

► Sobald $-\dot{M}_2 \ll -(\dot{M}_2 (\dot{J}_{GR} + \dot{J}_{MB}))_{\dot{M}_2=0}$ wird

$$\begin{aligned} \ddot{M}_2 &= \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_p} \left\{ 2 \frac{\dot{J}_{MB}}{J} - (\xi_{2,S} - \xi_{R,2}) \frac{(\dot{M}_2)_{\dot{M}_2=0}}{M_2} \right\} \\ &= \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_p} \left\{ \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \frac{\dot{J}_{GR}}{J} \right\} \end{aligned}$$

➔ Massentransfer nimmt nur dann noch weiter ab, d.h. $\dot{R}_{2,R} - \dot{R}_2 > 0$, wenn

$$\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} < 2 \frac{\dot{J}_{GR}}{J},$$

d.h. wenn R_2 schneller schrumpft als $R_{2,R}$. Das ist der Fall, wenn $|\dot{J}_{GR} + \dot{J}_{MB}|$ genügend gross gegen $|\dot{J}_{GR}|$ ist (→ Spruit, H.C. & Ritter, H.: 1983, A&A 124, 267).

3.4 Ergebnisse numerischer Rechnungen zum Einsetzen von Massentransfer (D'Antona, F., Mazzitelli, I., Ritter, H.: 1989, A & A 225, 391)

► Rechnungen mit vollen Sternmodellen für den Sekundärstern, inkl. nuklearer Entwicklung, mit $X_0 = 0.73$, $Z = 0.02$ und $l/H_p = 2$.

➔ hier im allg. $\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{nuc} \approx \tau_{nuc}^{-1} > 0$

Anfangswerte und andere Modellparameter der 6 gerechneten Sequenzen

Sequ. No.	$\frac{M_{1,i}}{M_\odot}$	$\frac{M_{2,i}}{M_\odot}$	$\frac{R_{2,i}}{R_\odot}$	$r_{g2,conv}^2$	$\log T_{eff} (K)$	$\mu (g/mol)$	$\rho_{ph} (g/cm^3)$	$\dot{M}_o (M_\odot/a)$	\dot{J}
1	0.40	0.20	0.2100	0.1980	3.541	1.56	$4.69 \cdot 10^{-6}$	$3.66 \cdot 10^{-9}$	\dot{J}_{GR}
2	0.60	0.20	0.2100	0.1980	3.541	1.56	$4.69 \cdot 10^{-6}$	$3.66 \cdot 10^{-9}$	\dot{J}_{GR}
3	1.00	0.35	0.3408	0.1950	3.553	1.48	$2.96 \cdot 10^{-6}$	$6.87 \cdot 10^{-9}$	$\dot{J}_{VZ} + \dot{J}_{GR}$
4	1.00	0.60	0.5964	0.0374	3.558	1.31	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$1.24 \cdot 10^{-8}$	$\dot{J}_{VZ} + \dot{J}_{GR}$
5	0.60	0.60	0.5964	0.0374	3.558	1.31	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$1.13 \cdot 10^{-8}$	$\dot{J}_{VZ} + \dot{J}_{GR}$
6	1.00	1.00	0.9561	0.0048	3.758	1.28	$2.94 \cdot 10^{-7}$	$1.10 \cdot 10^{-8}$	$\dot{J}_{VZ} + \dot{J}_{GR}$

weitere Modellannahmen :

- konservativer Massentransfer, d.h. $\dot{M} = M_1 + M_2 = \text{const.}$
- Drehimpulsverlustrate : $\dot{J} = \dot{J}_{GR}$, wenn $M_2 \leq 0.2 M_\odot$
 $\dot{J} = \dot{J}_{GR} + \dot{J}_{VZ}$ mit $f_{VZ} = 1$, $r_{g2} = r_{g2,conv}$,
wenn $M_2 > 0.2 M_\odot$
- Sekundärstern auf der "ZAMS", d.h. chemisch \sim homogen und bei $t=0 \sim$ im thermischen Gleichgewicht ($L_g \ll L_{nuc}$), so dass

$$\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t}\right)_{th} \approx 0$$

Beispiele :

a) Sequenz 2 : $M_{1,i} = 0.6 M_\odot$, $M_{2,i} = 0.2 M_\odot$, $\dot{J} = \dot{J}_{GR}$

\triangleq dem Einsetzen von Massentransfer unterhalb der Periodenlücke
 \rightarrow Sekundärstern ist vollkonvektiv \rightarrow in guter Näherung Polytrope mit $n=3/2$.

Verlauf von $-\dot{M}_2(t)$ (\rightarrow Figur) zeigt Verhalten wie in 3.2 skizziert.

Phase 1 : $\tau_{\dot{M}_2} = -\frac{1}{2} \frac{H_p}{R_2} \tau_{GR} \approx 1.8 \cdot 10^5 a$, bis $t \approx 10^6 a$

Phase 2 : da $\xi_{2,s} \approx -0.37$ (\rightarrow neg. Steigung im M-R-Diagramm), ist

$$(-\dot{M}_2)_{ad} = \frac{-M_2}{\xi_{2,s} \xi_{R,2}} 2 \frac{\dot{J}_{GR}}{J} \approx 1.81 \cdot 10^{-10} M_\odot/a$$

$$\text{Max}(-\dot{M}_2) \approx 1.78 \cdot 10^{-10} M_\odot/a$$

\rightarrow $(-\dot{M}_2)_{ad}$ wird nicht ganz erreicht, \rightarrow Phase 2 existiert nur näherungsweise für $\Delta t \approx$ wenige $10^6 a$

Phase 3 : deutlich ausgeprägt, Dauer $\Delta t \approx 5 \cdot 10^7 a \ll \tau_{KH} \approx 10^9 a$, während der $\xi_{2,eff} \approx \xi_{2,s} \rightarrow \xi_{2,eff} \approx \xi_{2,e} \approx 0.83$

(\rightarrow M-R-Diagramm). (Warum geht das so schnell ?
Begründung weiter unten)

Phase 4: ab $t \approx 10^8 a$: $\zeta_{2,eff} \approx \text{const.} \approx 0.83$

$$\rightarrow (-\dot{M}_2)_e = \frac{-M_2}{\zeta_{2,eff} \zeta_{R,2}} \cdot 2 \frac{j_{GR}}{J} \approx 5.9 \cdot 10^{-11} M_\odot/a$$

Entwicklung im Masse-Radius-Diagramm $\Delta R_2 (\Delta M_2)$ (\rightarrow Figur)

Steigung in diesem Diagramm : $\frac{d(R_2 - R_{2,i})}{d(M_2 - M_{2,i})} = \frac{R_2}{M_2} \frac{d \ln R_2}{d \ln M_2} = \frac{R_2}{M_2} \zeta_{2,eff}$

ab $t \approx 5 \cdot 10^5 a$ bis $\sim 3 \cdot 10^6 a$: adiabatische Expansion mit $\zeta_{2,eff} \approx \zeta_{2,s} \approx -1/3$

ab $t \approx 3 \cdot 10^6 a$: merkliche thermische Relaxation : $\zeta_{2,eff} \uparrow$

ab $t \approx 5 \cdot 10^7 a$: quasistationärer Massenverlust mit thermischer Relaxation , $\zeta_{2,eff} \approx \text{const.} \approx 0.83$

Warum ist die thermische Relaxation so schnell ?

Für einen vollkonvektiven Stern mit Massenverlust gilt:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{2,eff} &= \zeta_{2,s} + \frac{\alpha+1}{2\gamma} \frac{\tau_M}{\tau_{th}} \\ \tau_{th} &= \frac{3}{7} \frac{L}{L_g} \tau_{KH} \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{\underline{\zeta_{2,eff} = \zeta_{2,s} + \frac{7}{4} (\alpha+1) \frac{L_g}{L} \frac{\tau_M}{\tau_{KH}}}}$$

\rightarrow Übergang von $\zeta_{2,s} \rightarrow \approx \zeta_{2,e}$ hängt nicht explizit von t ab. Entscheidend ist die zeitliche Entwicklung von L_g/L ($\rightarrow L_g/L$ als Fkt. von t)

► weitere Voraussage unseres Modells : $\zeta_{2,eff}$ ist eine lineare Funktion von $\frac{L_g}{L} \frac{\tau_M}{\tau_{KH}}$

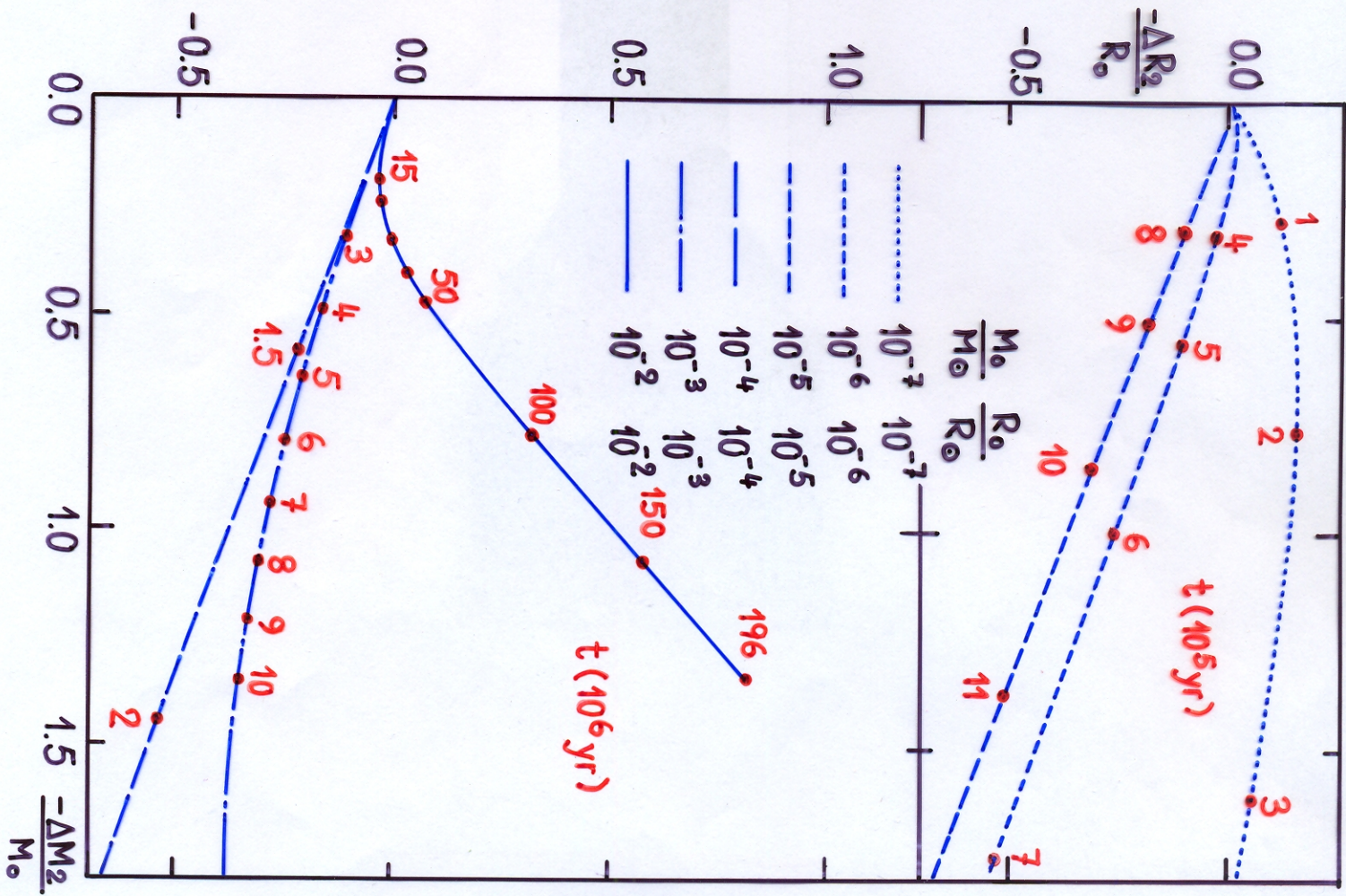
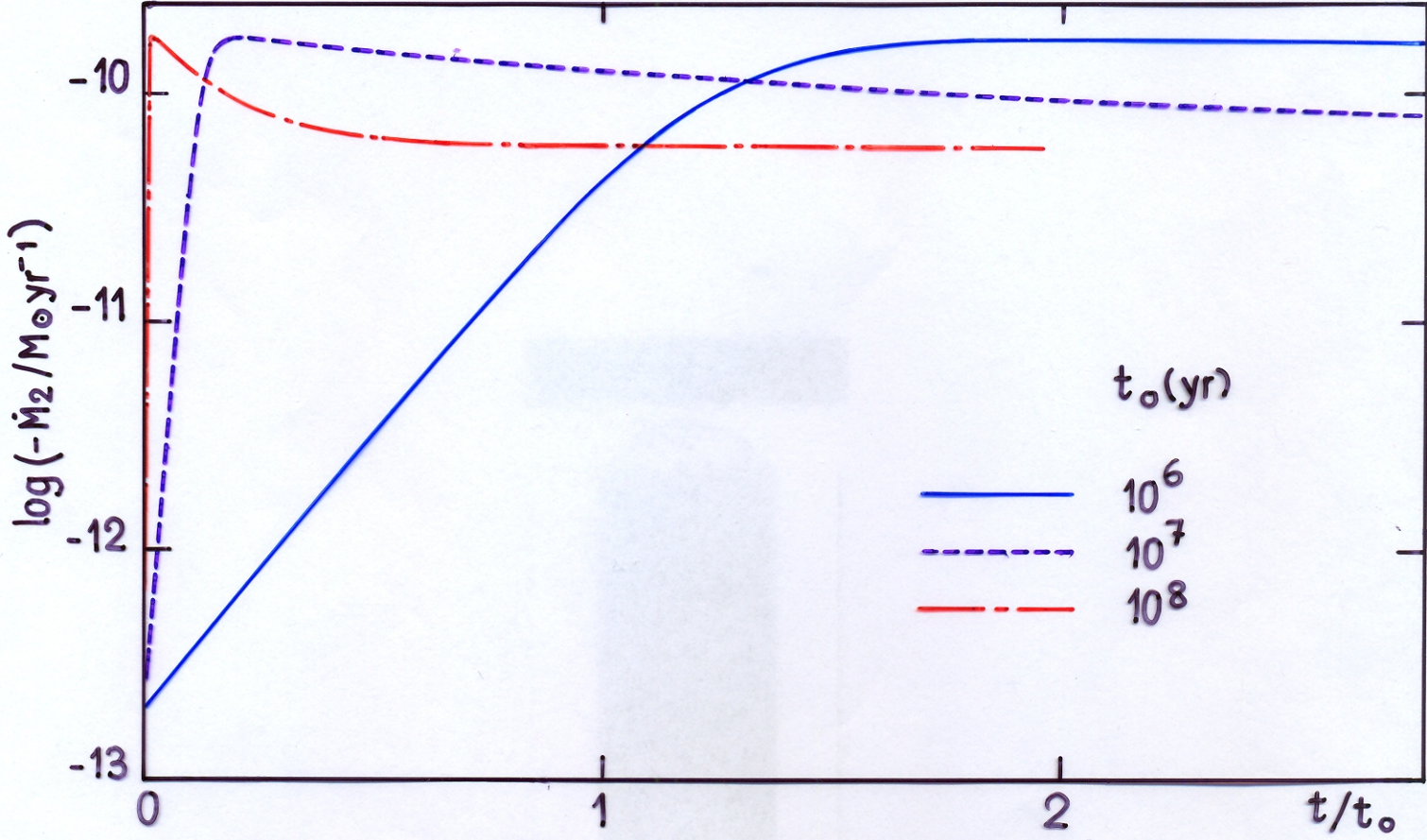
Prüfung durch numerische Rechnung (\rightarrow Figur $\zeta_{2,eff} (L_g \tau_M / L \tau_{KH})$) zeigt, dass Linearität gut erfüllt ist. \rightarrow Das Modell ist offenbar nicht schlecht !

Der Entwicklungsweg im $-\dot{M}_2(P)$ -Diagramm (\rightarrow Figur)

bildet eine Schleife (sog. Flagge), verursacht durch die anfängliche adiabatische Expansion ($\dot{P} > 0$, da $\zeta_s < 1/3$) und anschließende thermische Relaxation ($\dot{P} < 0$, $\zeta_{eff} > 1/3$) des Sekundärsterns.

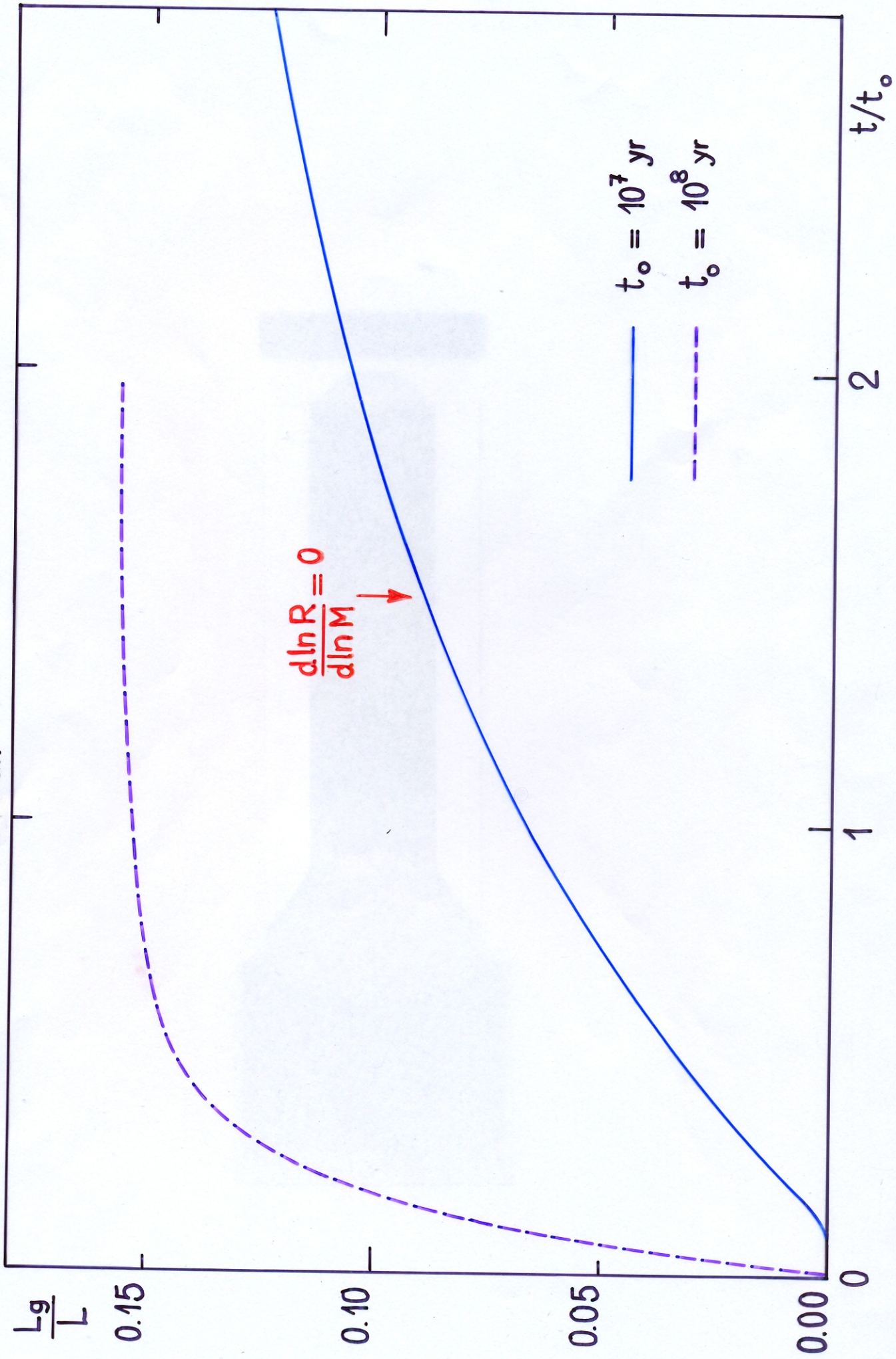
Turn-on of mass transfer (D'Antona, Mazzitelli, Ritter, 1989) 6.19

$M_{1,i} = 0.6 M_{\odot}$, $M_{2,i} = 0.2 M_{\odot}$, $\dot{J} = \dot{J}_{GR}$, $\alpha = \text{const.}$



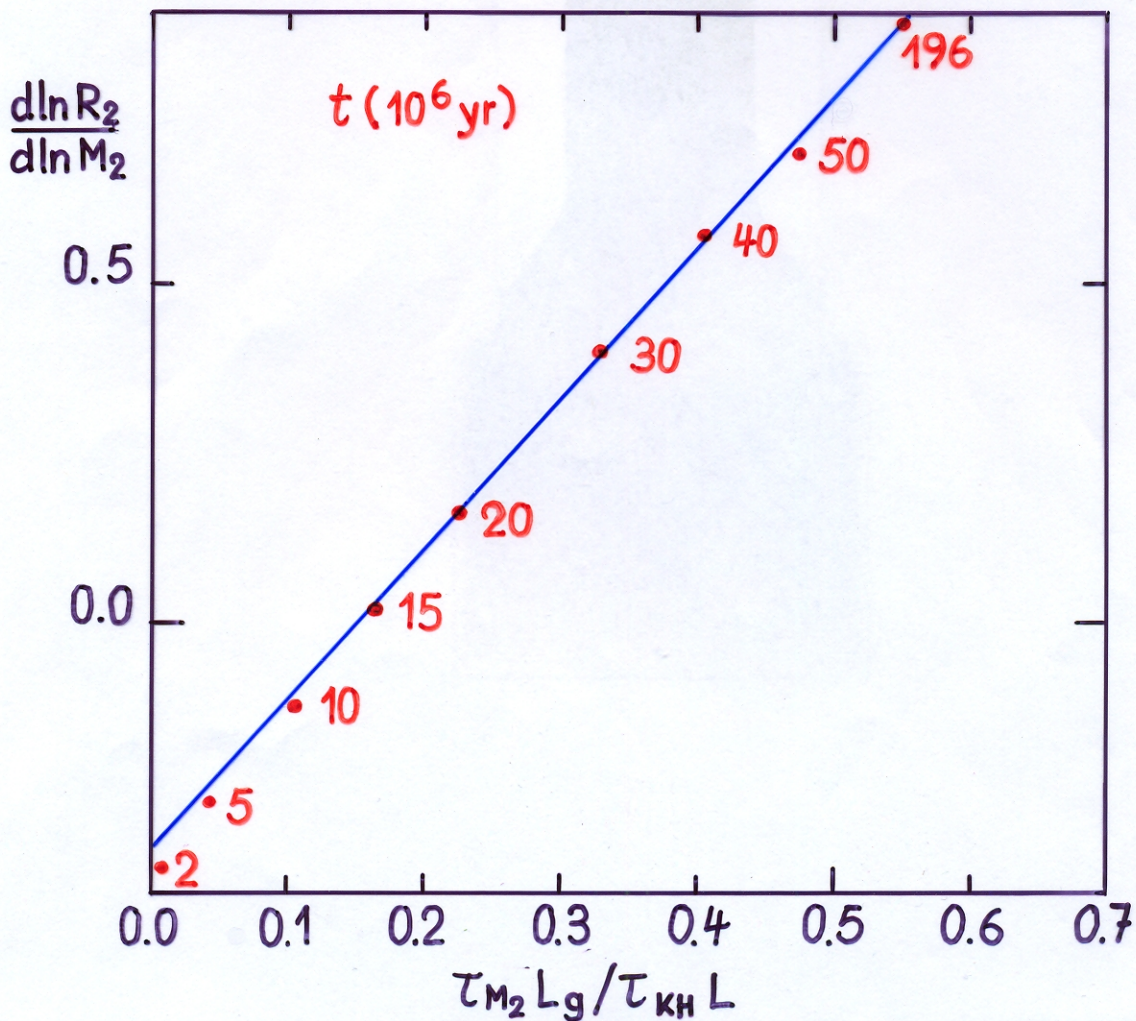
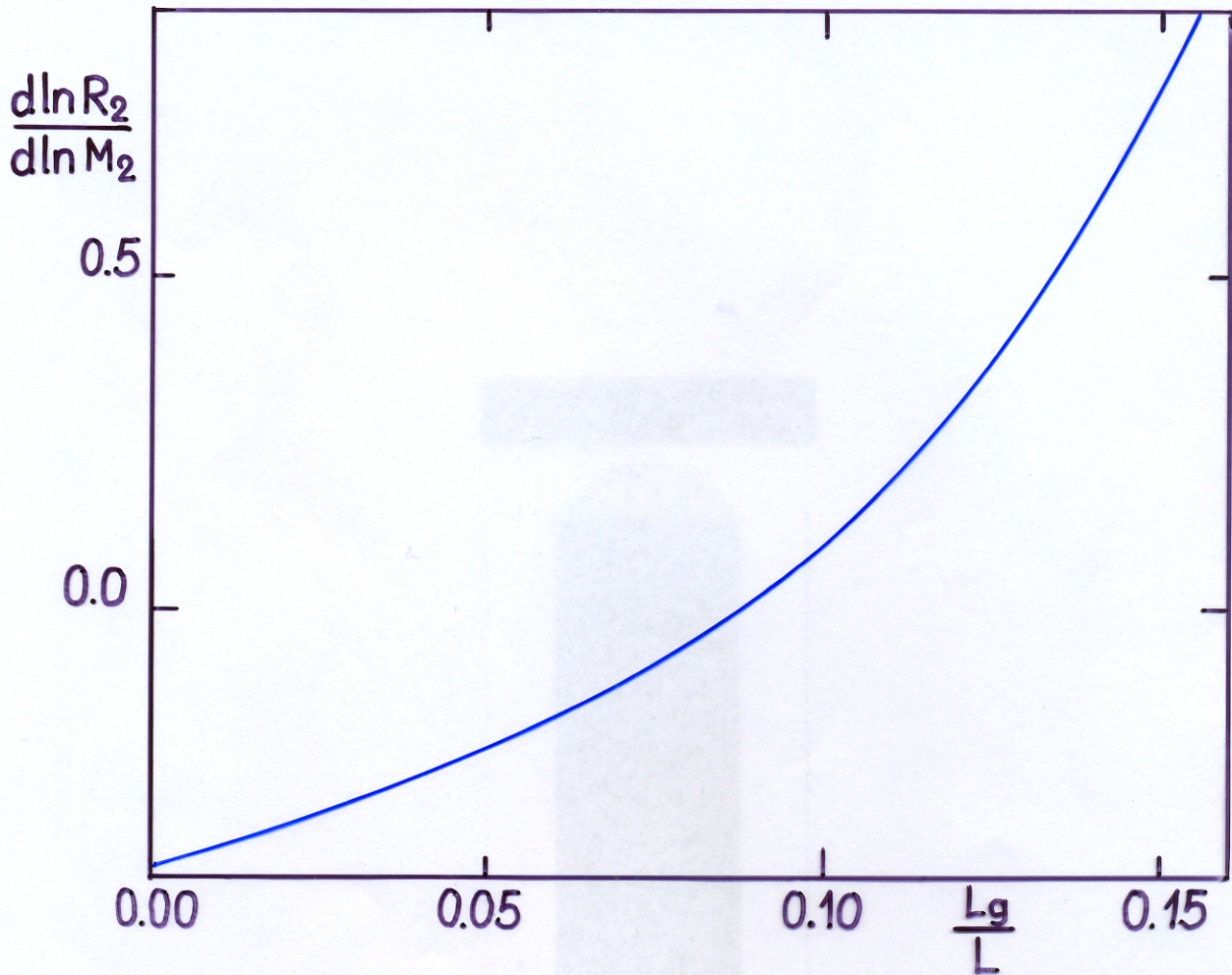
Turn-on of mass transfer (D'Antona, Mazzitelli, Ritter, 1989)

$M_{1,i} = 0.6 M_{\odot}$, $M_{2,i} = 0.2 M_{\odot}$, $\dot{J} = \dot{J}_{GR}$, $\alpha = \text{const.}$



Turn-on of mass transfer (D'Antona, Mazzitelli, Ritter, 1989)

$M_{1,i} = 0.6 M_{\odot}, M_{2,i} = 0.2 M_{\odot}, \dot{J} = \dot{J}_{GR}, \alpha = \text{const.}$

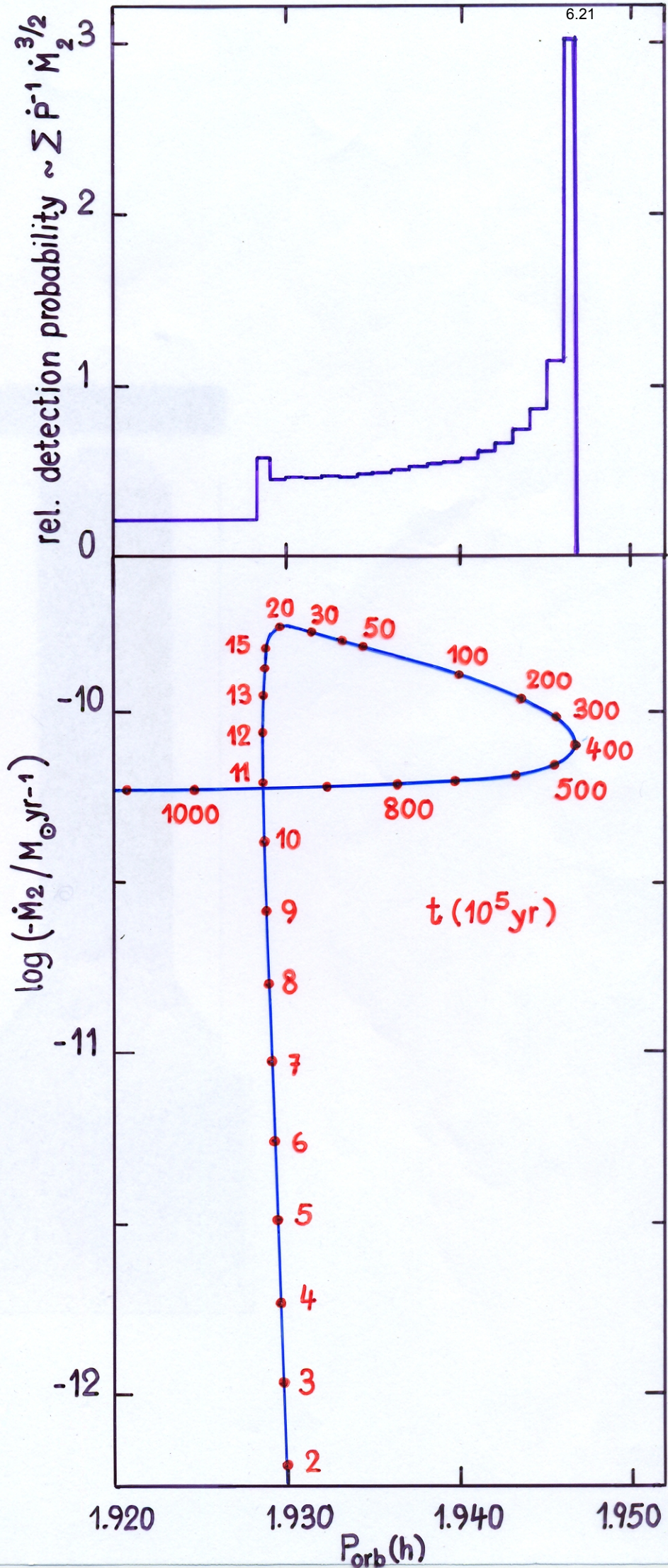


Turn-on of mass transfer

(D'Antona, Mazzitelli, Ritter, 1989)

$$M_{1,i} = 0.6 M_{\odot}, M_{2,i} = 0.2 M_{\odot}$$

$$\dot{J} = \dot{J}_{GR}, \alpha = \text{const.}$$



b) Sequenz 4 : $M_{1,i} = 1.0 M_{\odot}$, $M_{2,i} = 0.60 M_{\odot}$, $\dot{J} = \dot{J}_{GR} + \dot{J}_{VZ}$ mit $f_{VZ} = 1$

- Sekundärstern mit konvektiver Hülle und radiativem Kern
 $\zeta_s \approx +0.37$
- Drehimpulsverlust durch magn. Bremsung dominiert !

Verlauf von $-M_2(t)$ (\rightarrow Figur) zeigt ebenfalls das in 3.2 skizzierte Verhalten:

Phase 1: $\tau_{\dot{M}_2} = -\frac{1}{2} \frac{H_p}{R_2} \frac{J}{\dot{J}_{GR} + \dot{J}_{VZ}} \approx 3.1 \cdot 10^4 a$ bis $t \approx 2 \cdot 10^5 a$

Phase 2: mit $\zeta_{2,s} \approx 0.37$ ist

$$(-\dot{M}_2)_{ad} = \frac{-M_2}{\zeta_{2,s} \zeta_{R,2}} 2 \frac{\dot{J}_{GR} + \dot{J}_{VZ}}{J} \approx 4.2 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/a, \text{ wogegen}$$

$$\text{Max}(-\dot{M}_2) \approx 2.4 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/a$$

\rightarrow Phase 2 existiert nicht !

Phase 3 : thermische Relaxation wird bereits ab $t \approx 1-2 \cdot 10^5 a$ wichtig

Phase 4 : quasistationärer Massenverlust ab $t \approx 3 \cdot 10^6 a$; ab dann ist $\zeta_{2,eff} \approx \text{const.} \approx 1.4$ und $(-\dot{M}_2)_e \approx 1.5 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/a$

Entwicklung im Masse-Radius-Diagramm (\rightarrow Figur)

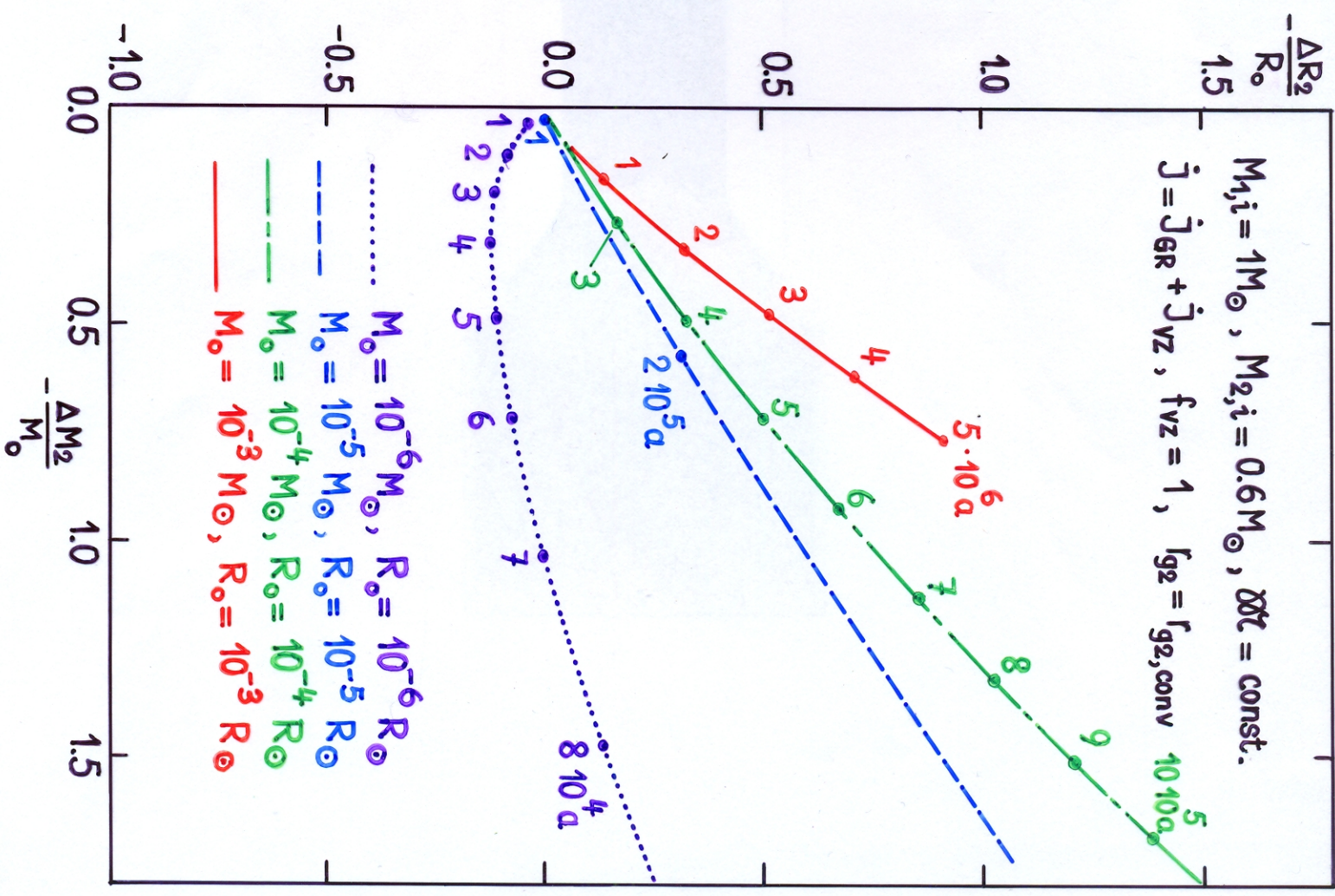
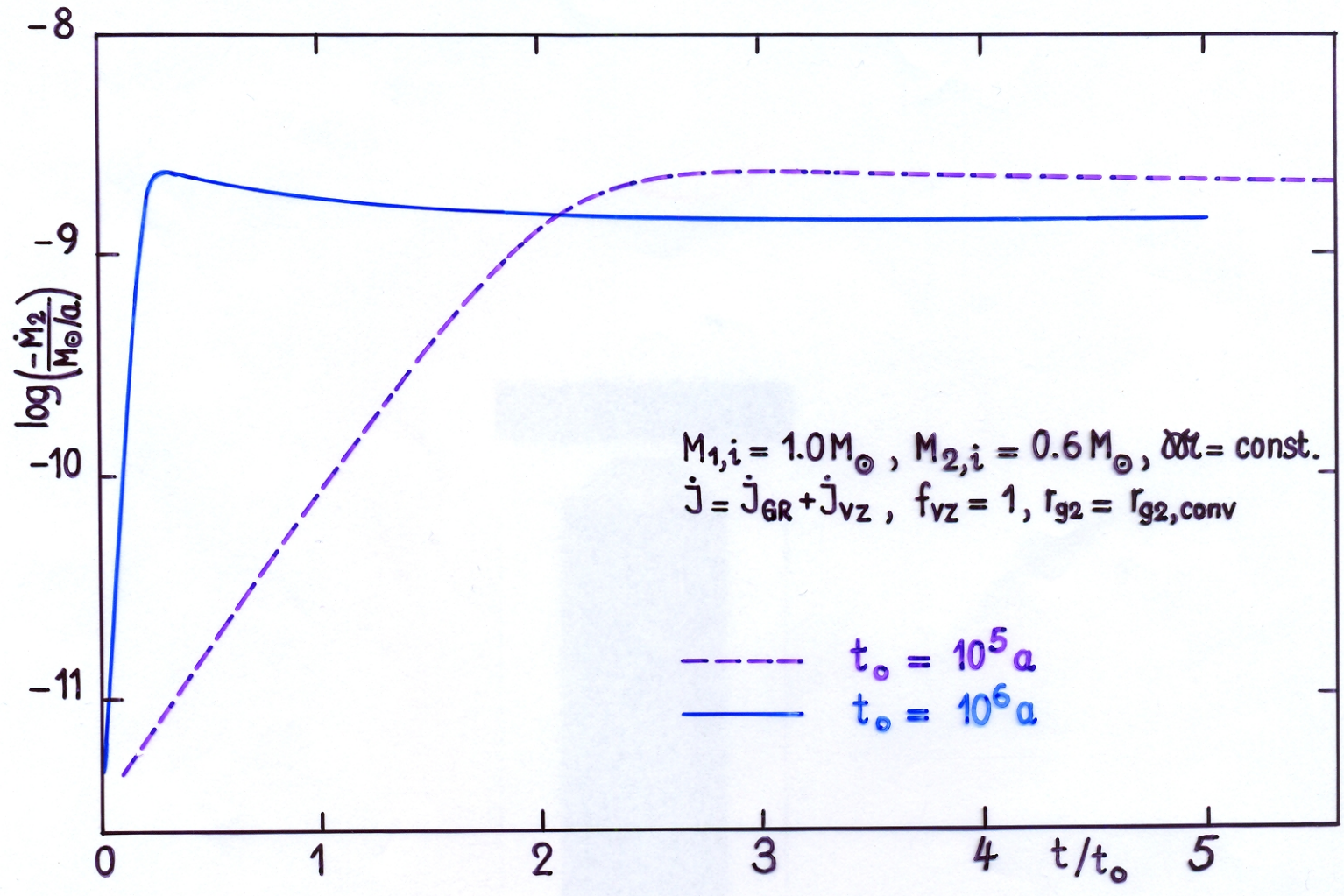
\blacktriangleright bis $t \approx 4 \cdot 10^4$ ist $\zeta_{eff} < 0$, obwohl wir erwarten dass $\zeta_{eff} = \zeta_s > 0$.
Warum? Wegen der nuklearen Entwicklung !

$$\frac{d \ln R_2}{d \ln M_2} = \zeta_{2,eff} = \zeta_{2,s} + \underbrace{\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t}\right)_{th} \frac{M_2}{\dot{M}_2}}_{\approx 0 \text{ für } t=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t}\right)_{nuc} \frac{M_2}{\dot{M}_2}}_{\approx \tau_{nuc}^{-1} = \tau_{M_2}}$$

$$\zeta_{2,eff} \approx \zeta_{2,s} + \frac{\tau_{M_2} < 0}{\tau_{nuc} > 0}$$

\rightarrow wenn nur für $t=0$ $-\dot{M}_2$ hinreichend klein ist, so dass $|\tau_{M_2}| > \tau_{nuc}$ so wird $\zeta_{eff} < 0$, auch wenn $\zeta_s > 0$.

Einsetzen von Massentransfer (D'Antona, Mazzitelli & Ritter, 1989)



c) Sequenz 6: $M_{1,i} = 1.0 M_{\odot}$, $M_{2,i} = 1.0 M_{\odot}$, $\dot{J} = \dot{J}_{GR} + \dot{J}_{VZ}$ mit $f_{VZ} = 1$, $r_{g2} = r_{g2,conv}$

- Sekundärstern praktisch vollständig radiativ, nur massearme konvektive Hülle $\rightarrow \xi_s \approx +7.5$, $\xi_e \approx 1$, $r_{g,conv} \ll 1$
- wegen kleinem $r_{g,conv}$: $\dot{J}_{VZ} \approx \dot{J}_{GR} \rightarrow$ rel. geringes \dot{J}

Verlauf von $-\dot{M}_2(t)$ (\rightarrow Figur) zeigt Verhalten wie in 3.2 skizziert.

Phase 1: $\tau_{\dot{M}_2} = -\frac{1}{2} \frac{H_p}{R_2} \frac{J}{\dot{J}_{GR} + \dot{J}_{VZ}} \approx 1.87 \cdot 10^5 a$ ist lang wegen kleinem \dot{J} ($\tau_J = 2 \cdot 10^9 a$),
bis $t \approx 10^6 a$

Phase 2: existiert hier nicht; da $\tau_{\dot{M}_2}$ rel. lang und $\tau_{KH} \approx 3 \cdot 10^7 a$ rel. kurz, setzt die therm. Relaxation rel. "früh" ein.

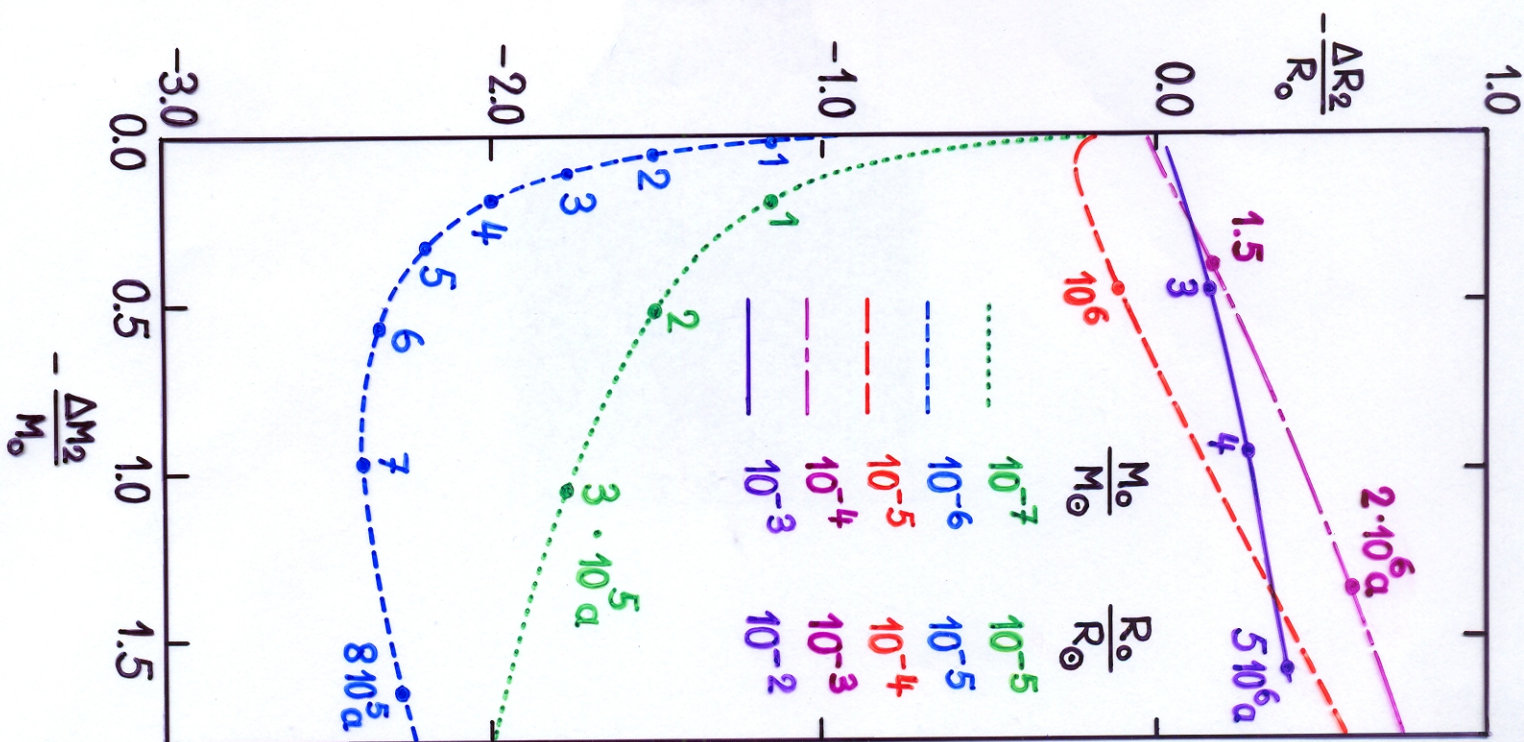
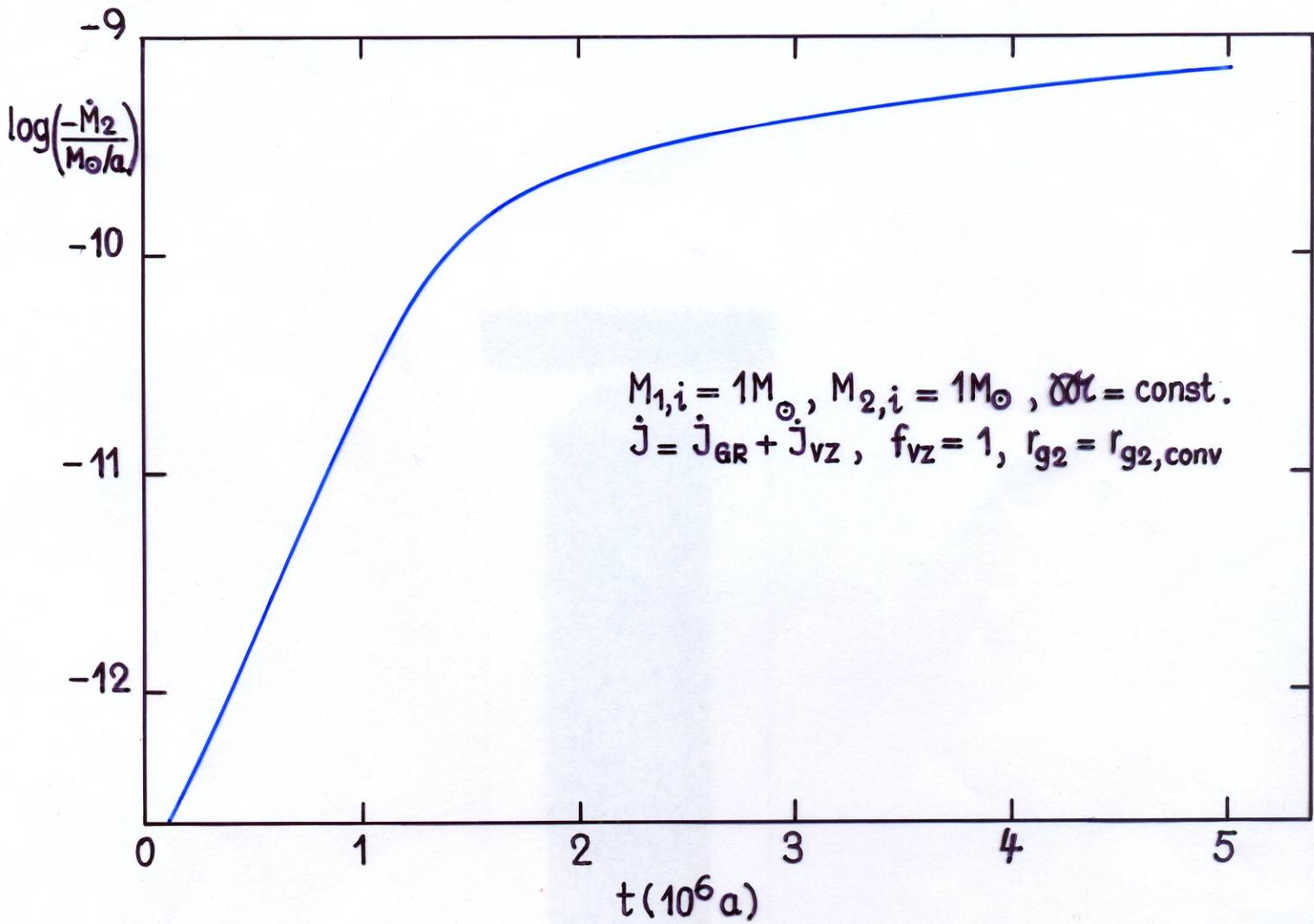
Phase 3: da $\xi_{2,s} > \xi_{2,e}$ ist $(-\dot{M}_2)_{ad} \approx 1.4 \cdot 10^{-10} M_{\odot}/a < (-\dot{M}_2)_e$
 $\rightarrow -\dot{M}_2$ wächst mit einsetzender therm. Relaxation weiter, wenn auch mit längerem $\tau_{\dot{M}_2}$ als in Phase 1.

Phase 4: wird in dieser Rechnung nicht erreicht. Da für $M = 1 M_{\odot}$ $\xi_e \approx 1$, ist $(-\dot{M}_2)_e \approx 2 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/a$, wogegen am Ende der Rechnung ($t = 5 \cdot 10^6 a$) $-\dot{M}_2 \approx 7 \cdot 10^{-10} M_{\odot}/a$ ist und $\xi_{2,eff}$ weiter abnimmt (\rightarrow M-R-Diagr.), d.h. $-\dot{M}_2 \uparrow$.

Entwicklung im Masse-Radius-Diagramm (\rightarrow Figur)

- ▶ Anfangsphase (bis $t \approx 10^6 a$) durch nukleare Entwicklung beeinflusst ($\xi_{eff} < 0$, bzw. $\xi_{eff} < \xi_s \approx 7.5$)
- ▶ ab $t \approx 1.5 \cdot 10^6 a$ merkliche Abflachung der Kurve $\Delta R_2(\Delta M_2)$ durch thermische Relaxation, $\xi_{2,eff} \downarrow$

Einsetzen von Massentransfer (D'Antona, Mazzitelli, Ritter, 1989)



4. Explizite Berechnung der Massentransferrate (optisch dicker Fall)

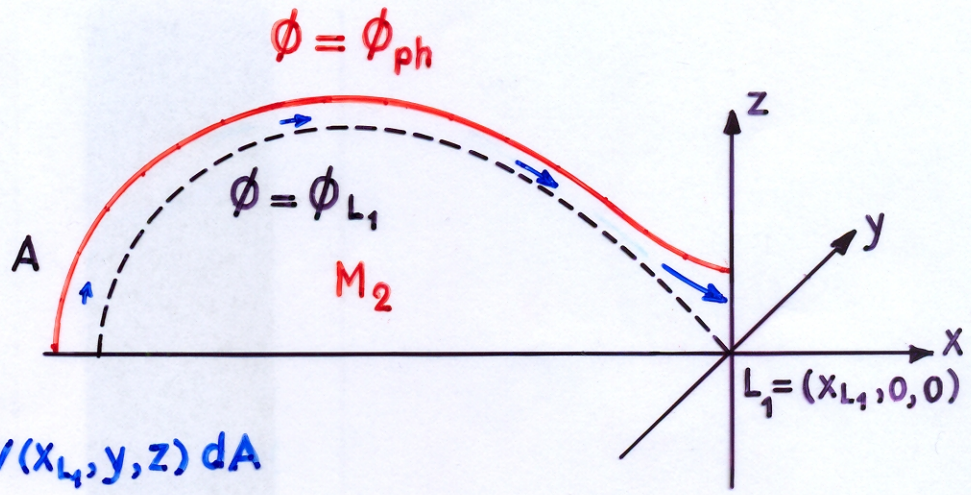
- ▶ optisch dünne Näherung gut, solange $-\dot{M}_2 < \dot{M}_0$ ($\approx 10^{-8} \frac{M_\odot}{a}$ für HR-St.)
- ▶ Wenn $-\dot{M}_2 \leq \dot{M}_0 \iff R_2 \leq R_{2,R}$
- wenn $-\dot{M}_2 > \dot{M}_0 \iff R_2 > R_{2,R}$
- L_1 liegt im Stern unterhalb der Photosphäre, d.h. in optisch tiefen Schichten → daher: optisch dicker Massentransfer

4.1 Zur Berechnung der optisch dicken Massentransferrate

▶ prinzipielles Vorgehen

im Prinzip gleich wie beim optisch dünnen Fall, d.h. man berechnet

$$-\dot{M}_2 = \int_{\phi_{L_1}}^{\phi_{ph}} \rho(x_{L_1}, y, z) v(x_{L_1}, y, z) dA$$

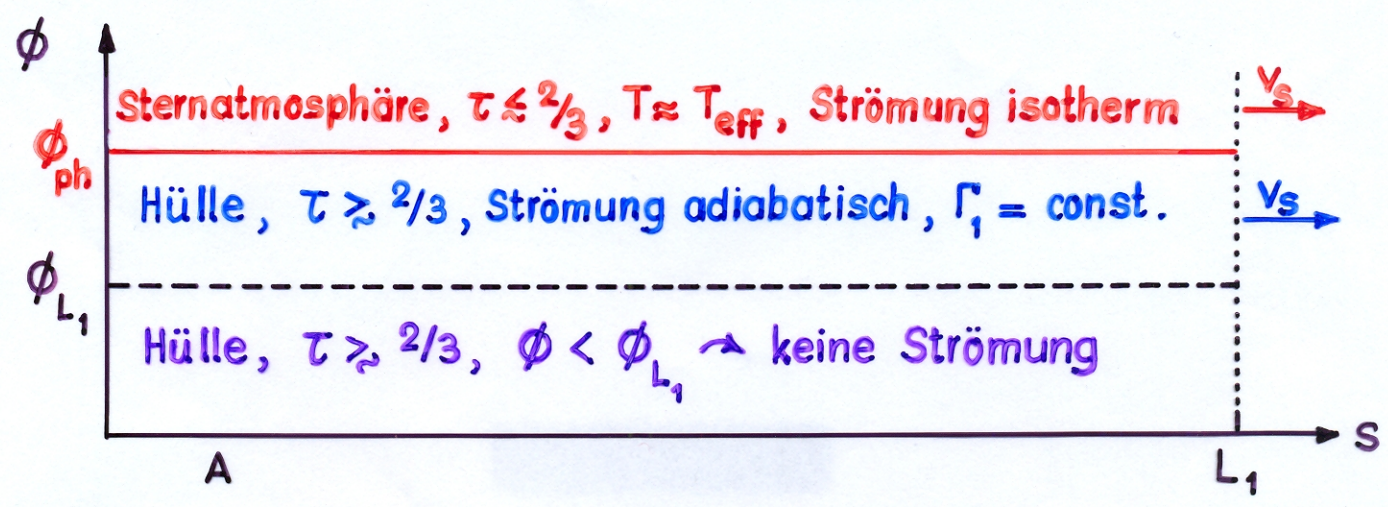


▶ zur Berechnung von $\rho(x_{L_1}, y, z)$ und $v(x_{L_1}, y, z)$ macht man folgende vereinfachende Annahmen:

- a) Strömung ist stationär, laminar und entlang $\phi = const.$
- b) weit weg von L_1 (Punkt A) ist $v^2 \ll v_s^2$.
- c) Strömung erreicht $v = v_s$ in der Ebene $x = x_{L_1}$.
- d) Strömung von $A \rightarrow L_1$ ist adiabatisch, wenn $\tau > \tau_{ph} \approx 2/3$ und isotherm mit $T = T_{eff}$, wo $\tau < \tau_{ph} \approx 2/3$.
- e) vertikale Schichtung ist hydrostatisch.
- f) vertikale Schichtung des Sterns weit weg von L_1 (Punkt A) entspricht vertikaler Schichtung eines Einzelsterns mit Masse M_2 und Radius R_2 .

▶ Verknüpfung der Punkte A und L_1 durch die Bernoulli-Gleichung.

Schema zur Berechnung der Massentransferrate:



Damit ergeben sich folgende Bedingungen:

weit weg von L_1 (Punkt A)	zwischen A und L_1	bei L_1 , bzw. $x = x_{L_1}$
$v^2 \ll v_s^2$ hydrostatisches Gleichgewicht $\rightarrow \rho_0(\phi), P_0(\phi), T_0(\phi), \mu_0(\phi), \dots$ $\phi \approx -\frac{GM_2}{r}$	stationäre Strömung entlang $\phi = \text{const.}$ mit $v \leq v_s$ $P = \frac{Q}{\mu} \rho T_{\text{eff}}, \tau \lesssim 2/3$ $P = K \rho \Gamma_1, \Gamma_1 = \text{const.}, \tau \gtrsim 2/3$ $\frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dP}{\rho} + \phi = \text{const.}$ entlang einer Stromlinie	$v^2 = v_s^2 = \frac{Q T_{\text{eff}}}{\mu}, \tau \lesssim 2/3$ $v^2 = v_s^2 = \Gamma_1 \frac{P}{\rho}, \tau \gtrsim 2/3$ hydrostatisches Gleichgewicht in y- und z-Richtung $\phi \approx \phi_{L_1} + U(x-x_{L_1})^2 + Vy^2 + Wz^2$

4.2 Die Massentransferrate bei optisch dickem Massentransfer

► hier: nur Ergebnis. Für Herleitung \rightarrow z. B. Kolb, U., Ritter, H.: 1990, A&A

►
$$-\dot{M}_2 = \dot{M}_0 + 2\pi \varphi(q) \frac{R_{2,R}^3}{GM_2} \int_{P_{ph}}^{P(\phi_{L_1})} F_3(\Gamma_1) \left(\frac{Q T_0}{\mu_0}\right)^{1/2} dP_0, \quad R_2 > R_{2,R}$$

mit

$$F_3(\Gamma_1) = \Gamma_1^{1/2} \left(\frac{2}{1+\Gamma_1} \right)^{\frac{\Gamma_1+1}{2(\Gamma_1-1)}}$$

- ▶ im Allg. muss das Integral $\int_{P_{ph}}^{P(\phi_{L_1})} F_3(\Gamma_1) \left(\frac{Q T_o}{\mu_o} \right)^{1/2} dP_o$ numerisch bestimmt werden, mit $T_o(P_o)$ und $\mu_o(P_o)$ sowie $P(\phi_{L_1})$ aus einem hydrostatisch geschichteten (sphärischen) Sternmodell.

4.3 Analytische Näherung für polytrop geschichtete Sterne

- ▶ Annahme: Die äusseren Schichten des Sterns seien polytrop geschichtet, d.h. es gelte

$$P(r) = K \rho(r)^{1+1/n}, \quad K \text{ und } n \text{ konst.}, \quad R_{2,R} \leq r \leq R_2$$

- ↪ zusammen mit der idealen Gasgleichung $P(r) = \frac{Q}{\mu(r)} \rho(r) T(r)$ kann das Integral für $(-\dot{M}_2)$ näherungsweise analytisch gelöst werden.

- ▶ Ergebnis: (Herleitung für $n = 3/2 \rightarrow$ Paczyński, B, Sienkiewicz, R.: 1972, AA 22, 73)

$$(-\dot{M}_2)_{\text{opt.dick}} \approx \dot{M}_o F_3(\Gamma_1) F_4(n) \left(\frac{R_2 - R_{2,R}}{H_{P,ph}} \right)^{n + \frac{3}{2}}, \quad R_2 > R_{2,R},$$

wobei

$$F_4(n) = 2\sqrt{e} \frac{(n+1)^{\frac{2n+1}{2}}}{2n+3}$$

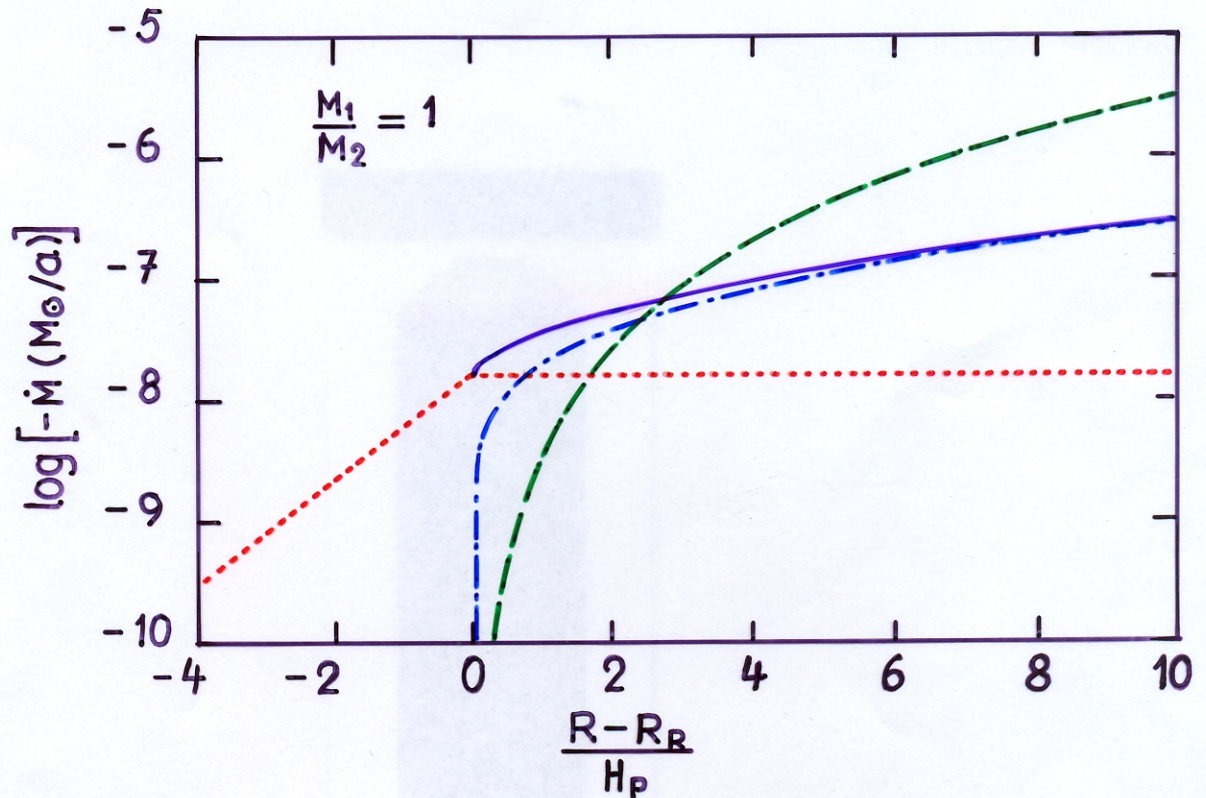
und

$$H_{P,ph} = \frac{Q_{\text{Teff}} R_2^2}{\mu_{ph} G M_2}$$

die photosphärische, isotherme Druckskalenhöhe ist.

4.4 Ergebnisse numerischer Rechnungen

Beispiel: $2M_{\odot}$ -Stern kurz vor Beendigung des zentralen Wasserstoffbrennens (Kolb, 1988, Diplomarbeit, LMU München).



- optisch dünner Massentransfer
- · - · - · optisch dicker Massentransfer
- optisch dünner + optisch dicker Massentransfer
- - - - optisch dicker Massentransfer bei polytropen Schichtung mit $n = 3/2$ und $\Gamma_1 = 5/3$