ の時間発展は式 (3.9), (3.10) によって与えられる。スーパーホライズンでは成分間の相対速度はゼロであるから、式 (3.10) より

$$S_{\rm mr}(a) = S(0) = \text{一定} \tag{3.17}$$

である。

4.1　放射優勢期 $(w = 1/3)$

放射優勢期では式 (3.9) より

$$\Gamma_{\rm mr} = -S_{\rm mr}\frac{a}{a_{\rm eq}}$$

であるから、運動方程式 (3.16) は積分できて

$$\dot{V}_{\rm s} + 2\frac{\dot{a}}{a}V_{\rm s} = k\left(C - \frac{1}{2}S_{\rm mr}\frac{a}{a_{\rm eq}}\right), \tag{3.18}$$

C は積分定数である。$S_{\rm mr} = S(0) =$ 一定 より式 (3.18) はさらに積分できて、

$$V_{\rm s}(a) = ka^{-2} \int \frac{{\rm d}a'}{H(a')} \left(C - \frac{1}{2} S(0) \frac{a'}{a_{\rm eq}} \right). \tag{3.19}$$

放射優勢期における Hubble パラメターは式 (2.13):

$$H(a) \simeq H_0 (\Omega_{\rm m} a_{\rm eq})^{1/2} a^{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} k_{\rm eq} a_{\rm eq} a^{-2}$$

で近似できる。$k_{\rm eq} \equiv a_{\rm eq} H(a_{\rm eq}) = \sqrt{2} H_0 \Omega_{\rm m}^{1/2} a_{\rm eq}^{-1/2}$ は $a_{\rm eq}$ にホライズンをくぐるゆらぎの波数である。以上より式 (3.19) の積分を実行すれば、スーパーホライズンモードのゆらぎの解:

$$V_{\rm s}(a) = \sqrt{2} \left(\frac{k}{k_{\rm eq}} \right) \left[\frac{1}{3} C \frac{a}{a_{\rm eq}} - \frac{1}{8} S(0) \left(\frac{a}{a_{\rm eq}} \right)^2 \right] \tag{3.20}$$

を得る。積分定数 C はエントロピーゆらぎがゼロ (S(0)=0) の解、「断熱ゆらぎ」である。従って、一般解は断熱ゆらぎとエントロピーゆらぎの和で書けるのである。

密度ゆらぎの解は式 (3.12) から求められ、

$$\epsilon_{\rm g}(a) = -\frac{4}{3} \left(C - \frac{3}{8} S(0) \frac{a}{a_{\rm eq}} \right). \tag{3.21}$$

さらに Euler の式 (3.15) より、ニュートンポテンシャル $\Phi_{\rm A}$ および曲率ゆらぎ $\Phi_{\rm H}$ の解として

$$\Phi_{\rm A}(a) = -\Phi_{\rm H}(a) = \frac{2}{3} C - \frac{1}{8} S(0) \frac{a}{a_{\rm eq}} \tag{3.22}$$

を得る。ポテンシャルが一定値を取るので全ての解を $\Phi_{\rm H}(0) \equiv -2C/3$ で規格化するのが便利であり、以上より放射優勢期におけるスーパーホライズンスケールでの解のセットとして

- 断熱ゆらぎ: $S(0) = 0$

$$V_{\rm s}(a) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{k}{k_{\rm eq}} \Phi_{\rm H}(0) \frac{a}{a_{\rm eq}}, \tag{3.23}$$

$$\Phi_{\rm A}(a) = -\Phi_{\rm H}(a) = -\Phi_{\rm H}(0), \tag{3.24}$$

$$\epsilon_{\rm g}(a) = 2\Phi_{\rm H}(0), \tag{3.25}$$

- 等曲率ゆらぎ: $\Phi_{\rm H}(0) = 0$

$$V_{\rm s}(a) = -\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{k}{k_{\rm eq}}S(0)\left(\frac{a}{a_{\rm eq}}\right)^2, \tag{3.26}$$

$$\Phi_{\rm A}(a) = -\Phi_{\rm H}(a) = -\frac{1}{8}S(0)\frac{a}{a_{\rm eq}}, \tag{3.27}$$

$$\epsilon_{\rm g}(a) = \frac{1}{2}S(0)\frac{a}{a_{\rm eq}} \tag{3.28}$$

を得る。断熱ゆらぎではポテンシャル・密度ゆらぎは共に一定だが、等曲率ゆらぎでは $\propto a$ で成長するのが特徴である。断熱ゆらぎは重力不安定によって成長するため、スーパーホライズンでは因果律によって成長できないのに対し、等曲率ゆらぎはエントロピーゆらぎをソースするためスーパーホライズンスケールでも成長できるのである。

4.2　物質優勢期 $(w = 0)$

物質優勢期では式 (3.16) において $w = 0$ よりエントロピーゆらぎのソースが消えるため、解はすぐに

$$V_{\rm s}(a) = ka^{-2}\int\frac{{\rm d}a'}{H(a')}C, \tag{3.29}$$

$$\Phi_{\rm H}(a) = \left(-1 + \frac{H(a)}{a}\int\frac{{\rm d}a'}{H(a')}\right)C, \tag{3.30}$$

$$\epsilon_{\rm g}(a) = -3\frac{H(a)}{a}\int\frac{{\rm d}a'}{H(a')}C \tag{3.31}$$

のように得られる。特に、宇宙項が重要ではない時期 $(a \ll (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3})$ では式 (2.13) より

$$H(a) \simeq H_0\Omega_{\rm m}^{1/2}a^{-3/2} = 2\tau_0^{-1}a^{-3/2}$$

であり、積分は以下のように解析的に実行できる。

- 断熱ゆらぎ: $S(0) = 0$

$$V_{\rm s}(a) = \frac{k\tau_0}{5}Ca^{1/2} = -\frac{3k\tau_0}{10}\Phi_{\rm H}(0)a^{1/2}, \tag{3.32}$$

$$\Phi_{\rm A}(a) = -\Phi_{\rm H}(a) = \frac{3}{5}C = -\frac{9}{10}\Phi_{\rm H}(0), \tag{3.33}$$

$$\epsilon_{\rm g}(a) = -\frac{6}{5}C = \frac{9}{5}\Phi_{\rm H}(0) \tag{3.34}$$

ここでの積分定数 C は放射優勢と物質優勢の境での値だが、放射優勢時でのポテンシャルが一定なので $C = -3\Phi_{\rm H}(0)/2$ をそのまま使った。これより、ポテンシャルは放射優勢から物質優勢に移る際に 10% 大きさが小さくなり、再び一定値を取る事が分かる。

一方、宇宙項が効く時期では $\frac{H(a)}{a}\int\frac{{\rm d}a'}{H(a')}$ は単調増加関数となるため、$V_{\rm s}$ の成長は抑えられて $\Phi_{\rm H}$ は減衰する (図 3.1)。その一方で $\epsilon_{\rm g}$ は成長するが、これは宇宙項が効く時期になると H が一定値に近づき宇宙が加速膨張を始め、Hubble ホライズンを超えるスケールのゆらぎも因果関係を持てるようになるためである。結果として重力不安定によって密度ゆらぎは成長し始めるのである。

- 等曲率ゆらぎ: $\Phi_{\rm H}(0) = 0$

$$V_{\rm s}(a) = -\frac{k\tau_0}{15}S(0)a^{1/2}, \tag{3.35}$$

$$\Phi_{\rm A}(a) = -\frac{1}{5}S(0), \tag{3.36}$$

$$\epsilon_{\rm g}(a) = \frac{2}{5}S(0). \tag{3.37}$$

積分定数として

$$C = -\frac{1}{3}S(0)$$

をとった。式 (3.18) では $a = a_{\rm eq}$ でのソースは $-S(0)/2$ だが、放射優勢から物質優勢期への遷移はなめらかに起こるため $a = a_{\rm eq}$ での値がそのまま凍結するとは限らない。問題をもう少し正確に解く事により上記のファクター $1/3$ が得られ、凍結は $a = 2a_{\rm eq}/3$ で起こると解釈できる。その後の進化は断熱ゆらぎと同じである (図 3.2)。

5 スーパーホライズンスケールの温度ゆらぎ

前節で導いた密度ゆらぎ $\epsilon_{\rm g}$ は全成分に対するものであるから、今節では放射・物質それぞれに対する式を得る。$\epsilon_{\rm g}$ の定義から

$$\epsilon_{\rm g} = \frac{\sum_{\rm f}\delta\rho_{\rm f}}{\sum_{\rm f}\rho_{\rm f}} = \frac{\rho_{\rm m}\delta_{\rm m} + \rho_{\rm r}\delta_{\rm r}}{\rho_{\rm m} + \rho_{\rm r}}. \tag{3.38}$$

式 (2.12) より

$$\frac{\rho_{\rm m}}{\rho_{\rm r}} = \frac{\Omega_{\rm m}}{\Omega_{\rm r}}a = \frac{a}{a_{\rm eq}} \tag{3.39}$$

図 3.1: 物質優勢期のスーパーホライズンスケールにおける断熱ゆらぎの進化。ゆらぎの量は全て $\Phi(0)$ で規格化してある。$\Omega_{\rm m} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $h = 0.5$ のケースをプロットした。宇宙項が重要になる時期 $a = (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3} \sim 0.75$ で $V_{\rm s}$ の成長は抑えられ、$\Phi_{\rm H}$ は減衰する。$\epsilon_{\rm g}$ は成長し始める。

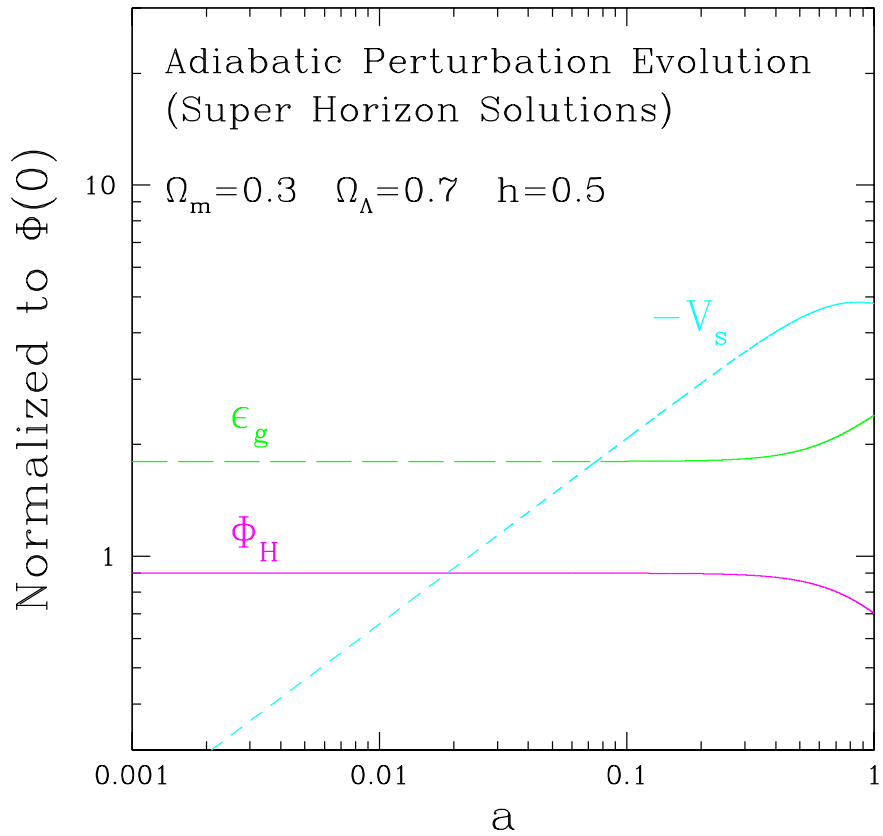
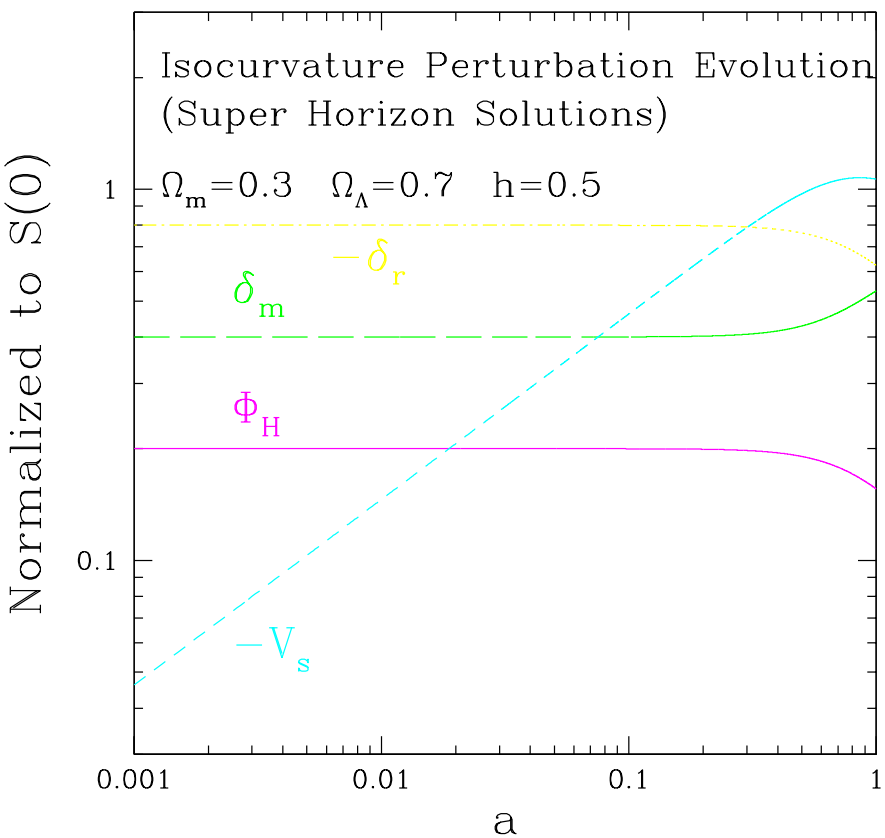


図 3.2: 物質優勢期のスーパーホライズンスケールにおける等曲率ゆらぎの進化。ゆらぎの量は全て $S(0)$ で規格化してある。$\Omega_{\rm m} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $h = 0.5$ のケースをプロットした。放射成分と物質成分を分けて各々プロットしてある。放射ゆらぎは物質ゆらぎを上回り、等曲率ゆらぎではスーパーホライズンスケールにおいて CMB の温度ゆらぎが多く作られる。



であるから

$$\epsilon_{\rm g} = \frac{1}{1+a/a_{\rm eq}} \left(\delta_{\rm m} \frac{a}{a_{\rm eq}} + \delta_{\rm r} \right). \tag{3.40}$$

エントロピーゆらぎの表式 (3.8):

$$S_{\rm mr} = \delta_{\rm m} - \frac{3}{4}\delta_{\rm r} \tag{3.41}$$

と式 (3.40) を連立させれば

$$\delta_{\rm m} = \frac{1}{4+3a/a_{\rm eq}} \left[3\left(1+\frac{a}{a_{\rm eq}}\right)\epsilon_{\rm g} + 4S_{\rm mr} \right], \tag{3.42}$$

$$\delta_{\rm r} = \frac{1}{4+3a/a_{\rm eq}} \left[4\left(1+\frac{a}{a_{\rm eq}}\right)\epsilon_{\rm g} - 4S_{\rm mr}\frac{a}{a_{\rm eq}} \right], \tag{3.43}$$

を得る。

5.1　断熱ゆらぎ: $S(0) = 0$

断熱ゆらぎでは $S_{\rm mr} = 0$ であるから、前節の結果および式 (3.42), (3.43) から

$$\delta_{\rm m}(a) = \begin{cases} \frac{3}{2}\Phi_{\rm H}(0) & (a \ll a_{\rm eq}), \\ \frac{9}{5}\Phi_{\rm H}(0) = 2\Phi_{\rm H}(a) & (a_{\rm eq} \ll a \ll (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3}), \end{cases} \tag{3.44}$$

$$\delta_{\rm r}(a) = \begin{cases} 2\Phi_{\rm H}(0) & (a \ll a_{\rm eq}), \\ \frac{12}{5}\Phi_{\rm H}(0) = \frac{8}{3}\Phi_{\rm H}(a) & (a_{\rm eq} \ll a \ll (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3}). \end{cases} \tag{3.45}$$

ただし、放射優勢期の解は $a/a_{\rm eq}$ の 1 次の項を無視した。

以上より、物質とのカップリングによって生じる断熱的温度ゆらぎは

$$\frac{\Delta T}{T}(a) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(a) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi_{\rm H}(0) = -\frac{1}{2}\Phi_{\rm A}(0) & (a \ll a_{\rm eq}), \\ \frac{2}{3}\Phi_{\rm H}(a) = -\frac{2}{3}\Phi_{\rm A}(a) & (a_{\rm eq} \ll a \ll (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3}) \end{cases} \tag{3.46}$$

となる。これにニュートンポテンシャル $\Phi_{\rm A}$ による重力赤方偏移を加えたものが観測される温度ゆらぎであり、

$$\frac{\Delta T}{T}(a) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(a) + \Phi_{\rm A}(a) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi_{\rm A}(0) & (a \ll a_{\rm eq}), \\ \frac{1}{3}\Phi_{\rm A}(a) & (a_{\rm eq} \ll a \ll (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3}). \end{cases} \tag{3.47}$$

第 1 章の Sachs & Wolfe の項でも述べたが、これが Sachs と Wolfe によって導かれた公式、Sachs–Wolfe 効果である。

5.2 等曲率ゆらぎ: $\Phi_{\rm H}(0) = 0$

断熱ゆらぎと同様に、

$$\delta_{\rm m}(a) = \begin{cases} S(0) & (a \ll a_{\rm eq}), \\ \frac{2}{5}S(0) & (a_{\rm eq} \ll a \ll (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3}), \end{cases} \tag{3.48}$$

$$\delta_{\rm r}(a) = \begin{cases} -\frac{1}{2}S(0)a/a_{\rm eq} & (a \ll a_{\rm eq}), \\ -\frac{4}{5}S(0) & (a_{\rm eq} \ll a \ll (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3}). \end{cases} \tag{3.49}$$

ただし、放射優勢期の解は $a/a_{\rm eq}$ の 1 次の項を無視した。等曲率的温度ゆらぎは

$$\frac{\Delta T}{T}(a) = \begin{cases} -\frac{1}{8}S(0)a/a_{\rm eq} & (a \ll a_{\rm eq}), \\ -\frac{1}{5}S(0) & (a_{\rm eq} \ll a \ll (\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda)^{1/3}). \end{cases} \tag{3.50}$$

これに $\Phi_{\rm A}(a)$ を加えたものが観測される温度ゆらぎである。

第4章　温度ゆらぎと物質ゆらぎの進化II

ゆらぎがホライズンに入ると、圧力や成分間の相互作用が働くようになって前節のような取扱いができなくなる。今節ではサブホライズンスケール:

$$\frac{k}{aH} = \frac{ka}{\dot{a}} \gg 1$$

でのゆらぎの進化を、流体の方程式をベースにして解く。

1　物質の運動方程式

物質の成分として、バリオンとCDMを考える。バリオンは電子を通じて光子との相互作用を持つのに対しCDMは持たないため、両者の運動方程式はEulerの式において異なる。

- CDMの運動方程式

$$\dot{\delta}_{\rm c} + kV_{\rm c} = -3\dot{\Phi}_{\rm H}, \tag{4.1}$$

$$\dot{V}_{\rm c} + \frac{\dot{a}}{a}V_{\rm c} = k\Phi_{\rm A}. \tag{4.2}$$

- バリオンの運動方程式

$$\dot{\delta}_{\rm b} + kV_{\rm b} = -3\dot{\Phi}_{\rm H}, \tag{4.3}$$

$$\dot{V}_{\rm b} + \frac{\dot{a}}{a}V_{\rm b} = k\Phi_{\rm A} + \frac{\dot{\tau}_{\rm C}}{R}(V_\gamma - V_{\rm b}). \tag{4.4}$$

  Eulerの式(4.4)の右辺第3項が、光子との相互作用による運動量の交換の項である。ただし$\dot{\tau}_{\rm C} \equiv \sigma_{\rm T} x_{\rm e} n_{\rm e} a$, $R \equiv 3\rho_{\rm b}/4\rho_\gamma$。

1.1　晴れ上がり以降の物質ゆらぎの進化

晴れ上がり以降は、第2章で述べたように電離度$x_{\rm e}$は$\sim 10^{-4}$と小さくなるので、バリオンもCDMも同じように進化する。サブホライズンスケール($k \gg aH$)では、Poisson方

程式 (式 (3.1) は

$$k^2\Phi_{\rm H} = 4\pi G\rho a^2\delta_{\rm m} \tag{4.5}$$

と Newton 理論と同じになり、連続の式 (4.1), (4.3) の右辺は無視できて

$$\dot{\delta}_{\rm m} + kV_{\rm m} = 0. \tag{4.6}$$

これも非相対論的な連続の式と同じである。Euler の式に代入し、再び Poisson 方程式を用いれば、微分方程式:

$$\ddot{\delta}_{\rm m} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\rm m} = 4\pi G\rho a^2\delta_{\rm m} \tag{4.7}$$

を得る。これは Newton 理論における物質の密度ゆらぎの発展方程式と同じであり、特解は $\delta_{\rm m} \propto H$ で与えられる。一般解を $\delta_{\rm m} = HG$ と置くことにより

$$\ddot{H} + \left(aH + 2\frac{\dot{H}}{H}\right)\dot{G} = 0, \tag{4.8}$$

さらに $x = \dot{G}$ として

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &= -\left(\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{H}}{H}\right) \\ x &= C\frac{H_0^2}{aH^2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

C は積分定数である。以上より、解として

$$\delta_{\rm m} = H\int\frac{{\rm d}a}{a^2H}x = CH_0^2H\int\frac{{\rm d}a}{(aH)^3} \tag{4.10}$$

を得る。曲率や宇宙項が重要でない時期には、Hubble パラメターは

$$H(a) \simeq H_0\Omega_{\rm m}^{1/2}a^{-3/2}$$

のように近似できるので

$$\delta_{\rm m} = \frac{2}{5}C\Omega_{\rm m}^{-1}a. \tag{4.11}$$

従って、密度ゆらぎは a に比例して成長する。これをサブホライズンスケールの Poisson 方程式 (4.5) に代入して $\rho \propto a^{-3}$ を用いれば、$\Phi_{\rm H}$ が一定に保たれる事が示される。つまり、晴れ上がり以降の $\Phi_{\rm H} = -\Phi_{\rm A}$ は、スーパーホライズンでもサブホライズンでも一定に保たれるのである。逆に、密度ゆらぎはスーパーホライズンでは一定だがサブホライズンでは重力不安定に従って成長する事になる。

曲率や宇宙項の効く時期になると、成長率は a より遅くなる。これは宇宙膨張が速くなって (H が大きくなって)、物質が集まれなくなるためである。結果として Poisson 方程式より、$\Phi_{\rm H}$ も減衰する。

2　放射の運動方程式

光子は大きな放射圧を持つため、物質の運動方程式で無視できたストレスの項 π_γ や、それより高次のモーメントの項が無視できない。よって、温度ゆらぎを多重極展開:

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k},\boldsymbol{\gamma},\tau_0)=\sum_\ell(-i)^\ell\Theta_\ell(k,\mu,\tau_0)P_\ell(\mu),\qquad \mu\equiv\hat{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\gamma} \tag{4.12}$$

して運動方程式を書き下せば、

$$\dot{\delta}_\gamma = -\frac{4}{3}kV_\gamma-4\dot{\Phi}_{\rm H}, \tag{4.13}$$

$$\dot{V}_\gamma = k\left(\frac{1}{4}\delta_\gamma+\Phi_{\rm A}-\frac{1}{6}\pi_\gamma\right)-\dot{\tau}_{\rm C}(V_\gamma-V_{\rm b}), \tag{4.14}$$

$$\dot{\pi}_\gamma = k\left(\frac{8}{5}V_\gamma-\frac{36}{35}\Theta_3\right)-\dot{\tau}_{\rm C}f_2\pi_\gamma, \tag{4.15}$$

$$\dot{\Theta}_3 = k\left(\frac{1}{4}\pi_\gamma-\frac{4}{9}\Theta_4\right)-\dot{\tau}_{\rm C}\Theta_3, \tag{4.16}$$

$$\dot{\Theta}_\ell = k\left(\frac{\ell}{2\ell-1}\Theta_{\ell-1}-\frac{\ell+1}{2\ell+3}\Theta_{\ell+1}\right)-\dot{\tau}_{\rm C}\Theta_\ell\qquad(\ell\geq 4). \tag{4.17}$$

ただし、0, 1, 2 次のモーメントは δ_γ, V_γ, π_γ とそれぞれ

$$\Theta_0 = \frac{1}{4}\delta_\gamma, \tag{4.18}$$

$$\Theta_1 = V_\gamma, \tag{4.19}$$

$$\Theta_2 = \frac{5}{12}\pi_\gamma \tag{4.20}$$

のように結び付いている。光子の Euler の式 (4.14) の右辺にバリオンとの相互作用の項が含まれている。f_2 は偏光の寄与を表すファクターで、偏光を含めない場合は $9/10$、含める場合は $3/4$ である。Thomson 散乱の断面積は偏光依存性があり、偏光を含めると四重極成分を 20%程度変化させるのである。ただしこれらの方程式系には、偏光の取扱いを簡単化するため、後に述べるタイトカップリング近似を既に用いてある。

もう一つの放射成分であるニュートリノの運動方程式は、光子の式からバリオンとの相互作用を省けば良い。

2.1　タイトカップリング近似

晴れ上がり以前の光子ゆらぎの進化を、バリオンとカップルさせて解く。晴れ上がり以前には光子の平均自由行程 $\dot{\tau}_{\rm C}^{-1}$ が小さくなり、$\dot{\tau}_{\rm C}^{-1}$ より大きいスケールの光子のゆらぎは

バリオンと強くカップルして単一の流体として振舞うようになる。従って、

$$\frac{k}{\dot{\tau}_{\rm C}} \ll 1$$

を展開パラメターとして方程式を摂動的に解くことができる。これは「タイトカップリング近似」と呼ばれている。タイトカップリング近似の物理的な意味は文字通り放射と物質がどの程度強くカップルしているか、という事であり、小スケールにいく程両者のカップリングは完全ではなくなる。言い替えれば、タイトカップル近似の次数が $0, 1, 2...$ と上がるにつれ、見ているスケールはどんどん小さくなっている。

2.1.1 0 次解

タイトカップリング 0 次では、$k/\dot{\tau}_{\rm C} \to 0$ とすれば良い。光子–バリオンの運動方程式をカップルさせれば

$$\left(\frac{3}{4}\delta_\gamma - \delta_{\rm b}\right)^{\cdot} = -k\left(V_\gamma - V_{\rm b}\right), \tag{4.21}$$

$$\left(V_\gamma - V_{\rm b}\right)^{\cdot} = -\dot{\tau}_{\rm C}\left(1+\frac{1}{R}\right)\left(V_\gamma - V_{\rm b}\right), \tag{4.22}$$

$$\dot{\pi}_\gamma = -\dot{\tau}_{\rm C} f_2 \pi_\gamma, \tag{4.23}$$

$$\dot{\Theta}_\ell = -\dot{\tau}_{\rm C}\Theta_\ell \qquad (\ell \geq 3) \tag{4.24}$$

を得る。Euler(4.22), ストレス (4.23), 高次モーメントの式 (4.24) の解は

$$V_\gamma - V_{\rm b} = C_V \exp\left[-\int \dot{\tau}_{\rm C}\left(1+\frac{1}{R}\right){\rm d}\tau\right], \tag{4.25}$$

$$\pi_\gamma = C_\pi \exp\left(-f_2\tau_{\rm C}\right), \tag{4.26}$$

$$\Theta_\ell = C_\Theta \exp\left(-\tau_{\rm C}\right) \qquad (\ell \geq 3) \tag{4.27}$$

であるから、良い近似で

$$V_\gamma = V_{\rm b}, \tag{4.28}$$

$$\pi_\gamma = 0, \tag{4.29}$$

$$\Theta_\ell = 0 \qquad (\ell \geq 3) \tag{4.30}$$

がタイトカップル 0 次の解である。これを連続の式 (4.21) に代入して

$$\frac{3}{4}\delta_\gamma - \delta_{\rm b} = S_{\gamma{\rm b}} = \text{一定} \tag{4.31}$$

を得る。断熱ゆらぎの場合 $S_{\gamma\mathrm{b}} = 0$ なので、解は $3\delta_\gamma/4 = \delta_\mathrm{b}$ となる。

以上より、タイトカップル 0 次において、光子とバリオンは同じ速度を持つ、ストレスフリーの単一の完全流体として振舞う事が分かる。ゆらぎのスケールが光の平均自由行程に比べて十分大きいため、「光子流体がバリオン静止系で止まっている」と考えて良い。

2.1.2　1 次解: $\Omega_\mathrm{b}h^2$ と $\Omega_\mathrm{m}h^2$

0 次解が相対速度ゼロ:

$$V_\gamma = V_\mathrm{b}$$

であったので、1 次解はこれに $k/\dot{\tau}_\mathrm{C}$ オーダーの摂動:

$$V_\gamma - V_\mathrm{b} = \frac{k}{\dot{\tau}_\mathrm{C}} d \tag{4.32}$$

を加える事で得られる。d は任意関数である。この場合でもストレス以上の高次モーメントはゼロとなる。

$$\begin{aligned} \pi_\gamma &= 0, \\ \Theta_\ell &= 0 \qquad (\ell \geq 3). \end{aligned}$$

言い替えれば、光子流体は引続き完全流体として記述できる。光子の Euler の式 (4.14) に代入すれば

$$\dot{V}_\gamma = k\left(\frac{1}{4}\delta_\gamma + \Phi_\mathrm{A}\right) - kd, \tag{4.33}$$

バリオンの Euler の式 (4.4) に代入すれば

$$\dot{V}_\gamma + \frac{\dot{a}}{a}V_\gamma = k\Phi_\mathrm{A} + \frac{k}{R}d, \tag{4.34}$$

ただし、$k/\dot{\tau}_\mathrm{C}$ のオーダーを無視した。以上より任意関数 d の項を消去すると、

$$\dot{V}_\gamma + \frac{\dot{R}}{1+R}V_\gamma = k\left[\frac{\delta_\gamma}{4(1+R)} + \Phi_\mathrm{A}\right] \tag{4.35}$$

を得る。ただし、式 (4.34) において $R \equiv 3\rho_\mathrm{b}/4\rho_\gamma \propto a$ より $\dot{a}/a = \dot{R}/R$ を用いた。この式と、光子の連続の式 (4.13):

$$\dot{\delta}_\gamma = -\frac{4}{3}kV_\gamma - 4\dot{\Phi}_\mathrm{H}$$

を用いて V_γ を消去すれば、タイトカップリング 1 次の光子流体を記述する 1 本の微分方程式として

$$\ddot{\delta}_\gamma + \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\delta}_\gamma + k^2 c_{\rm s}^2 \delta_\gamma = F, \tag{4.36}$$

$$c_{\rm s}^2 \equiv \frac{\dot{p}_\gamma}{\dot{\rho}_b + \dot{\rho}_\gamma} = \frac{1}{3(1+R)}, \tag{4.37}$$

$$F \equiv -4\ddot{\Phi}_{\rm H} - \frac{4\dot{R}}{1+R}\dot{\Phi}_{\rm H} - \frac{4}{3}k^2\Phi_{\rm A} \tag{4.38}$$

を得る。式 (4.36) は、ポテンシャルによる外力 F と、宇宙膨張による「摩擦」$(\dot{a}/a)\dot{\delta}_\gamma$ のもとでの調和振動 (あるいは強制振動) の方程式である。つまり δ_γ は振動 $\delta_\gamma \propto \exp(k\int c_{\rm s}{\rm d}\tau)$ を行なうのであり、これが第 1 章の Peebles & Yu の項で触れた「アコースティック振動」、あるいは「ドップラーピーク」である。

今、十分サブホライズンスケールのゆらぎを考える。この場合宇宙膨張のタイムスケールに比べてアコースティック振動のタイムスケールが十分短いため、$\dot{R}$ や $\dot{\Phi}_{\rm H}$ の項などは無視でき、式 (4.36) は非常に簡単化されて

$$\ddot{\delta}_\gamma + k^2 c_{\rm s}^2 \delta_\gamma = -\frac{4}{3}k^2\Phi_{\rm A} \tag{4.39}$$

となる。$c_{\rm s}^2 = 1/3(1+R)$ および、$\dot{R}$, $\dot{\Phi}_{\rm A}$ が無視しうる事を考慮するならば、

$$\left[\frac{\delta_\gamma}{4} + (1+R)\Phi_{\rm A}\right]^{\cdot\cdot} + k^2 c_{\rm s}^2 \left[\frac{\delta_\gamma}{4} + (1+R)\Phi_{\rm A}\right] = 0. \tag{4.40}$$

これはまさに調和振動の式であり、解は

$$\frac{\delta_\gamma}{4} + (1+R)\Phi_{\rm A} = C_1\cos(kr_{\rm s}) + C_2\sin(kr_{\rm s}), \tag{4.41}$$

$r_{\rm s}$ は音速のホライズンで、

$$r_{\rm s} \equiv \int c_{\rm s}{\rm d}\tau \sim c_{\rm s}\tau \sim 88\ (\Omega_{\rm m}h^2)^{-1/2}(f_{\rm R}(10^3)/0.8)(z/10^3)^{-1/2}\ {\rm Mpc}, \tag{4.42}$$

$$f_{\rm R}(z) \equiv (1+z/z_{\rm eq})^{1/2} - (z/z_{\rm eq})^{1/2}. \tag{4.43}$$

式 (4.42) の近似は、$\dot{R}=0$、すなわち $c_{\rm s}$ = 一定 を仮定している事による。光子とバリオンは強くカップルしているため、バリオンの密度ゆらぎも同様にアコースティック振動を行なう。つまり、ホライズンをくぐった密度ゆらぎは、重力によって収縮しても光子の持つ放射圧 $\delta_\gamma c_{\rm s}^2$ によってはねかえされ成長できず、アコースティック振動を行なうのである。

今、初期条件 C_1, C_2 はゆらぎがホライズンをくぐる時に与えられる。断熱ゆらぎの初期条件をとった場合は、式 (3.46) より

$$\frac{1}{4}\delta_\gamma = \begin{cases} -\frac{1}{2}\Phi_{\rm A} & (\text{放射優勢期}), \\ -\frac{2}{3}\Phi_{\rm A} & (\text{物質優勢期}), \end{cases}$$

であるので、$\dot{\Phi}_{\rm A} = 0$ を考慮すれば

$$C_1 = \begin{cases} -\frac{1}{2}\Phi_{\rm A} + (1+R)\Phi_{\rm A} = (\frac{1}{2}+R)\Phi_{\rm A}, \\ -\frac{2}{3}\Phi_{\rm A} + (1+R)\Phi_{\rm A} = (\frac{1}{3}+R)\Phi_{\rm A} \end{cases} \tag{4.44}$$

$$C_2 = 0 \tag{4.45}$$

を得る。以上より、光子流体の密度ゆらぎによる温度ゆらぎ (式 (3.47)):

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4}\delta_\gamma + \Phi_{\rm A} = \begin{cases} (\frac{1}{2}+R)\Phi_{\rm A}\cos(kr_{\rm s}) - R\Phi_{\rm A} & (\text{放射優勢期}), \\ (\frac{1}{3}+R)\Phi_{\rm A}\cos(kr_{\rm s}) - R\Phi_{\rm A} & (\text{物質優勢期}), \end{cases}$$

もアコースティック振動をする事になる。ここで、R の働きに注目したい。$R = 3\rho_{\rm b}/4\rho_\gamma \propto \Omega_{\rm b}h^2$ であるから、R はすなわちバリオンの量を表し、$\Omega_{\rm b}h^2$ というパラメターセットに依存している。バリオンのない宇宙 ($R = 0$) では温度ゆらぎは $\Delta T/T \propto \cos(kr_{\rm s})$ となり、ゼロを中心とするアコースティック振動を行なう。しかし、有限の R を持つ場合には、以下の 2 通りの効果がアコースティック振動を変化させる事になる。

(1) アコースティック振動の振幅を増幅

(2) 振動のゼロ点をシフト

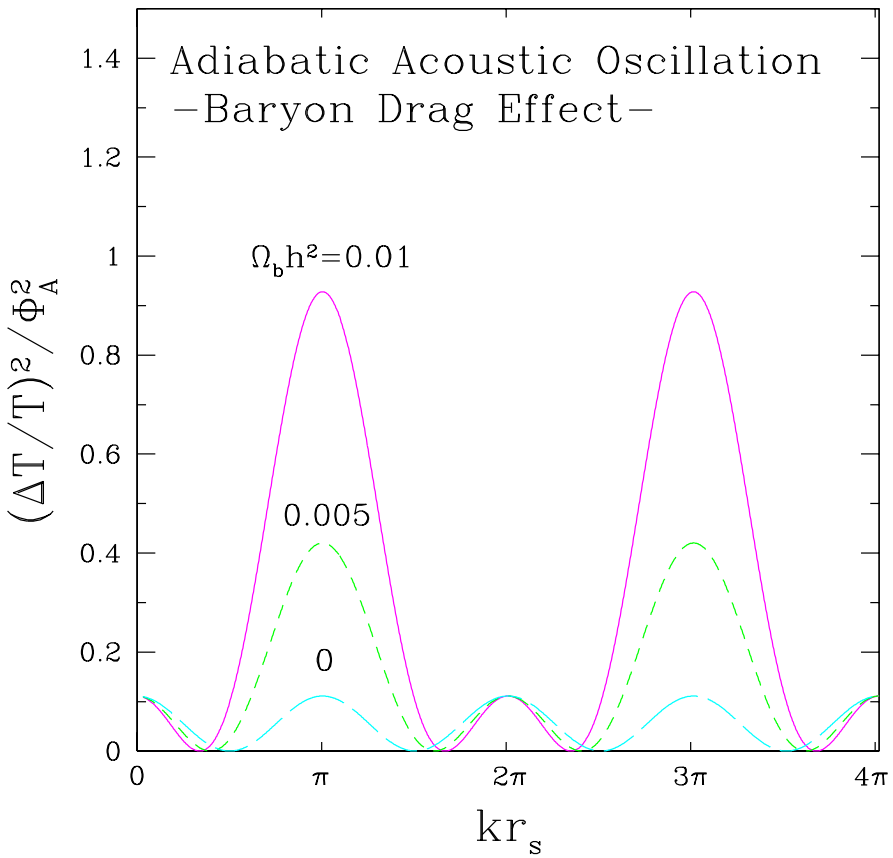
注目されるのは (2) の効果である。(1) はアコースティック振動の形を変えないが、(2) によって $|\Delta T|$ の奇数番目と偶数番目のアコースティックピークの相対的な高さが変わるのである (図 (4.1))。つまり、$\Omega_{\rm b}h^2$ を変える事によってアコースティックピークの構造がユニークに変化し、アコースティックピークの奇数番目と偶数番目のピークの相対的な高さを測定する事によって $\Omega_{\rm b}h^2$ を決められるのである。

次に、式 (4.36) における「外力」(式 (4.38)):

$$F = -4\ddot{\Phi}_{\rm H} - \frac{4\dot{R}}{1+R}\dot{\Phi}_{\rm H} - \frac{4}{3}k^2\Phi_{\rm A}$$

に着目してみる。先程は、静的な項 $-4k^2\Phi_{\rm A}/3$ は考慮したが、その他の時間微分を含む動的な項は無視した。しかし、もしポテンシャル $\Phi_{\rm H}$ に時間変化が存在していれば、動的な

図 4.1: アコースティック振動におけるバリオンの効果。$\Omega_{\rm b}h^2 = 0, 0.005, 0.01$ のケースをプロットした。$\Omega_{\rm b}h^2$ を増やす事によって、奇数ピークと偶数ピークの相対的な高さが変化する。



項もまた外力として寄与する。今、放射優勢期にホライズンに入ったゆらぎを考えてみる。すでにみたように放射密度のゆらぎ δ_γ が振動して成長できないため、Poisson 方程式より $\Phi_{\rm H} \propto \rho_\gamma a^2 \delta_\gamma \propto a^{-2}\cos(kr_{\rm s})$、すなわち $\Phi_{\rm H}$ は振動しながら減衰する。ここで重要な事は、振動のフェイズが温度ゆらぎのアコースティック振動のフェイズとそろっている事である。このため外力はちょうど振り子の共鳴現象のように共鳴的にゆらぎを増大させる。ホライズンをくぐってしばらくすると減衰の効果 a^{-2} のため外力の寄与は急速に減衰するが、ホライズンをくぐった直後は最も大きな共鳴を起こす事になる。以上より、動的な外力の寄与は「放射優勢期にホライズンをまたいだゆらぎのスケール」において温度ゆらぎを大きく増大させる。言い替えれば放射優勢期と物質優勢期の遷移の時期 (式 (1.14)):

$$z_{\rm eq} = 4.2 \times 10^4 \ (\Omega_{\rm m} h^2)(1 - f_\nu) T_{2.7}^{-4}$$

のホライズンスケール以下の温度ゆらぎは全て共鳴的にブーストされるのである。$z_{\rm eq}$ は $\Omega_{\rm m} h^2$ に依存していて、$\Omega_{\rm m} h^2$ が小さい程放射優勢期の時期が長いため、$\Omega_{\rm m} h^2$ が小さい程より大きなスケールの温度ゆらぎもブーストされる事になる。

以上より、アコースティック振動の大きさやドップラーピークの高さの相対比を測ってやる事により、$\Omega_{\rm b} h^2$ と $\Omega_{\rm m} h^2$ を決める事ができる。これが CMB の温度異方性の測定による宇宙論パラメター決定法のエッセンスである。

2.1.3　2 次解: Silk 減衰

相対速度に $(k/\dot\tau_{\rm C})^2$ オーダーの摂動を加え、前項と同様に計算すれば、

$$\begin{aligned}
\dot\delta_\gamma &= -\frac{4}{3} k V_\gamma - 4\dot\Phi_H, && (4.46)\\
\dot V_\gamma &= -\frac{\dot R}{1+R} V_\gamma + \frac{k}{1+R}\left(\frac{1}{4}\delta_\gamma - \frac{1}{6}\pi_\gamma\right) + k\Phi_A \\
&\quad + \frac{k}{\dot\tau_{\rm C}}\left(\frac{R}{1+R}\right)^2 \frac{\dot\delta_\gamma}{4} \\
&\quad + \dot\tau_{\rm C}^{-1}(\text{cosmological redshift terms}), && (4.47)\\
\pi_\gamma &= \frac{k}{\dot\tau_{\rm C}} \frac{8}{5} f_2^{-1} V_\gamma, && (4.48)\\
\Theta_\ell^{(0)} &= 0 \qquad (\ell \geq 3). && (4.49)
\end{aligned}$$

式 (4.47) における (cosmological redshift terms) は宇宙膨張のタイムスケールで変動する項であり、散乱のタイムスケール $\dot\tau_{\rm C}^{-1}$ との積はタイトカップル時に無視できる。以上をカッ

プルさせれば

$$\ddot{\delta}_\gamma + \left[\frac{\dot{R}}{1+R} + 2\frac{k^2}{\dot{\tau}_\mathrm{C}} D(R)\right]\dot{\delta}_\gamma + k^2 c_\mathrm{s}^2 \delta_\gamma = F + \dot{\tau}_\mathrm{C}^{-1} Z, \tag{4.50}$$

$$D(R) \equiv \frac{1}{6}\left[\left(\frac{R}{1+R}\right)^2 + \frac{4}{5(1+R)} f_2^{-1}\right] \tag{4.51}$$

を得る。Z は (cosmological redshift terms) から派生する項である。再び宇宙膨張のタイムスケールの項を無視すれば、

$$\ddot{\delta}_\gamma + 2\frac{k^2}{\dot{\tau}_\mathrm{C}} D\dot{\delta}_\gamma + k^2 c_\mathrm{s}^2 \delta_\gamma = -\frac{4}{3} k^2 \Phi_\mathrm{A} \tag{4.52}$$

を得る。すなわち、タイトカップル 1 次が調和振動であったのに対し、2 次まで考慮すると解は減衰振動となるのである。$\delta_\gamma/4 + (1+R)\Phi_\mathrm{A} \propto \exp(i\int \omega \mathrm{d}\tau)$ とおいて分散関係を求めれば

$$\omega^2 - 2i\frac{k^2}{\dot{\tau}_c} D\omega - c_\mathrm{s}^2 k^2 = 0 \tag{4.53}$$

を得る。振動解と減衰解 を得るため $\omega = \omega_\mathrm{r} + i\omega_\mathrm{i}$ に分ければ、

$$\begin{array}{ll} \omega_\mathrm{r}^2 - c_\mathrm{s}^2 k^2 - \omega_\mathrm{i}^2 + 2\frac{k^2}{\dot{\tau}_\mathrm{C}} D\omega_\mathrm{i} = 0 & (\text{実部}), \\ \omega_\mathrm{r}\left(\omega_\mathrm{i} - \frac{k^2}{\dot{\tau}_\mathrm{C}} D\right) = 0 & (\text{虚部}), \end{array} \tag{4.54}$$

解は

$$\omega_\mathrm{r} = c_\mathrm{s} k, \tag{4.55}$$

$$\omega_\mathrm{i} = \frac{k^2}{\dot{\tau}_\mathrm{C}} D. \tag{4.56}$$

ただし、ω_r において $(k/\dot{\tau}_\mathrm{C})^2$ のオーダーを無視した。ω_r は音速による振動モード、すなわちタイトカップリング 1 次で得られたアコースティック解であるが、ω_i はタイトカップリング 2 次 $(\sim O(k/\dot{\tau}_\mathrm{C}))$ で初めて得られるダンピングの解である。ダンピングの形は

$$\frac{\delta_\gamma}{4} + (1+R)\Phi_\mathrm{A} \propto \exp\left(-\int \omega_\mathrm{i} \mathrm{d}\tau\right) e^{ikr_\mathrm{s}} = \exp\left(-k^2 \int \frac{D}{\dot{\tau}_\mathrm{C}} \mathrm{d}\tau\right) e^{ikr_\mathrm{s}}, \tag{4.57}$$

従ってそのダンピングスケールは、

$$k_\mathrm{D}^{-2} \equiv \int \frac{D}{\dot{\tau}_\mathrm{C}} \mathrm{d}\tau = \int \frac{\mathrm{d}\tau}{6\dot{\tau}_\mathrm{C}} \left[\left(\frac{R}{1+R}\right)^2 + \frac{4}{5(1+R)} f_2^{-1}\right] \tag{4.58}$$

と評価する事ができる。f_2 が偏光を含めない場合 $9/10$、含めた場合 $3/4$ であった事を思い出せば、偏光の存在がダンピングスケール k_D^{-1} を $(9/10)/(3/4) \sim 1.2$ 程度増加させる事が

分かる。ダンピングは四重極 (あるいは粘性) の存在によって生じるため、四重極に寄与する偏光も影響を持つのである。

若干複雑になったが、基本的な結果は以下の通りである。タイトカップル 2 次では放射の物質のカップリングが完全ではなく、両者の運動の差による摩擦 (あるいは粘性) によってゆらぎがならされてしまう。それによって温度ゆらぎは

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\delta_\gamma}{4} + \Phi_{\rm A} = e^{-(k/k_{\rm D})^2}\left(C_1\cos(kr_{\rm s}) + C_2\sin(kr_{\rm s})\right) - R\Phi_{\rm A}, \qquad k_{\rm D}^{-1} \sim \lambda_{\rm D} \sim \sqrt{\frac{\tau}{\dot\tau_{\rm C}}}$$

のようにあるダンピングスケール $\lambda_{\rm D} \sim k_{\rm D}^{-1}$ 以下のゆらぎは急速に減衰して消えてしまう (図 4.2)。ここで、$k/k_{\rm D} \gg 1$ において $\Delta T/T \sim -R\Phi_{\rm A}$ となるが、このような小スケールのゆらぎは放射優勢期にホライズンに入っており、$R \sim 0.03(z/10^4)^{-1}$ を考慮すると $R \ll 1$ よりゆらぎはなくなってしまう。これが第 1 章の Silk の項で触れた Silk 減衰であり、ダンピングスケールは光がランダムウオークによって進める距離に対応している。晴れ上がり期 ($z_* = 1000$) における具体的な値は式 (1.20) より

$$\lambda_{\rm D*} \sim 37\ \Omega_{\rm m}^{-1/4}(\Omega_{\rm b}/0.05)^{-1/2}(h/0.5)^{-3/2}\ {\rm Mpc}$$

である。また、$\lambda_{\rm D} \propto (\Omega_{\rm m}h^2)^{-1/4}(\Omega_{\rm b}h^2)^{-1/2}$ であり、ダンピングスケールからも $\Omega_{\rm m}h^2$ および $\Omega_{\rm b}h^2$ に関する情報を得られる事が分かる。

以上のような、アコースティック振動 + Silk 減衰 という解により、CMB のゆらぎのふるまいと宇宙論パラメター依存性の本質的な部分はほぼ理解する事ができる。

3　観測される角度スケールと $\Omega_{\rm m} + \Omega_\Lambda$

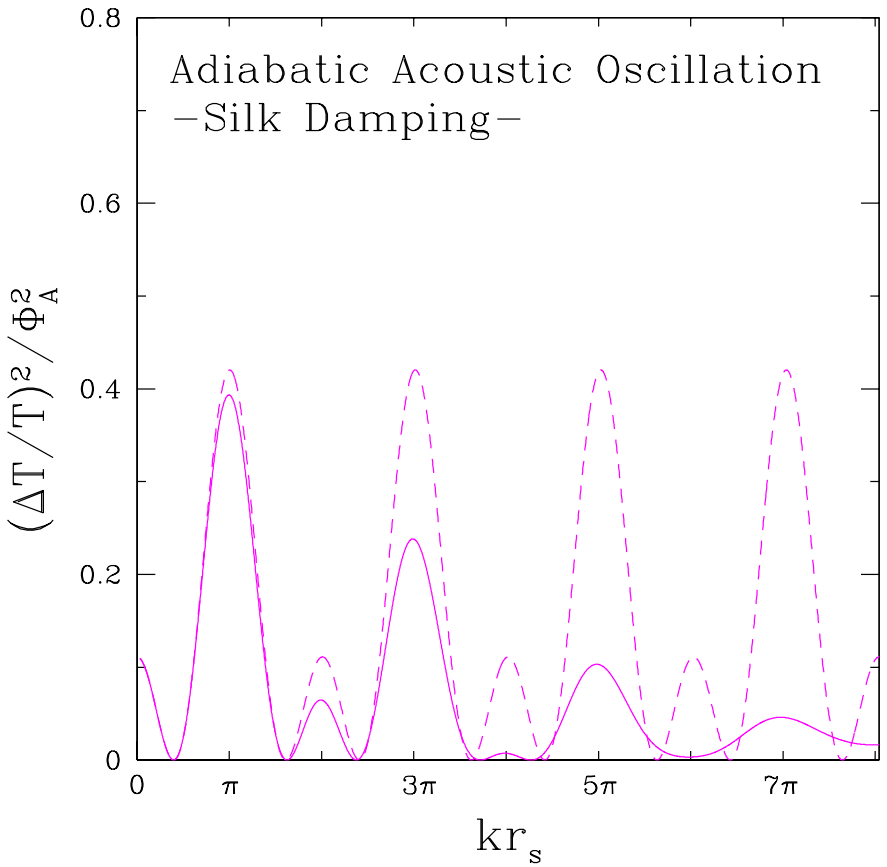
これまでの解は、タイトカップリングが維持されている範囲で正しいものであるが、我々が実際に観測する温度ゆらぎは光子と物質の相互作用が切れた脱結合後のものである。第 2 章で述べたように、脱結合のプロセスを記述するヴィジビリティ $\mathcal{V}_{\rm C}(\tau)$ は第ゼロ近似では脱結合時 $\tau_{\rm d} \sim \tau_*$ におけるデルタ関数:

$$\mathcal{V}_{\rm C} \sim \delta(\tau - \tau_*)$$

と近似できるので、観測されるのはまさに脱結合時の温度パターンである。従って、脱結合時にあるスケール $\lambda = 2\pi k^{-1}$ を持つ温度パターンを見込む角度 θ は、

$$\theta = \frac{\lambda/2}{r_{\theta*}} = \frac{\pi}{kr_{\theta*}} \tag{4.59}$$

図 4.2: Silk 減衰。破線は減衰なし、実線は減衰を考慮したアコースティック振動。ダンピングスケール $k_{\rm D}^{-1}\sim 0.07 r_{\rm s}$ 以下のスケールのゆらぎは $e^{-(k/k_{\rm D})^2}$ のファクターによって消されてしまう。



となる。ここで、脱結合時までの共動角径距離 $r_{\theta *}$ は式 (2.22) により近似的に

$$r_{\theta *} \simeq 2(\Omega_{\rm m} H_0^2)^{-1/2} f_{\rm G},$$

$$f_{\rm G} \equiv \begin{cases} \Omega_{\rm m}^{-1/2} & (\Omega_\Lambda = 0), \\ 1 + \ln \Omega_{\rm m}^{0.085} & (\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{\rm m}). \end{cases}$$

θ に対応する角度相関スペクトル C_ℓ の角波数 ℓ は、

$$\ell + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\theta} = k r_{\theta *}. \tag{4.60}$$

以上より、k 空間で得られた温度ゆらぎの解は、$\ell \sim k r_{\theta *}$ に対応する C_ℓ に射影される事になる。重要な事は、射影されるスケール ℓ が宇宙論パラメターに強く依存している事である。同じスケール k を観測したとしても、平坦な宇宙ではだいたい $\ell \propto k(\Omega_{\rm m} h^2)^{-1/2}$ であるのに対し、それ以外では $\ell \propto k(\Omega_{\rm m} h)^{-1}$ となる。特に、アコースティック振動のスケールなど興味あるスケールは全てなんらかの形でホライズンに関係しているので、$k \propto \tau^{-1} \propto (\Omega_{\rm m} h^2)^{1/2}$ より ℓ の宇宙論パラメター依存性はだいたい

$$\ell \propto \begin{cases} \Omega_{\rm m}^{-1/2} & (\text{open or closed}) \\ 1 + \ln \Omega_{\rm m}^{0.085} & (\text{flat}) \end{cases}$$

となり、平坦な場合ではほとんど宇宙論パラメターによらず一定なのに対し、それ以外のケースでは $\Omega_{\rm m}^{-1/2}$ に比例して変化するのである。すなわち、観測された C_ℓ のピークの「位置」によって、宇宙の曲率、すなわち $\Omega_{\rm m} + \Omega_\Lambda$ を決める事ができることになる。前節ではピークの「高さ」によって $\Omega_{\rm b} h^2, \Omega_{\rm m} h^2$ が決められると述べたが、「位置」によって $\Omega_{\rm m} + \Omega_\Lambda$ が決められるのである。

第5章　観測HOWTO

1　角度相関スペクトル

観測されるCMBの温度ゆらぎを定量化するものとして、これまでにも角度相関スペクトルC_ℓについて何度か触れてきたが、この量がもつ意味をきちんと理解してみよう。C_ℓを定義する上では、等価な2通りのアプローチがある。

1.1　2点相関関数との関係

ある角度θだけ離れた点の温度がどれだけ違っているか、というのを表す量が「2点相関関数」$C(\theta)$であり、

$$C(\theta) \equiv \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}+\boldsymbol{\theta}) \right\rangle \tag{5.1}$$

と定義される。$\langle\rangle$は全天でとった角度平均を表す。温度ゆらぎの平均値はゼロであるので、

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) \right\rangle = 0, \tag{5.2}$$

$C(\theta)$はθだけ離れた温度場の持つ分散を表している事になる。宇宙の等方性から$C(\theta)$がθにしかよらない事を考慮すれば、Legendre多項式で展開できて

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell+1) C_\ell P_\ell(\cos\theta), \tag{5.3}$$

展開係数がC_ℓとなる。特に、$\log\ell$あたりの展開係数:

$$\frac{\ell(2\ell+1)}{4\pi} C_\ell \tag{5.4}$$

は、ある$\ell \sim \theta^{-1}$に対応する温度ゆらぎの分散を正しく反映した量となっているため、良く使われている。

1.2　温度パターンの多重極展開

観測された温度パターンを多重極展開する事により、どのような成分が温度パターンを作っているかを知る事ができるようになる。

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_\ell^m(\mathbf{n}). \tag{5.5}$$

m は温度場の方向依存性を記述しているが、等方性からある ℓ に対する $2\ell+1$ 個の $a_{\ell m}$ は全て同等である。従って、

$$C_\ell = \left\langle |a_{\ell m}|^2 \right\rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2 \tag{5.6}$$

である。これを式 (5.3) に代入すれば

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell m} |a_{\ell m}|^2 \, P_\ell(\cos\theta) \tag{5.7}$$

を得る。

2　ウインドー関数

実際に観測される温度場 $\Delta T_{\rm obs}$ は、観測手法に依存するウインドー関数 $w(\mathbf{n})$ と検出器のノイズによって

$$\frac{\Delta T_{\rm obs}}{T}(\mathbf{n}) = \int \mathrm{d}\Omega_{\mathbf{n}'} \frac{\Delta T_{\rm real}}{T}(\mathbf{n}') w(\mathbf{n}-\mathbf{n}') + \frac{\Delta T_{\rm noise}}{T}(\mathbf{n}) \tag{5.8}$$

と書ける。$\Delta T_{\rm real}$ はウインドーを通す前の「真の」温度場、$\Delta T_{\rm noise}$ は検出器のノイズ起源の温度場である。これを多重極展開すれば、たたみこみの定理から

$$a_{\ell m}^{\rm obs} = a_{\ell m}^{\rm real} w_{\ell m} + a_{\ell m}^{\rm noise} \tag{5.9}$$

である。真の温度ゆらぎと検出器のノイズは相関を持たないはずなので、$\left\langle a_{\ell m}^{\rm real} a_{\ell m}^{\rm noise} \right\rangle = 0$ であり、従って C_ℓ は

$$C_\ell^{\rm obs} = C_\ell^{\rm real} W_\ell + C_\ell^{\rm noise}, \tag{5.10}$$

W_ℓ は角度平均されたウインドー関数で

$$W_\ell \equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_m w_{\ell m}^2. \tag{5.11}$$

従って、観測される C_ℓ は、観測手段によるウインドー関数 W_ℓ で「切り取られた」ものとなる。

2.1 アンテナビームパターン

あらゆる観測手法においてまず考慮しなければならない $w_{\ell m}$ は、アンテナのビームパターンである。アンテナの有限の口径のため、回折限界に相当する分解能以下の情報はならされてしまうが、これは一般にガウシアンによって良く近似できる。ガウシアンは等方的なので、$w_{\ell m}$ は

$$w_{\ell m} = B_\ell = \exp\left[-\frac{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2}{2\left(\ell_{\rm b}+\frac{1}{2}\right)^2}\right] \tag{5.12}$$

と書ける。$\ell_{\rm b}$ はビームサイズに相当する角波数で、ビームサイズの半値幅 $\theta_{\rm FWHM}$ を用いて

$$\ell_{\rm b}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\theta_{\rm FWHM}}{2\sqrt{8\ln 2}}\right)} \tag{5.13}$$

と書ける。特に、実際の観測では $\theta_{\rm FWHM} \ll 1\ {\rm rad} \sim 57^\circ$ なので、非常に良い近似で $\ell_{\rm b}^{-1} \simeq \theta_{\rm FWHM}/\sqrt{8\ln 2}$,

$$B_\ell \simeq \exp\left(-\ell^2\theta_{\rm FWHM}^2/16\ln 2\right) \tag{5.14}$$

と表す事ができる。

ウインドー関数は観測できる C_ℓ の範囲を決めているので、有限のビームサイズによってどの ℓ まで観測できるのかを見積もる事ができる。B_ℓ^2 が半分になるところをリミットとするならば、$B_{\ell_{\rm max}}^2 = 1/2$ から

$$\ell_{\rm max} = \frac{\sqrt{8}\ln 2}{\theta_{\rm FWHM}} \sim \frac{110}{\theta_{\rm FWHM}/1^\circ} \tag{5.15}$$

を得る。

2.2 チョッピング観測

前項で、ビームサイズは小スケールの感度を落すため、$W_\ell = B_\ell^2$ は大きい ℓ でのカットとして寄与することを見た。それでは、大スケール、すなわち小さい ℓ の方にはいくらでも観測が可能なのであろうか？衛星観測のように全天サーベイができる観測であれば大角度の異方性の観測に制限はなく、W_ℓ は B_ℓ のみで決まるが、一般の地上観測では空の有限の領域しか観測することができないので、おのずと観測可能な ℓ が決められてしまう。このような有限の視野の問題は、小さい ℓ へのカットとして寄与することになる。

電波の地上観測では、大気の影響を逃れるために種々の工夫をこらしたスキャン法によって観測を行なうのが常である。中でも良く使われるのが「スイッチング」, あるいは「チョッピング」と呼ばれる方法である。これは、空の離れた数点を素早く往復して観測し、その差をシグナルとして検出する方法である。CMB のような弱いシグナルを検出する際大気のノイズは問題であり、このように「差」を検出することによって大気の成分を同時に引き去ってしまうのである。最も単純な、2 点の差のみを検出する方法を「2 ビームスイッチング」, 3 点は「3 ビームスイッチング」と呼ばれている。

ではこのように特殊なスキャン法によって観測された温度分布というのは、C_ℓ としてどのような成分を観測したことになっているのだろうか。これは rms 値を実際に計算して求めることができる。例として 2 ビームスイッチングを考える。$\theta_{\rm chop}$ だけ離れた 2 点 $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ の差を検出するとすれば、

$$
\begin{aligned}
C^{\rm obs}(0) &= \left\langle \left|\Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_1\right) - \Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_2\right)\right|^2 \right\rangle && (5.16)\\
&= \left\langle \left|\Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_1\right)\right|^2 \right\rangle + \left\langle \left|\Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_2\right)\right|^2 \right\rangle - 2\left\langle \Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_1\right)\Theta\left(\boldsymbol{\gamma}_2\right)\right\rangle && (5.17)\\
&= 2\left[C^{\rm real}(0) - C^{\rm real}(\theta_{\rm chop})\right]. && (5.18)
\end{aligned}
$$

これを Legendre 多項式で展開すれば、

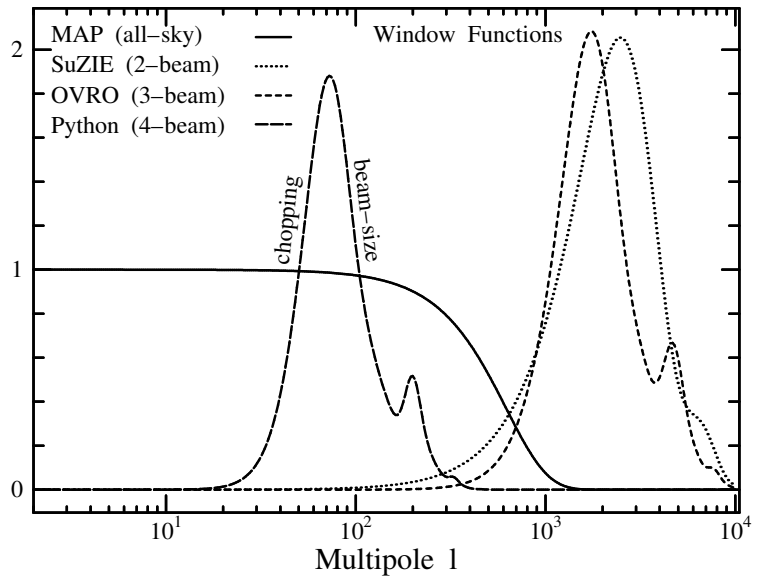
$$
C^{\rm obs}(0) = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1) C_\ell^{\rm real} 2\left[1 - P_\ell(\cos\theta_{\rm chop})\right]. \qquad (5.19)
$$

従って 2 ビームチョッピングによる W_ℓ は、$W_\ell = 2\left[1 - P_\ell(\cos\theta_{\rm chop})\right]$ で与えられることが分かる。3 ビーム, 4 ビームに関しても同じ議論が成立ち、スイッチング法による W_ℓ は各ビーム間の角を $\theta_{\rm chop}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
W_\ell^{\rm 2beam} &= 2\left[1 - P_\ell(\cos\theta_{\rm chop})\right], && (5.20)\\
W_\ell^{\rm 3beam} &= \frac{1}{2}\left[3 - 4P_\ell(\cos\theta_{\rm chop}) + P_\ell(\cos 2\theta_{\rm chop})\right], && (5.21)\\
W_\ell^{\rm 4beam} &= \frac{1}{8}\left[10 - 15P_\ell\left(\cos\theta_{\rm chop}\right) + 6P_\ell\left(\cos 2\theta_{\rm chop}\right) - P_\ell\left(\cos 3\theta_{\rm chop}\right)\right]. && (5.22)
\end{aligned}
$$

この方法だと、$\theta_{\rm chop}$ 離れた点をベースラインとしているため、$\theta_{\rm chop}$ よりも大きなスケールの異方性は観測できない事になる。従って、小さい ℓ へのカットとなるのである (図 5.1)。

図 5.1: 全天サーベイ (MAP; $\theta_{\rm FWHM} = 13'$) と、2 ビーム (SuZIE; $\theta_{\rm FWHM} = 1'.7, \theta_{\rm chop} = 4'.6$), 3 ビーム (OVRO; $\theta_{\rm FWHM} = 1'.8, \theta_{\rm chop} = 7'$), 4 ビーム (Python; $\theta_{\rm FWHM} = 45', \theta_{\rm chop} = 2^\circ.75$) チョッピング観測のウインドー関数。各々の観測のビームサイズにより、ℓ の大きな方へカットが入る。全天サーベイでは小さな ℓ のほうは制限がないが、チョッピング観測ではチョッピングの角度より大角度の異方性はカットが入るため感度がない。



2.3　干渉計

近年、CMB の観測手法として脚光を浴びているのが干渉計による観測である。干渉計は、一つのアンテナの口径 D によって決まる視野:

$$\theta_{\rm FOV} \sim \frac{\lambda}{D} \tag{5.23}$$

よりも大きいスケールの空間変化を拾わないため、一般に長波長のゆらぎである大気ノイズに非常に強い。しかし $\theta_{\rm FOV}$ より大きなスケールの温度ゆらぎも観測できないので、$C_\ell^{\rm obs}$ は $\ell_{\rm min} \sim D/\lambda$ 以下の情報を得る事ができない。従って干渉計のウインドー関数は

$$W_\ell \sim \vartheta(\ell - \ell_{\rm min}) B_\ell^2 \tag{5.24}$$

と評価できる。B_ℓ のビームサイズは開口合成後のビームサイズで、サンプル可能な最大のベースライン長を $b_{\rm max}$ とすると $\theta_{\rm FWHM} \sim 1.2\sqrt{8\ln 2} \times \lambda/b_{\rm max}$ である。実際には視野のスケールに近付くにつれて感度が徐々に落ちてゆくため、$\ell_{\rm min}$ に向かって W_ℓ も徐々に落ちてゆく (図 5.2)。

干渉計のもう一つの強みは、イメージング能力である。干渉計の観測量は空の輝度分布の Fourier 変換 $V(\mathbf{u})$ であり、サンプルされた Fourier 成分を逆変換する事でイメージを得るのである (図 (5.3))。この Fourier 成分はヴィジビリティと呼ばれ、

$$V(\mathbf{u}) = \int {\rm d}\Omega_{\mathbf{n}} \Delta B_\nu^{\rm obs}(\mathbf{n}) A(\mathbf{n}) e^{2\pi i \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}} \tag{5.25}$$

と表される。$A(\mathbf{n})$ は干渉計素子 (アンテナ) のレスポンス、$\Delta B_\nu^{\rm obs}(\mathbf{n})$ は一様成分を含まない輝度分布である。先述のように、一様成分は干渉計では検出できない。式 (5.25) を温度ゆらぎに関して書き換えれば

$$V(\mathbf{u}) = \frac{\partial B_\nu}{\partial T} T_{\gamma 0} \int {\rm d}\Omega_{\mathbf{n}} \frac{\Delta T_{\rm obs}(\mathbf{n})}{T_{\gamma 0}} A(\mathbf{n}) e^{2\pi i \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}, \tag{5.26}$$

また、B_ν は黒体放射スペクトルを用いる。以上のように、干渉計の観測量は温度パターンにアンテナのレスポンスをかけたものの Fouier 変換である。$V(\mathbf{u})$ はまた、ヴィジビリティとも呼ばれている。ヴィジビリティのパワースペクトルを計算すると、

$$\begin{aligned} & \langle V^*(\mathbf{u}_1) V(\mathbf{u}_2) \rangle \\ = \; & \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} T_{\gamma 0} \right)^2 \int {\rm d}\Omega_{\mathbf{n}_1} {\rm d}\Omega_{\mathbf{n}_2} C^{\rm obs}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \int {\rm d}^2\mathbf{v}_1 {\rm d}^2\mathbf{v}_2 \widetilde{A}^*(\mathbf{v}_1) \widetilde{A}(\mathbf{v}_2) e^{2\pi i (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{n}_1} e^{-2\pi i (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{n}_2}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

図 5.2: Chicago と Caltech の CMB 干渉計計画「DASI」のウインドー関数。素子数 13, 周波数 $\nu = 26 - 36$ GHz, 視野 3°。測定が予定されている ℓ の範囲は $\ell = 125 - 700$。ベースラインの数は $13 \times 12/2 = 78$ だが、アンテナの配置が中心のまわりに 3 つの対称なパートから構成されているため、同時に撮れる $\ell = 2\pi u$ の数は $78/3 = 26$。

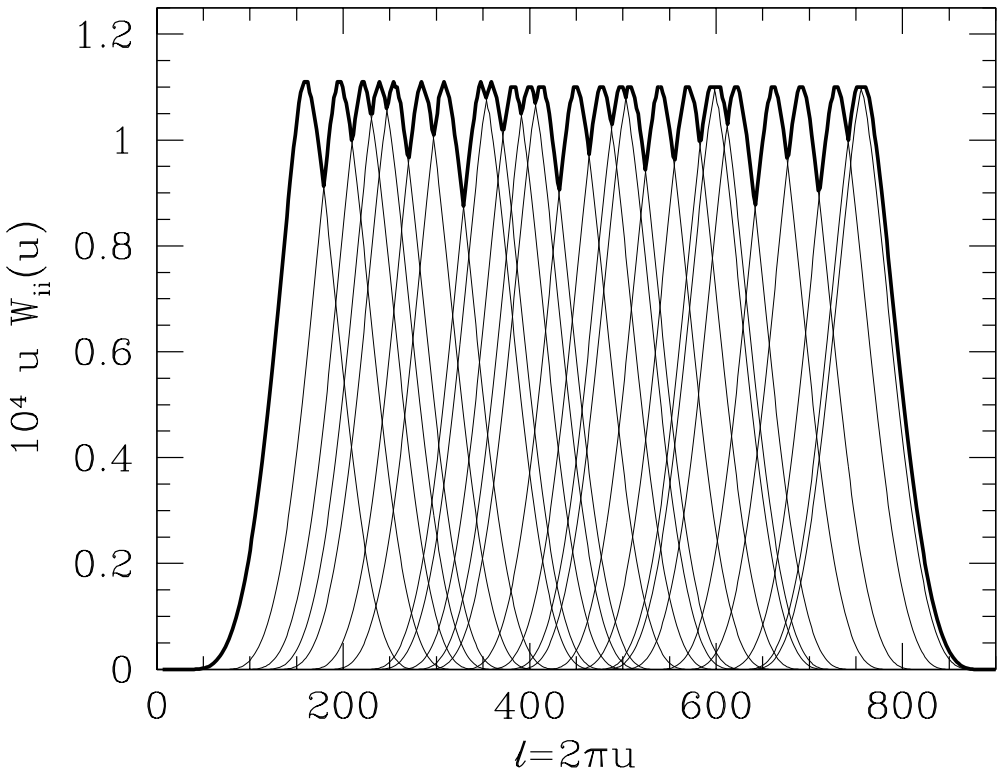
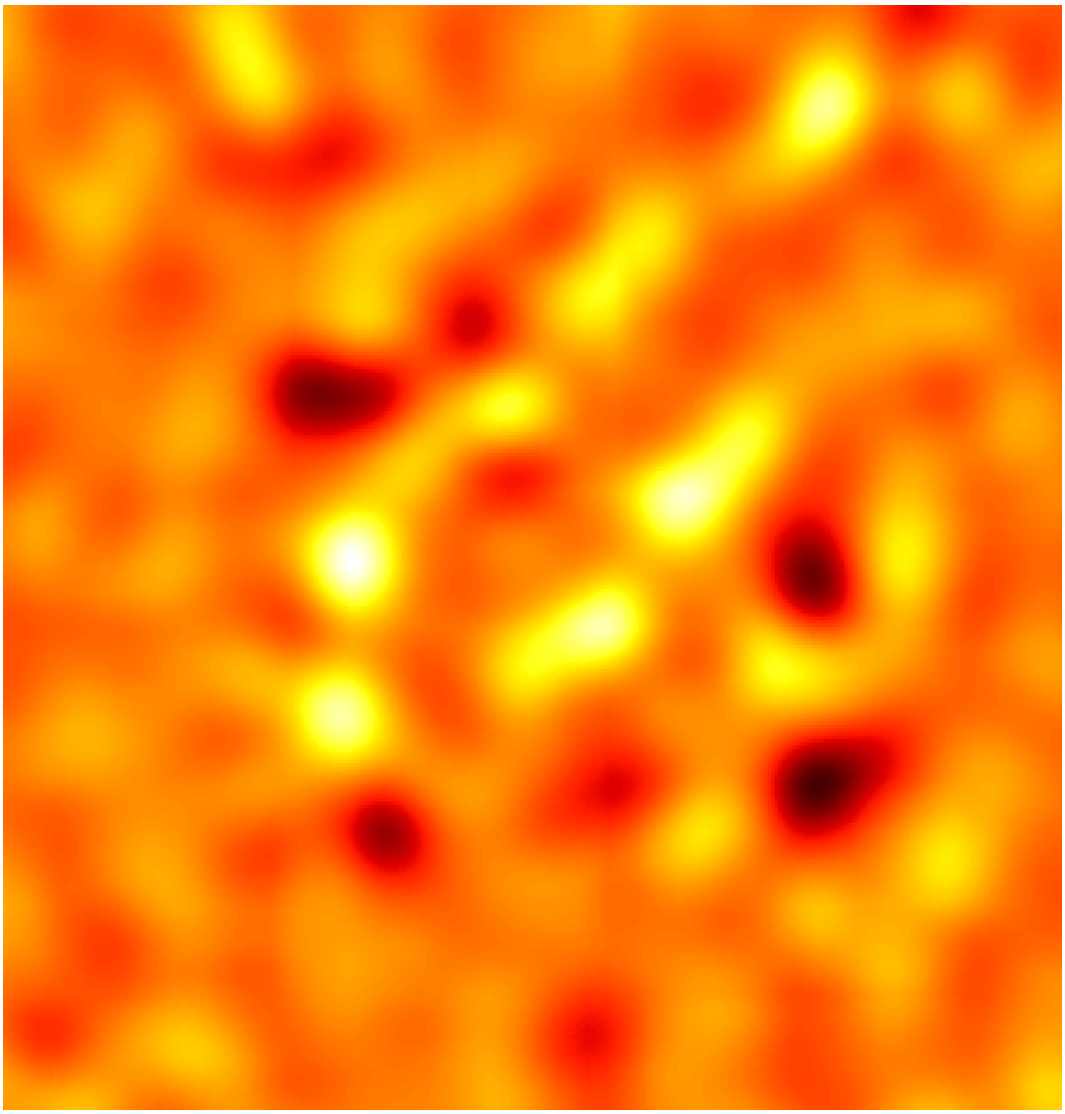


図 5.3: Cambridge の CMB 干渉計「CAT」によるイメージング。素子数 3, 周波数 $\nu = 13 - 17$ GHz, 視野 2°。測定された ℓ の範囲は $\ell = 339 - 722$。



$\widetilde{A}(\mathbf{v})$ は $A(\mathbf{n})$ の Fourier 変換である。ここで、干渉計で観測される領域は一般に $\theta_{\rm FOV} \ll 1$ である事より、天球面上での Legendre 展開は平面上での Fourier 展開で近似できて、

$$C(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1) C_\ell P_\ell(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \simeq \int \mathrm{d}^2\mathbf{w} S(w) e^{-2\pi i \mathbf{w}\cdot(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)}, \tag{5.28}$$

$$w^2 S(w) \simeq \left.\frac{\ell(\ell+1)}{(2\pi)^2} C_\ell \right|_{\ell = 2\pi w} \tag{5.29}$$

が成り立つ。従って、これを用いれば

$$\langle V^*(\mathbf{u}_1) V(\mathbf{u}_2)\rangle = \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} T_{\gamma 0}\right)^2 \int \mathrm{d}^2\mathbf{w} S^{\rm obs}(w) \widetilde{A}^*(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \widetilde{A}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}), \tag{5.30}$$

あるいは

$$W_w^A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \equiv \int \mathrm{d}\phi_w \widetilde{A}^*(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \widetilde{A}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \tag{5.31}$$

を定義する事により、

$$\langle V^*(\mathbf{u}_1) V(\mathbf{u}_2)\rangle = \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} T_{\gamma 0}\right)^2 \int w \mathrm{d}w\, S^{\rm obs}(w) W_w^A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \tag{5.32}$$

を得る。以上より、ヴィジビリティのパワースペクトルは $S^{\rm obs}(w)$(あるいは $C^{\rm obs}_{\ell=2\pi w}$) に干渉計のアンテナレスポンスの Fourier 変換をたたみこんだ形になっている。従って、W_ℓ^A の幅が観測できる ℓ の分解能 $\Delta\ell$ を決めており、だいたい $\Delta\ell \sim D/\lambda \sim \ell_{\rm min}$ である。

3 ノイズレベルの評価

あらゆる観測はノイズとの闘いであるため、観測を行なう前 (あるいは設計する前) に、どのくらいの検出器の感度で、どのくらいの時間積分すれば、興味ある結果を得られるかを評価する事は重要である。

測定された $C_\ell^{\rm obs} = \left\langle \left| a_{\ell m}^{\rm obs} \right|^2 \right\rangle$ が伴っているエラーを評価する。有限のピクセル数 $N_{\rm pix}$ を持つマップ上で温度分布を展開すれば、その逆変換は

$$a_{\ell m}^{\rm obs} = \frac{4\pi}{N_{\rm pix}} \sum_{j=1}^{N_{\rm pix}} \frac{\Delta T_j}{T} Y_\ell^m(\theta_j, \phi_j), \tag{5.33}$$

$$a_{\ell m}^{\rm obs} = a_{\ell m}^{\rm real} w_{\ell m} + a_{\ell m}^{\rm noise},$$

$$\left\langle a_{\ell m}^{\rm real} a_{\ell m}^{\rm noise} \right\rangle = 0.$$

展開係数のノイズ成分 $a_{\ell m}^{\rm noise}$ はもともとピクセルあたりの ΔT_j の測定にともなっていたノイズ $\sigma_{\rm pix}$ なので、エラーの伝播式から

$$\left\langle \left| a_{\ell m}^{\rm noise} \right|^2 \right\rangle = \sum_{j=1}^{N_{\rm pix}} \left[\sigma_{\rm pix}^2 \left(\frac{\partial a_{\ell m}^{\rm obs}}{\partial (\Delta T_j/T)} \right)^2 \right] = \frac{4\pi}{N_{\rm pix}} \sigma_{\rm pix}^2. \tag{5.34}$$

以上より、

$$\left\langle \left| a_{\ell m}^{\rm obs} \right|^2 \right\rangle = C_\ell^{\rm real} W_\ell + 4\pi \frac{\sigma_{\rm pix}^2}{N_{\rm pix}}. \tag{5.35}$$

一方、我々が測定可能な $C_\ell^{\rm obs}$ に取り得るサンプル数は、ある ℓ に対して $m = -\ell \ldots \ell$ までの $2\ell+1$ 個であるから、

$$C_\ell^{\rm obs} = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| a_{\ell m}^{\rm obs} \right|^2 = C_\ell^{\rm est} W_\ell + 4\pi \frac{\sigma_{\rm pix}^2}{N_{\rm pix}}. \tag{5.36}$$

ここで、$C_\ell^{\rm est}$ は測定された $C_\ell^{\rm obs}$ からノイズを除いて推定された C_ℓ である。これが我々の測定値となる。あとは $C_\ell^{\rm est}$ が伴っているエラーを評価すれば良い。$a_{\ell m}^{\rm obs}$ がガウシアン統計に従うとすると、

$$\chi^2 \equiv \frac{1}{\left\langle \left| a_{\ell m}^{\rm obs} \right|^2 \right\rangle} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| a_{\ell m}^{\rm obs} \right|^2 \tag{5.37}$$

は自由度 $2\ell+1$ の χ^2 分布に従い、平均値 $2\ell+1$, 分散 $2(2\ell+1)$ を持つ。よって (5.36) の分散をとれば、$C_\ell^{\rm est}$ のともなう分散として

$$\left\langle \left(C_\ell^{\rm est} - C_\ell^{\rm real} \right)^2 \right\rangle = \frac{2}{2\ell+1} \left(C_\ell^{\rm real} + 4\pi \frac{\sigma_{\rm pix}^2}{N_{\rm pix}} W_\ell^{-1} \right)^2 \tag{5.38}$$

を得る。W_ℓ が大きい時、すなわち設定された観測によって十分測定できる ℓ の領域では第 2 項目は小さくなるが、ビームサイズ以下の領域や視野の外など W_ℓ が小さくなるところでは第 2 項目が急速に大きくなり、C_ℓ を正しく決める事ができなくなる。一方、第 2 項目がゼロであっても、第 1 項目の存在により $C_\ell^{\rm est}$ のともなうエラーはゼロにはならない。これは、$2\ell+1$ 個という限られたサンプル数から $C_\ell^{\rm real}$ を推定している事から生じる「サンプリングヴァリアンス」であり、サンプルが少ない程エラーが大きくなる。これに、さらに空の有限領域 $f_{\rm sky}$ のみをサーベイする場合には、サンプル数が $2\ell+1 \to (2\ell+1) f_{\rm sky}$ と減ってしまうので、さらにエラーが増える事になる。

謝辞

この講義ノートを作成するにあたり、まず講義をする機会を与えてくださった二間瀬敏史教授 (東北大) に感謝いたします。また、講義を聞いて下さった東北大学宇宙論グループをはじめとする東北大学天文学教室の皆様には、講義を通じて勉強させていただき、ありがとうございました。

この講義ノートは第 2 版です。ノートをセミナーで使っていただき、明らかな計算ミスや数値のミスはもちろん、誤字脱字まで丁寧に指摘して下さった須藤靖助教授 (東京大)、東京大学宇宙理論研究室の皆様と、特に金澤敏幸さんに感謝いたします。

2000 年 10 月 20 日

小松 英一郎

リファレンス

Alpher, R. A. & Herman, R. C. 1949, Phys. Rev., 75, 1089

Bahcall, N. A., Lubin, L. M. & Dorman, V. 1995, Astrophys. J. Lett., 447, L81

Bond, J. R. & Efstathiou, G. 1984, Astrophys. J. Lett., 285, L45

Bond, J. R. & Efstathiou, G. 1987, Mon. Not. R. Astron. Soc., 226, 655

Bunn, E. F. & White, M. 1997, Astrophys. J., 480, 6

Burles, S. & Tytler, D. 1998a, Astrophys. J., 499, 699

Burles, S. & Tytler, D. 1998b, Astrophys. J., 507, 732

Coble, K., et al. 1999, Astrophys. J. Lett., 519, L5

Efstathiou, G. & Bond, J. R. 1999, Mon. Not. R. Astron. Soc., 304, 75

Fixsen, D. J., et al. 1996, Astrophys. J., 486, 623

Freedman, W. L., astro-ph/9909076

Gamow, G. 1948, Phys. Rev., 74, 505

Hu, W. & Sugiyama, N. 1995, Astrophys. J., 444, 489

Jungman, G., Kamionkowski, M., Kosowski, A. & Spergel, D. 1996, Phys. Rev. Lett., 76, 1007

Mather, J. C., et al. 1990, Astrophys. J. Lett., 354, L37

Mather, J. C., et al. 1994, Astrophys. J., 420, 439

Matsumoto, T., Hayakawa, S., Matsuo, H., et al. 1988, Astrophys. J., 329, 567

Mauskopf, P. D., et al., astro-ph/9911444

Miller, A. D., et al. 1999, Astrophys. J. Lett., 524, L1

Mohr, J., Mathiesen, B. & Evrard, A. E. 1999, Astrophys. J., 517, 627

Peebles, P. J. E. 1968, Astrophys. J., 153, 1

Peebles, P. J. E. & Yu, J. T. 1970, Astrophys. J., 162, 815

Peebles, P. J. E. 1980, *Physical Cosmology* (Princeton: Princeton Univ. Press)

Penzias, A. A. & Wilson, R. W. 1965, Astrophys. J., 142, 419

Peterson, J. B., et al., astro-ph/9910503

Sachs, R. K. & Wolfe, A. M. 1967, Astrophys. J., 147, 73

Silk, J. 1968, Astrophys. J., 151, 459

Smoot, G. F., et al. 1992, Astrophys. J., 396, L1

Sunyaev, R. A. & Zel'dovich, Ya. B. 1980, Mon. Not. R. Astron. Soc., 190, 413

Torbet, E., et al. 1999, Astrophys. J. Lett., 521, L79

Zel'dovich, Ya. B. & Sunyaev, R. A. 1969, Astrophys. Space. Sci., 4, 301