

6. Explizite Bestimmung der Massentransferrate

- Mängel der impliziten Bestimmung der Massentransferrate
- Explizite Bestimmung der Massentransferrate (optisch dünner Fall)
- Anwendungen
 - Instationärer Massentransfer
 - Adiabatische Stabilität von Massentransfer
 - Einsetzen von Massentransfer
 - Abschalten von Massentransfer durch schnelle Reduktion der Drehimpulsverlustrate
 - Ergebnisse numerischer Rechnungen
- Explizite Bestimmung der Massentransferrate (optisch dicker Fall)

1. Mängel der impliziten Bestimmung der Massentransferrate

- ▶ a) Die implizite Methode liefert $-\dot{M}_2$ nur für den Fall stationären Massentransfers. Bei instationärem Massentransfer kann man $-\dot{M}_2$ überhaupt nicht bestimmen!
- ▶ b) Selbst bei stationärem Massentransfer lässt sich $-\dot{M}_2$ im Allgemeinen nicht mit Hilfe von

$$-\dot{M}_2 = \frac{M_2}{\zeta_s - \zeta_{R,2}} \left[\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{th} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{nuc} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1+M_2} \right]$$

bestimmen. Begründung: ausser in einfachen Spezialfällen sind weder ζ_s , $(\partial \ln R_2 / \partial t)_{th}$ noch $(\partial \ln R_2 / \partial t)_{nuc}$ als explizite Funktionen der Sternparameter bekannt. **Normale Sternmodelle liefern weder ζ_s , $(\partial \ln R / \partial t)_{th}$ noch $(\partial \ln R / \partial t)_{nuc}$!** Nur für sehr einfache Modelle, z.B. einfache bzw. zusammengesetzte Polytrope (\rightarrow Rappaport, Joss & Webbink (1982, ApJ 254, 616); Rappaport, Verbunt & Joss (1983, ApJ 275, 713); Kolb & Ritter (1992, A&A 254, 213)) lassen sich ζ_s und $(\partial \ln R / \partial t)_{th}$ explizit ermitteln.

- ▶ c) Um bei instationärem Massentransfer wenigstens die relevanten Zeitskalen bestimmen zu können, muss man auch die Länge

$$\ell = \frac{\partial(R_{2,R} - R_2)}{\partial \ln \dot{M}_2}$$

in der Gleichung

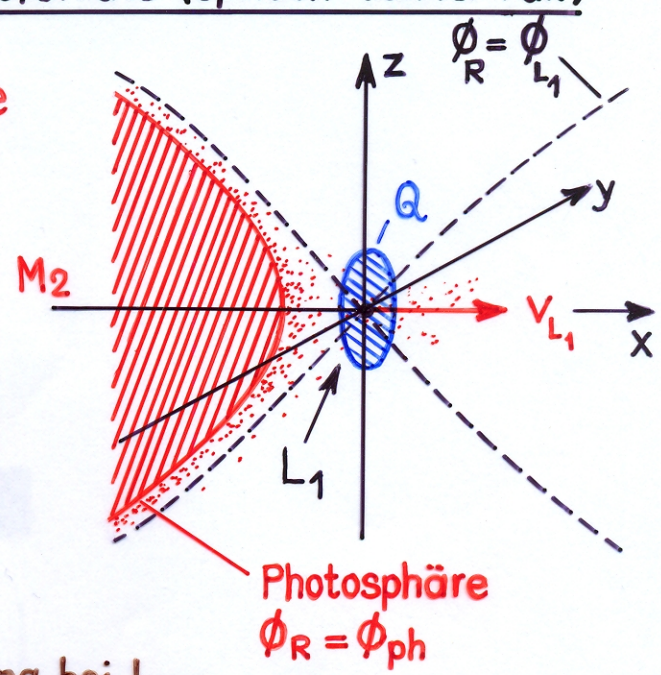
$$-\dot{M}_2 = (-\dot{M}_2) \frac{R_2}{\ell} \left[(\zeta_s - \zeta_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{M_2} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1+M_2} \right]$$

kennen.

- ▶ **Benötigen hierzu \dot{M}_2 als explizite Funktion der Stern- und Doppelstern-Parameter: $\dot{M}_2 = \mathcal{f}(M_1, M_2, R_2, R_{2,R}, \dots)$.**

2. Explizite Bestimmung der Massentransferrate (optisch dünner Fall)

► **Modell** : Massentransfer als isotherme Unterschallströmung von der Photosphäre bis L_1 , wo der Schallpunkt liegt.



→ Aus Dimensionsgründen ist

$$\underline{\underline{-\dot{M}_2 = Q \rho_{L_1} v_{L_1}} \quad (1)}$$

Q : effektiver Querschnitt der Strömung bei L_1

v_{L_1} : Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung bei L_1

ρ_{L_1} : Dichte bei L_1

Literatur : Plavec, M., Ulrich, R.K., Polidan, S. : 1973, PASP 85, 769.
 Lubow, S.H., Shu, F.H. : 1975, ApJ 198, 383.
 Meyer, F., Meyer-Hofmeister, E. : 1983, A&A 128, 420.
 Pringle, J.E. : 1985, in: Interacting Binary Stars, CUP.
 Ritter, H. : 1988, A&A 202, 93.

► Annahmen, Nebenbedingungen

- 1) $\phi_{ph} < \phi_{L_1}$ → Medium zwischen Photosphäre und L_1 ist optisch dünn → $T \approx \text{const.}$ ($\approx T_{\text{eff}}$)
- 2) Isothermie, d.h. $T = T_{\text{eff}} = \text{const.}$
- 3) hydrostatisches Gleichgewicht der Strömung bei L_1 in y- & z-Richtung (jedoch nicht in x-Richtung)
- 4) laminare Strömung (d.h. \exists Stromlinien)
- 5) der Schallpunkt liegt bei L_1 , d.h. $v_{L_1} = v_s$ (→ Lubow & Shu, 1975)

► Berechnung von \dot{M}_2 erfolgt in 3 Schritten

2.1 Bestimmung des Potentials in der Umgebung von L_1

(Bestimmt im wesentlichen die Dichteschichtung)

► Ausgangspunkt: Rochepotential ϕ_R

$$\phi_R(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{GM_2}{A} \left\{ \frac{q}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}} + \frac{1}{((1-\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}} + \left[\left(\xi - \frac{1}{1+q} \right)^2 + \eta^2 \right]^{1/2} \frac{1+q}{2} \right\}$$

mit $\xi = \frac{x}{A}$, $\eta = \frac{y}{A}$ und $\zeta = \frac{z}{A}$

► Entwickeln ϕ_R in der Umgebung von $L_1 = (\xi_1, 0, 0)$ bis zur 2. Ordnung in ξ , η und ζ :

$$\begin{aligned} \phi_R(\xi, \eta, \zeta) \approx & \phi_R(\xi_1, 0, 0) + \overbrace{\frac{\partial \phi_R}{\partial \xi} \Big|_{L_1}}^{=0 \rightarrow \text{Def. von } L_1} (\xi - \xi_1) + \underbrace{\frac{\partial \phi_R}{\partial \eta} \Big|_{L_1}}_{=0} \cdot \eta + \underbrace{\frac{\partial \phi_R}{\partial \zeta} \Big|_{L_1}}_{=0} \cdot \zeta \\ & + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{L_1}}_{=0} (\xi - \xi_1) \eta + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \xi \partial \zeta} \Big|_{L_1}}_{=0} (\xi - \xi_1) \zeta + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \eta \partial \zeta} \Big|_{L_1}}_{=0} \cdot \eta \zeta \\ & + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \xi^2} \Big|_{L_1}}_{\neq 0} (\xi - \xi_1)^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \eta^2} \Big|_{L_1}}_{\neq 0} \eta^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \zeta^2} \Big|_{L_1}}_{\neq 0} \zeta^2 \end{aligned}$$

$$\phi_R(\xi, \eta, \zeta) \approx \phi_R(\xi_1, 0, 0) + U(\xi - \xi_1)^2 + V\eta^2 + W\zeta^2$$

mit

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \xi^2} \Big|_{L_1} = -\frac{GM_2}{A} \left[\sigma(q) + \frac{1}{2}(1+q) \right] \\ V &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \eta^2} \Big|_{L_1} = \frac{GM_2}{2A} [\sigma(q) - (1+q)] \\ W &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_R}{\partial \zeta^2} \Big|_{L_1} = \frac{GM_2}{2A} \sigma(q) \\ \sigma(q) &= \frac{q}{\xi_1^3} + \frac{1}{(1-\xi_1)^3} \end{aligned}$$

Wichtig:
 $U < 0, V > 0, W > 0$
 → ϕ_R bei L_1 ist eine Sattelfläche, L_1 ein Sattelpunkt

2.2 Bestimmung des effektiven Querschnitts

$$Q = \frac{1}{\rho_{L_1}} \iint dy dz \rho(x_{L_1}, y, z) = \frac{A^2}{\rho_{L_1}} \iint d\eta d\xi \rho(\xi_1, \eta, \xi)$$

Bestimmung von $\rho(\xi_1, \eta, \xi)$:

Hydrostatisches Gleichgewicht in η und ξ -Richtung:

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial \eta} = -\rho \frac{\partial \phi_R}{\partial \eta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} = -\rho \frac{\partial \phi_R}{\partial \xi}$$

► Zustandsgleichung: Ideales Gas $P = \frac{Q}{\mu} \rho T$

$$\text{Da } T = \text{const.}, \text{ folgt: } \left. \begin{aligned} \frac{Q T}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} &= -\rho \frac{\partial \phi_R}{\partial \eta} = -2\rho V \eta \\ \frac{Q T}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} &= -\rho \frac{\partial \phi_R}{\partial \xi} = -2\rho W \xi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{in der} \\ \text{N\u00e4he} \\ \text{von } L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\rho(\xi_1, \eta, \xi) = \rho_{L_1} \exp\left\{-\frac{\mu}{Q T} [V \eta^2 + W \xi^2]\right\}}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{Q = A^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d\eta d\xi \exp\left\{-\frac{\mu}{Q T} [V \eta^2 + W \xi^2]\right\} = \pi A^2 \frac{Q T}{\mu} (V W)^{-1/2}}} \quad (2)$$

N.B. Wahl der Integrationsgrenzen ($\pm \infty$) ergibt einfaches Integral.

Die N\u00e4herung ist gut, wenn der Dichteabfall in η - und ξ -Richtung schnell genug erfolgt, d.h. wenn $H_\eta \ll 1$ und $H_\xi \ll 1$, wobei

$$H_\eta = \left(\frac{Q T}{2\mu V}\right)^{1/2} = \left(\frac{Q T}{\mu} \frac{A}{G M_2}\right)^{1/2} [\sigma(q) - (1+q)]^{-1/2} = \left(\frac{T}{T_V}\right)^{1/2} [f_2(q) (\sigma(q) - (1+q))]^{-1/2}$$

$$H_\xi = \left(\frac{Q T}{2\mu W}\right)^{1/2} = \left(\frac{Q T}{\mu} \frac{A}{G M_2}\right)^{1/2} \sigma(q)^{-1/2} = \left(\frac{T}{T_V}\right)^{1/2} [f_2(q) \sigma(q)]^{-1/2},$$

mit $T_V = \frac{G M_2 \mu}{Q R_2} \approx 2.3 \cdot 10^7 \text{ K } \mu \left(\frac{M_2}{M_\odot}\right) \left(\frac{R_2}{R_\odot}\right)^{-1}$: Virialtemperatur

→ V praktische Zwecke ist $H_\eta \ll 1$ und $H_\xi \ll 1$

2.3 Bestimmung von ρ_{L_1}

▶ Strömung von der Photosphäre ($\phi = \phi_{ph}$) bis L_1 ($\phi = \phi_{L_1}$) ist beschleunigt → kein hydrostatisches Gleichgewicht!

▶ Verwenden zur Bestimmung von ρ_{L_1} die Bernoulli-Gleichung (Daher die Voraussetzung einer laminaren Strömung)

$$\rightarrow \frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dP}{\rho} + \phi = \text{const. entlang einer Stromlinie}$$

Verwenden weiter: ideales Gas und $T = \text{const.}$

$$\rightarrow \frac{dP}{\rho} = \frac{\alpha T}{\mu} \frac{d\rho}{\rho} = v_s^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad ; \quad v_s = \left(\frac{\alpha T}{\mu}\right)^{1/2} = \text{isotherme Schallgeschwindigkeit}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} v^2 + v_s^2 \ln \rho + \phi = \text{const. entlang einer Stromlinie}$$

▶ Betrachten jetzt eine Stromlinie, die die Photosphäre ($\rho = \rho_{ph}, v = v_{ph}, \phi = \phi_{ph}$) mit L_1 ($\rho = \rho_{L_1}, v = v_s, \phi = \phi_{L_1}$) verbindet.

$$\rightarrow \frac{1}{2} v_{ph}^2 + v_s^2 \ln \rho_{ph} + \phi_{ph} = \frac{1}{2} v_s^2 + v_s^2 \ln \rho_{L_1} + \phi_{L_1}$$

Machen Vereinfachung: nehmen an, dass $v_{ph}^2 \ll v_s^2$. Dann folgt

$$\rho_{L_1} = \frac{1}{\sqrt{e}} \rho_{ph} e^{-\frac{\phi_{L_1} - \phi_{ph}}{v_s^2}}$$

Müssen nun noch $\phi_{L_1} - \phi_{ph}$ in brauchbaren Größen ausdrücken. Entwickeln hierzu ϕ nach dem volumenäquivalenten Roche-Radius R_V , wobei

$$\frac{4\pi}{3} R_V^3 = \int_{\phi=\text{const.}} dV = \text{das von } \phi = \text{const. eingeschlossene Volumen für } \phi \leq \phi_{L_1}$$

▶ N.B. Dadurch führen wir sphärische Äquivalente ein, d.h. den sphärischen Photosphärenradius R_2 und den kritischen Roche-Radius $R_{2,R}$.

$$\rightarrow \phi_{L_1} - \phi_{ph} \approx \left. \frac{d\phi_R}{dR_V} \right|_{\phi_{L_1}} [R_V(\phi_{L_1}) - R_V(\phi_{ph})] = \left. \frac{d\phi_R}{dR_V} \right|_{\phi_{L_1}} (R_{2,R} - R_2)$$

$$\left. \frac{d\phi_R}{dR_V} \right|_{\phi_{L_1}} = \frac{GM_2}{R_{2,R}^2} \gamma(q) = \text{"effektive Schwerebeschleunigung"} , \text{ wobei } \gamma(q) \approx 1$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\rho_{L_1} = \frac{1}{\sqrt{e}} \rho_{ph} e^{-\gamma(q) \frac{R_{2,R} - R_2}{(H_P)_0}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \rho_{ph} e^{-\frac{R_{2,R} - R_2}{H_P}}}} \quad (3)$$

wobei $(H_P)_0 = \left(\frac{-dr}{d \ln P} \right)_{R_{2,R}} = \frac{QTR_{2,R}^2}{\mu GM_2} = \text{Druckskalenhöhe eines sph. Sterns mit } R = R_{2,R}$

$$H_P = \frac{(H_P)_0}{\gamma(q)} = \text{effektive Druckskalenhöhe}$$

N.B. Da $T = \text{const.}$, ist H_P (bzw. $(H_P)_0$) auch die Skalenhöhe des Dichteabfalls in der Photosphäre (vgl. Gl. (3))

2.4 Die Massentransferrate; Anwendung auf massearme Sterne

Mit $v_{L_1} = v_s$ und Gl. (1), (2) & (3) folgt nun

$$\blacktriangleright \underline{\underline{-\dot{M}_2 = \frac{1}{\sqrt{e}} \rho_{ph} v_s Q e^{-\frac{R_{2,R} - R_2}{H_P}} = \dot{M}_0 e^{-\frac{R_{2,R} - R_2}{H_P}}}} \quad (4)$$

\blacktriangleright N.B. für massearme Sterne : $\frac{(H_P)_0}{R} = \frac{QT}{\mu GM} = \frac{T}{T_V} \approx 10^{-4}$

\rightarrow Approximation: Bei Änderung von R_2 und/oder $R_{2,R}$ um wenige H_P ändert sich zwar $\exp(-\frac{R_{2,R} - R_2}{H_P})$ sehr stark, während Q praktisch konstant bleibt.

$$\rightarrow \underline{\underline{-\dot{M}_2 = \dot{M}_0 e^{-\frac{R_{2,R} - R_2}{H_P}} \quad \text{mit } \dot{M}_0 = \frac{1}{\sqrt{e}} \rho_{ph} v_s Q = \text{const.}}}}$$

► Bedeutung von \dot{M}_0 : = maximale Massentransferrate, die mit unserem Modell konsistent ist, da für $R_2 \leq R_{2,R}$: $-\dot{M}_2 \leq \dot{M}_0$.

→ Anwendbarkeit des Modells auf kompakte Doppelsterne (CVs, LMXBs) hängt vom Wert von \dot{M}_0 ab.

2.5 Abschätzung von \dot{M}_0

$$Q = \pi A^2 \frac{Q_T}{\mu} (vW)^{-1/2} = \frac{2\pi Q_T R_{2,R}^3}{GM_2 \mu} \varphi(q) = 2\pi R_{2,R} (H_P)_0 \varphi(q)$$

mit $\varphi(q) = \left\{ (g(q) - (1+q))g(q) \right\}^{-1/2} f_2^{-3}(q) \approx 1.23 + 0.5 \log q$ für $0.5 \lesssim q \lesssim 10$

→ $\dot{M}_0 = \frac{2\pi}{v_e} \left(\frac{Q_T}{\mu} \right)^{3/2} \frac{R_{2,R}^3}{GM_2} \rho_{ph} \varphi(q) = \dot{m}_0 \varphi(q)$

Beispiele für massearme Hauptreihensterne

M/M _⊙	R/R _⊙	T _{eff} (K)	μ	ρ _{ph} (gcm ⁻³)	\dot{m}_0 (M _⊙ /a)	Referenz
1.2	1.17	6480	1.31	2.5 10 ⁻⁷	1.3 10 ⁻⁸	Copeland et al. (1970)
0.7	0.67	4430	1.31	1.3 10 ⁻⁶	1.3 10 ⁻⁸	" " " "
0.6	0.59	3900	1.26	1.4 10 ⁻⁶	1.0 10 ⁻⁸	D'Antona et al. (1989)
0.5	0.52	3520	1.33	2.0 10 ⁻⁶	0.9 10 ⁻⁸	Grossman et al. (1974)
0.25	0.25	3410	1.31	1.6 10 ⁻⁵	1.5 10 ⁻⁸	Copeland et al. (1970)
0.085	0.10	2740	1.33	5.0 10 ⁻⁵	6.4 10 ⁻⁹	Grossman et al. (1974)

► Typische Werte von \dot{M}_0 liegen bei $\sim 10^{-8} M_{\odot}/a$

► Unser Modell ist auf Systeme mit $-\dot{M}_2 \lesssim 10^{-8} M_{\odot}/a$ anwendbar

→ haben damit die gesuchte Beziehung $\dot{M}_2(R_2, R_{2,R}, \dots)$

► $-\dot{M}_2 = \dot{M}_0 e^{-\frac{R_{2,R} - R_2}{H_P}}$ (5)

3. Instationärer Massentransfer

- Ableitung von Gl. (5) nach der Zeit t (mit $\dot{H}_p = 0$ und $\ddot{M}_0 = 0$) ergibt

$$-\ddot{M}_2 = \dot{M}_2 \frac{1}{H_p} (\dot{R}_{2,R} - \dot{R}_2) = \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_p} \left(\frac{d \ln R_{2,R}}{dt} - \frac{d \ln R_2}{dt} \right),$$

wobei $R_{2,R} - R_2 \approx \text{wenige } H_p \rightarrow R_2 \approx R_{2,R}$ bis auf wenige 10^{-4}

Benützen jetzt (wie früher)

$$\frac{d \ln R_{2,R}}{dt} = \left(\frac{\partial \ln R_{2,R}}{\partial \ln M_2} \right) \frac{d \ln M_2}{dt} + \left(\frac{\partial \ln R_{2,R}}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} = \xi_{R,2} \frac{\dot{M}_2}{M_2} + 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0}$$

$$\frac{d \ln R_2}{dt} = \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial \ln M_2} \right)_s \frac{d \ln M_2}{dt} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} = \xi_{2,s} \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \underbrace{\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0}}_{\text{therm. Relaxation}}$$

Damit folgt :

$$\underline{\underline{\dot{M}_2 = \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_p} \left\{ (\xi_{2,s} - \xi_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right\}}} \quad (6)$$

Spezialfall : Stationärer Massentransfer , d.h. $\ddot{M}_2 = 0$

$$\rightarrow \underline{\underline{-\dot{M}_2 = \frac{M_2}{\xi_{2,s} - \xi_{R,2}} \left\{ \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right\}}} \quad (7)$$

- Erhalten das bereits bekannte Resultat ($\Leftrightarrow \dot{R}_2 = \dot{R}_{2,R}$)
- **Wichtig**: Vor der geschweiften Klammer in Gl. (6) steht ein Faktor $R_2/H_p \approx 10^4 \rightarrow$ Je schärfer der Sternrand, d.h. je grösser R_2/H_p desto empfindlicher reagiert das System (\dot{M}_2) auf Abweichungen von $\{ \} \neq 0$
- Wollen jetzt Gl. (6) auf einige bereits bekannte Probleme anwenden

3.1 Adiabatische Stabilität gegen Massentransfer

a) Stabilitätskriterium

Betrachten dazu ein System in einer Phase wo $\ddot{M}_2 = 0$ (stationärer Massentransfer). $\rightarrow \dot{M}_2 = (\dot{M}_2)_{\ddot{M}_2=0}$ ist durch Gl. (7) gegeben.

► Nehmen an, \exists plötzliche Störung des Massentransfers $\delta \dot{M}_2$ in \dot{M}_2 , so dass $\dot{M}_2 = (\dot{M}_2)_{\ddot{M}_2=0} + \delta \dot{M}_2$. \rightarrow Vorzeichen von \ddot{M}_2 ?

$$\begin{aligned} \ddot{M}_2 &= \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_P} \left\{ (\xi_{2,S} - \xi_{R,2}) \frac{(\dot{M}_2)_{\ddot{M}_2=0} + \delta \dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right\} \\ &= \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_P} \left\{ (\xi_{2,S} - \xi_{R,2}) \frac{(\dot{M}_2)_{\ddot{M}_2=0}}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right\} + \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_P} (\xi_{2,S} - \xi_{R,2}) \frac{\delta \dot{M}_2}{M_2} \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{= 0 \text{ nach Voraussetzung}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\ddot{M}_2 = \delta \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_P} \frac{\dot{M}_2}{M_2} (\xi_{2,S} - \xi_{R,2})}}$$

Stabilität : plötzliche Zunahme von $-\dot{M}_2 \hat{=} \delta \dot{M}_2 < 0$

\rightarrow Stabilität wenn $\dot{M}_2 = (\dot{M}_2)_{\ddot{M}_2=0} + \delta \dot{M}_2 \rightarrow (\dot{M}_2)_{\ddot{M}_2=0}$
d.h. wenn $\ddot{M}_2 > 0$

Da $\delta \dot{M}_2 < 0$ & $\dot{M}_2 < 0 \rightarrow \underline{\underline{\xi_{2,S} - \xi_{R,2} > 0}}$ für Stabilität

$\xi_{2,S} - \xi_{R,2} < 0$ für Instabilität

► Erhalten das bereits bekannte Stabilitätskriterium

b) Zeitskala der adiabatischen Instabilität

$$\underline{\underline{\tau_{\dot{M}_2} = \frac{\delta \dot{M}_2}{\ddot{M}_2} = \frac{H_P}{R_2} \frac{M_2}{\dot{M}_2} (\xi_{2,S} - \xi_{R,2})^{-1} = \frac{H_P}{R_2} \tau_{M_2} (\xi_{2,S} - \xi_{R,2})^{-1}} \quad (8)$$

$\tau_{\dot{M}_2}$: Zeitskala für das Anwachsen (Abklingen) der Störung

Abschätzung von $\tau_{\dot{M}_2}$:

Wissen, dass $\tau_{M_2} = -\frac{M_2}{\dot{M}_2} = \frac{M_2}{\dot{M}_0} e^{\frac{R_{2,R}-R_2}{H_P}} \approx 10^8 a \left(\frac{M_2}{M_\odot}\right) e^{\frac{R_{2,R}-R_2}{H_P}}$

$$H_P/R_2 \approx 10^{-4}$$

$$\rightarrow \tau_{\dot{M}_2} = \frac{H_P}{R_2} \frac{M_2}{\dot{M}_0} e^{\frac{R_{2,R}-R_2}{H_P}} (\xi_{2,S} - \xi_{R,2})^{-1} \approx 10^4 a \left(\frac{M_2}{M_\odot}\right) e^{\frac{R_{2,R}-R_2}{H_P}} (\xi_{2,S} - \xi_{R,2})^{-1}$$

- Da $\xi_{2,S} - \xi_{R,2} \approx 0(1)$, folgt, dass $\tau_{\dot{M}_2}$ überraschend lang ist:

$$\underline{\tau_{\dot{M}_2} \gtrsim 10^4 a \left(\frac{M_2}{M_\odot}\right)}$$

- sehr schnelles Anwachsen der Massentransferrate ist nur dann möglich, wenn

entweder $(\xi_{2,S} - \xi_{R,2}) \ll -1$, d.h. $\xi_{2,S} \ll -1$

oder $|\tau_{M_2}| \ll \frac{M_2}{\dot{M}_0}$, d.h. R_2 merklich grösser als $R_{2,R}$

- Wenn der Sekundärstern auf der HR: $\tau_{M_2} \approx$ einige 10^8 – einige $10^9 a$

$$\rightarrow \underline{\tau_{\dot{M}_2} \approx (\text{einige } 10^4 - \text{einige } 10^5 a) (\xi_{2,S} - \xi_{R,2})^{-1}}$$

3.2. Einsetzen von Massentransfer

- immer am Anfang der Entwicklung als halbgetrenntes System, z. B. bei CVs auch nach dem Durchlaufen der Periodenlücke.

Literatur: D'Antona, F., Mazzitelli, I., Ritter, H.: 1989, *Astron. Astrophys.* 225, 39

D'Antona, F., Mazzitelli, I., Ritter, H.: 1990, in: *Accretion - Powered Compact Binaries*, C.W. Mauche (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, p. 427

- Voraussetzung: vor dem Einsetzen des Massentransfers sei der Sekundärstern im thermischen Gleichgewicht:

$$\rightarrow t = 0 : \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} = 0$$

Da im allg.

$$\ddot{M}_2 = \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_P} \left\{ (\xi_{2,s} - \xi_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right\}, \quad (6)$$

kann das Einsetzen von Massentransfer in 4 Phasen eingeteilt werden:

1. Phase : exponentielles Anwachsen von $(-\dot{M}_2)$:

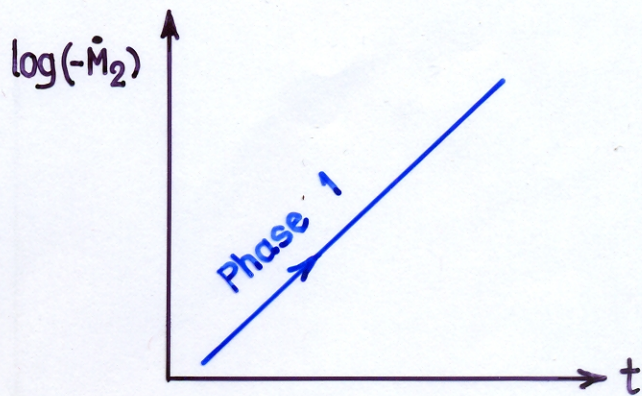
Zu Anfang, wenn $\Delta R = R_{2,R} - R_2$ noch hinreichend gross ist (einige H_P), ist $-\dot{M}_2$ noch so klein, dass

$$\left| (\xi_{2,s} - \xi_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} \right| \ll \left| 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right|.$$

Da nach Vor. zu Beginn $\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} = 0$, folgt:

$$\tau_{\dot{M}_2} = \frac{\dot{M}_2}{\ddot{M}_2} = -\frac{1}{2} \frac{H_P}{R_2} \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0}^{-1} = \frac{1}{2} \frac{H_P}{R_2} \tau_J$$

$-\dot{M}_2$ wächst exponentiell mit der Zeitskala $\tau_{\dot{M}_2} \approx 5 \cdot 10^{-5} \tau_J$.



2. Phase : stationärer adiabatischer Massenverlust

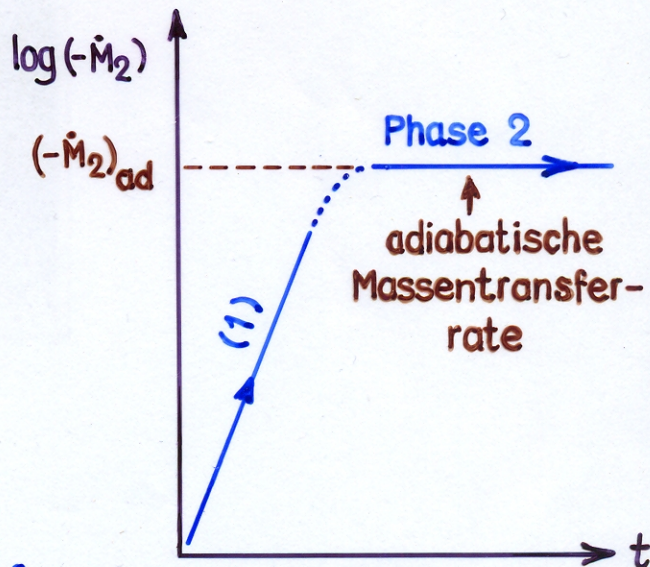
Mit wachsendem $(-\dot{M}_2)$ wird der Term $(\xi_{2,s} - \xi_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2}$ in Gl. (6) immer wichtiger.

Wenn weiter $\tau_{\dot{M}_2}$ genügend kurz ist, d.h.

$$\left| \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0}^{-1} \right| \ll \left| \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0}^{-1} \right|,$$

so wird der Massentransfer erstmals stationär, d.h. $\ddot{M}_2 = 0$, wenn

$$\left[\dot{M}_2 (\ddot{M}_2=0) \right]_{ad} = \frac{M_2}{\xi_{2,s} - \xi_{R,2}} \cdot 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0}$$



3. Phase: instationärer Massentransfer mit thermischer Relaxation

Die adiabatische Massenverlustphase wird früher oder später durch die thermische Relaxation des Sekundärsterns beendet, d.h. wenn

$$\left| \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right| \approx \left| (\xi_{2,S} - \xi_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} \right|, \quad \left| \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right|.$$

► Vorzeichen von $\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0}$:

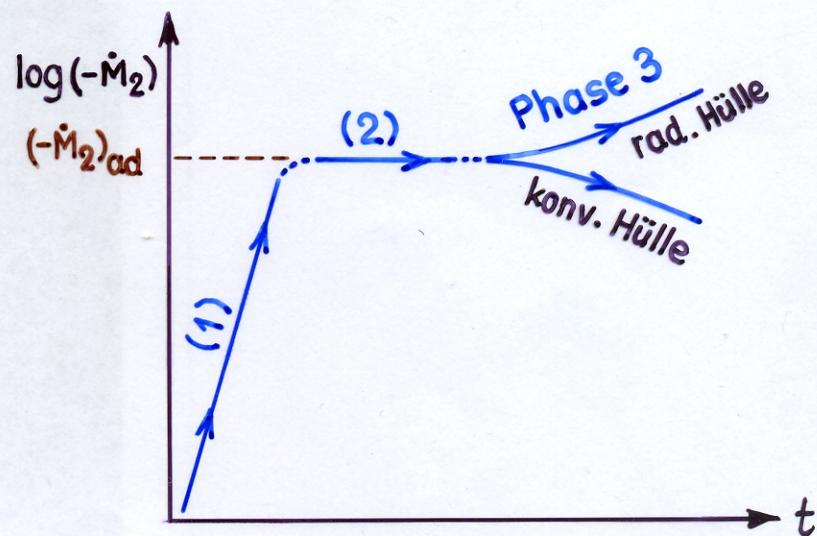
- Stern mit konvektiver Hülle : $\xi_S < 0$, $\rightarrow \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} < 0$

- Stern mit radiativer Hülle : $\xi_S > 0$, $\rightarrow \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} > 0$

→ mit thermischer Relaxation

$(-\dot{M}_2) \downarrow$ wenn die Hülle des Sterns konvektiv ist.

$(-\dot{M}_2) \uparrow$ wenn die Hülle des Sterns radiativ ist



4. Phase: quasistationärer Massenverlust mit thermischer Relaxation

Der Massentransfer wird erst wieder \sim stationär (quasistationär), wenn $\ddot{M}_2 = 0$, d.h. wenn

$$\begin{aligned} [\dot{M}_2(\ddot{M}_2=0)]_{th} &= \frac{M_2}{\xi_{2,S} - \xi_{R,2}} \left[2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \right] \\ &= \frac{M_2}{\xi_{2,eff} - \xi_{R,2}} 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \end{aligned}$$

► Stern mit konvektiver Hülle : $\xi_{2,S} \lesssim 0$, $\xi_{2,eff} > \xi_{2,S}$

Stern mit radiativer Hülle : $\xi_{2,S} > 0$, $\xi_{2,eff} < \xi_{2,S}$

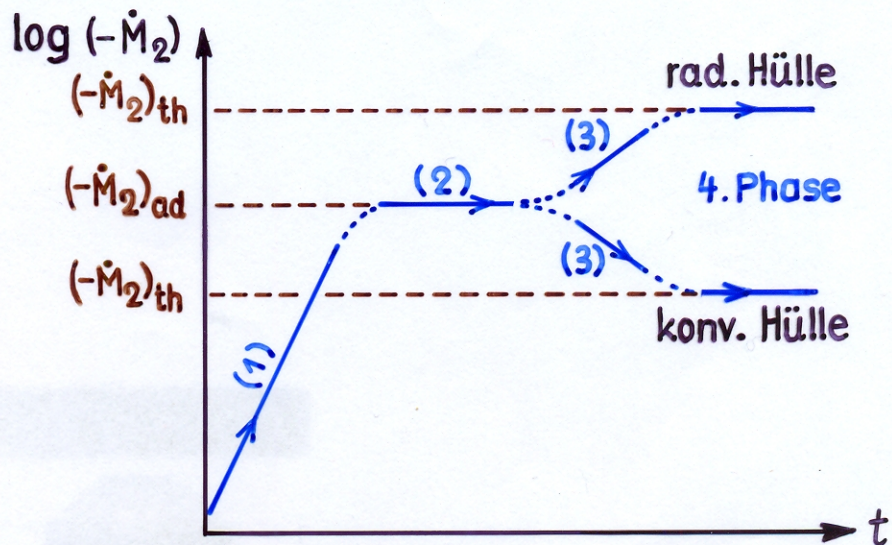
thermische Relaxation: $\zeta_{\text{eff}} = \zeta_s \rightarrow \zeta_{\text{eff}} \approx \zeta_e$

$\rightarrow \underline{(-\dot{M}_2)_{\text{th}} < (-\dot{M}_2)_{\text{ad}}}$,

wenn Hülle konvektiv

$\underline{(-\dot{M}_2)_{\text{th}} > (-\dot{M}_2)_{\text{ad}}}$,

wenn Hülle radiativ



- N.B. Die Phase 2 (adiabatischer Massenverlust) braucht nicht zu existieren. Wenn nämlich in Phase 1 $\tau_{\dot{M}_2} \gtrsim |(\partial \ln R_2 / \partial t)_{\dot{M}_2=0}^{-1}|$, so geht Phase 1 direkt in Phase 3 über. $(-\dot{M}_2)$ wird dann nicht bei $(-\dot{M}_2)_{\text{ad}}$ stationär. Bei Sternen mit einer konvektiven Hülle wird $(-\dot{M}_2)_{\text{ad}}$ nicht erreicht.

(Für Ergebnisse numerischer Rechnungen \rightarrow 3.4)

- Anwendung auf die von Taam & Mc Dermott (1987) vorgeschlagene, adiabatisch Instabilität beim Einsetzen des Massentransfers. Idee: transferierte Materie gelangt mit Drehimpuls in eine Akkretionsscheibe. \rightarrow Wenn der Drehimpuls lange genug in der Scheibe bleibt \rightarrow Massentransfer ist adiabatisch instabil! Sei τ_{visk} die viskose Zeitskala der Scheibe. \rightarrow Bedingung für das Auftreten dieser Instabilität: $\tau_{\dot{M}_2} \ll \tau_{\text{visk}}$.

Hier: Phase 1 $\rightarrow \tau_{\dot{M}_2} \approx \frac{1}{2} \frac{H_P}{R_2} \tau_J \approx 5 \cdot 10^{-5} \tau_J \gtrsim 10^4 \text{a}$

$\tau_{\text{visk}} ?$: theoretisch derzeit nicht bestimmbar, da die genaue Ursache für die Viskosität unbekannt ist.

empirisch aus Beobachtungen (Zwergnova-Zyklus) : $\tau_{\text{visk}} \approx \text{Tage - Wochen} \lesssim \text{Jahr}$

→ Bedingung für das Auftreten dieser Instabilität ist nicht erfüllt!

▶ Beim Einsetzen des Massentransfers von einem Weissen Zwerg ($H_p/R \approx 10^{-6}$) und $\dot{J} = \dot{J}_{GR}$ ($\tau_J \approx 10^4 a$) kann diese Instabilität auftreten (→ Verbunt, F., Rappoport, S.: 1988, *Astrophys. J.* 332, 193)

3.3 Abschalten von Massentransfer durch schnelle Reduktion der Drehimpulsverlustrate

▶ Relevanz: Modell der diskontinuierlichen magnetischen Bremsung für die Periodenlücke bei Kataklysmischen Doppelsternen.

▶ Ausgangspunkt: stationärer Massentransfer, angetrieben durch $\dot{J} = \dot{J}_{GR} + \dot{J}_{MB} < 0$ (oberhalb der Lücke)

$$\rightarrow (-\dot{M}_2)_{\ddot{M}_2=0} = \frac{M_2}{\xi_{2,S} - \xi_{R,2}} \left\{ \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \frac{\dot{J}_{GR} + \dot{J}_{MB}}{J} \right\}$$

▶ Rasche Änderung von $\dot{J} = \dot{J}_{GR} + \dot{J}_{MB}$ auf $\dot{J} = \dot{J}_{GR}$ bewirkt

$$\ddot{M}_2 = \dot{M}_2 \frac{R_2}{H_p} \left\{ (\xi_{2,S} - \xi_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \frac{\dot{J}_{GR}}{J} \right\},$$

wobei 1) $\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2}$ praktisch unverändert, da Änderung nur mit τ_{KH}

2) $\dot{M}_2 \approx (\dot{M}_2)_{\dot{M}_2=0}$, da sich $R_{2,R} - R_2$ unmittelbar nach der Reduktion von $|\dot{J}|$ noch gleich ist wie davor

$$\rightarrow \underline{\underline{\ddot{M}_2 = 2 \frac{R_2}{H_p} \frac{\dot{J}_{MB}}{J} (\dot{M}_2 (\dot{J}_{GR} + \dot{J}_{MB}))_{\dot{M}_2=0}}} \iff \underline{\underline{\tau_{\dot{M}_2} = -\frac{1}{2} \frac{H_p}{R_2} \tau_{MB}}}$$

▶ → Massentransferrate fällt (zuerst) exponentiell mit der Zeitskala $\tau_{\dot{M}_2} \approx 5 \cdot 10^{-5} |\tau_{MB}| \approx 10^4 a \ll \tau_{KH} \approx 10^8 a$ ab!