

## 7. Massenverlust von Polytropen

- ▶ Ziel: Bestimmung von  $\zeta_{\text{eff}}$  für beliebige Massenverlustraten
- ▶ Polytrope: hydrostatisch geschichteter Stern, in dem eine polytrope Beziehung zwischen Druck  $P$  und Dichte  $\rho$  von der Form

$$P = K \rho^{1+1/n}, \quad \begin{array}{l} K: \text{Polytropenkonstante} \\ n: \text{Polytropenindex} \end{array} \quad (1)$$

erfüllt ist.

Polytropentheorie liefert eine Masse-Radius-Beziehung:

$$R = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3-n}} \left[\frac{K(n+1)}{G}\right]^{\frac{n}{3-n}} \left[-x_0^{\frac{n+1}{n-1}} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}\right]^{\frac{n-1}{3-n}} M^{\frac{1-n}{3-n}}. \quad (2)$$

$y(x)$  = Lane-Emden-Funktion;  $x_0$  = Nullstelle von  $y(x)$ .

Ableitung von (2) nach  $M$  (bei festem  $n$ ) ergibt:

$$\zeta_{\text{eff}} = \frac{d \ln R}{d \ln M} = \left(\frac{\partial \ln R}{\partial \ln M}\right)_K + \left(\frac{\partial \ln R}{\partial \ln K}\right)_M \frac{d \ln K}{dt} \left(\frac{d \ln M}{dt}\right)^{-1}, \quad (3)$$

wobei

$$\left(\frac{\partial \ln R}{\partial \ln M}\right)_K = \frac{1-n}{3-n} = \zeta_{\text{ad}}, \quad (4)$$

da  $K = \text{const.} \Leftrightarrow$  adiabatische Änderung ( $\rightarrow$  weiter unten), und

$$\left(\frac{\partial \ln R}{\partial \ln K}\right)_M = \frac{n}{3-n}. \quad (5)$$

Beziehung zwischen  $K$  und der Adiabatenkonstanten  $K_\alpha$

Mit der Adiabatenbeziehung

$$P = K_\alpha T^{1/\nabla_\alpha}, \quad K_\alpha = \text{Adiabatenkonstante, und} \quad (6)$$

$$\nabla_\alpha = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{K_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S = \text{adiabatischer Temperaturgradient,} \quad (7)$$

und der Zustandsgleichung für ein ideales Gas

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T, \quad \begin{array}{l} R = \text{Gaskonstante} \\ \mu = \text{mittleres Molekulargewicht} \end{array} \quad (8)$$

und Gl. (1) wird:

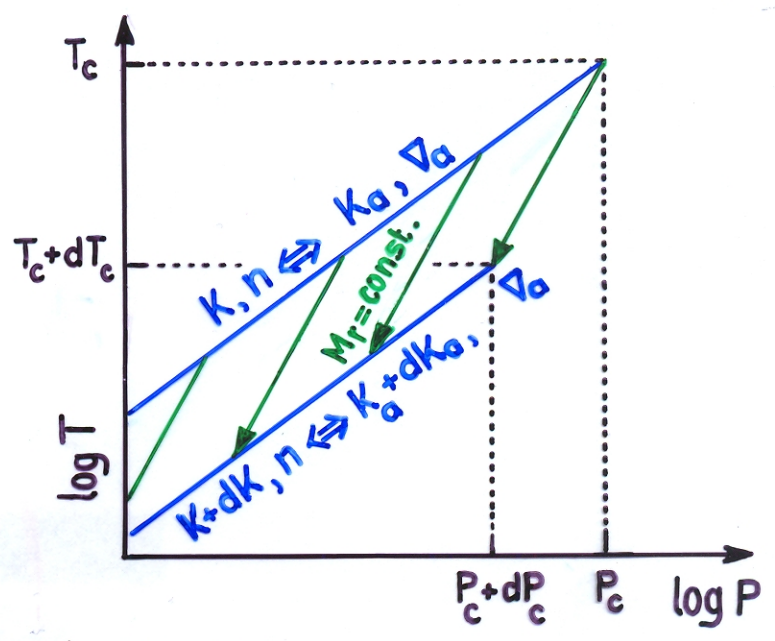
$$K_a = \left(\frac{\mu}{R}\right)^{n+1} K^{-n} \quad (9)$$

und

$$\frac{d \ln K}{dt} = -\frac{1}{n} \frac{d \ln K_a}{dt} \quad (10)$$

► Massenverlust:

→ Änderung von K bzw.  $K_a$  bei festem n bzw.  $\nabla_a$ .



► Änderung von  $K_a \rightarrow \exists$  gravo-thermische Energieerzeugung:

$$\epsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t} = -c_p T \left[ \frac{\dot{T}}{T} - \nabla_a \frac{\dot{P}}{P} \right] = c_p T \nabla_a \frac{d \ln K_a}{dt} \quad (11)$$

Da

$$\nabla_a = \frac{1}{n+1} = \frac{\gamma-1}{\gamma}, \quad \text{mit } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (12)$$

wird:

$$\frac{d \ln K_a}{dt} = \frac{\epsilon_g}{c_p T \nabla_a} = (n+1) \frac{\epsilon_g}{c_p T} = (n+1) \frac{\int_0^M \epsilon_g dM_r}{\frac{c_p}{c_v} \int_0^M c_v T dM_r} = n \frac{L_g}{E_{th}}, \quad (13)$$

wobei:

$$L_g = \int_0^M \epsilon_g dM_r = \text{gravo-thermische Leuchtkraft} \quad (14)$$

und

$$E_{th} = \int_0^M c_v T dM_r = \text{innere Energie des Sterns} \quad (15)$$

► Verwenden nun den Virial-Satz:

$$E_{th} = -\frac{1}{3(\gamma-1)} E_G, \quad (16)$$

wobei

$$E_G = -\int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r = \text{gravitative Bindungsenergie} \quad (17)$$

und für Polytropen

$$E_G = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (18)$$

Mit (13) - (18) wird:

$$\frac{d \ln K_a}{dt} = n \frac{L_g}{E_{th}} = -3 \frac{L_g}{E_a} = (5-n) \frac{RL_g}{GM^2} \quad (19)$$

und

$$\frac{d \ln K}{dt} = -\frac{5-n}{n} \frac{RL_g}{GM^2}. \quad (20)$$

Gl. (3) - (5) und (20) ergeben dann:

$$\underline{\underline{\frac{d \ln R}{d \ln M} = \frac{1-n}{3-n} - \frac{5-n}{3-n} \frac{RL_g}{GM^2} \left(\frac{d \ln M}{dt}\right)^{-1}}} \quad (21)$$

Mit den Definitionen

$$\blacktriangleright \tau_M = -\frac{dt}{d \ln M} = \text{Zeitskala des Massenverlusts} \quad (22)$$

und

$$\blacktriangleright \tau_{KH} = \frac{GM^2}{RL} = \text{Kelvin-Helmholtz-Zeit} \quad (23)$$

wird:

$$\underline{\underline{\frac{d \ln R}{d \ln M} = \zeta_{\text{eff}} = \frac{1-n}{3-n} + \frac{5-n}{3-n} \frac{\tau_M}{\tau_{KH}} \frac{L_g}{L}}}, \quad (24)$$

oder:

$$\underline{\underline{\zeta_s = \frac{1-n}{3-n} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \ln R}{\partial t}\right)_{th} = -\frac{5-n}{3-n} \frac{RL_g}{GM^2}}} \quad (25)$$

**► Spezialfall: Vollkonvektive Sterne**

Hier ist  $n = 3/2$  ( $\gamma = 5/3$ ,  $\nabla_a = 2/5$ ). Damit wird aus Gl. (24)

$$\underline{\underline{\zeta_{\text{eff}} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3} \frac{\tau_M}{\tau_{KH}} \frac{L_g}{L}}}. \quad (26)$$

► Da im Grenzfall  $\dot{M} \rightarrow 0$   $\zeta_{\text{eff}} = \zeta_e$ , folgt aus (24)

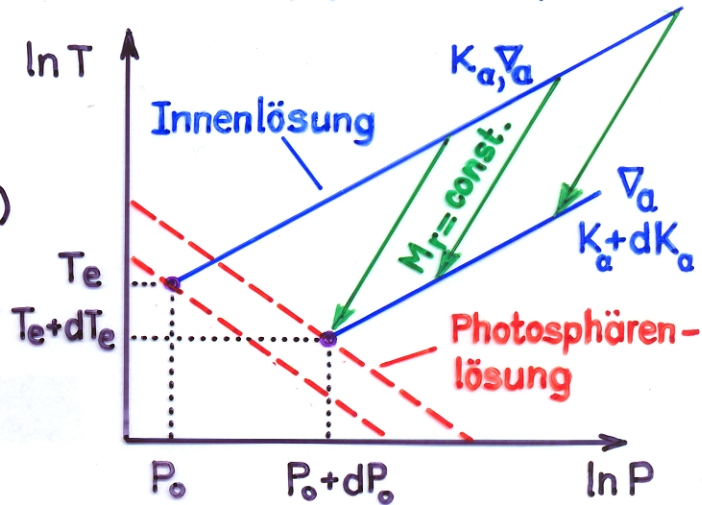
$$\lim_{\dot{M} \rightarrow 0} L_g = -(\zeta_e - \zeta_s) \frac{3-n}{5-n} \frac{GM\dot{M}}{R}. \quad (27)$$

### 8. Massenverlust von konvektiven Hüllen

(nach D. Lauterborn und A. Weigert : 1972, Astron. Astrophys. 18, 294)

Vereinfachung: In der Hülle sei  
 $\nabla = \nabla_a = \text{const.}$  bis  
 zur Photosphäre ( $P_0, T_e$ )

→  $P = K_a T^{1/\nabla_a}$  bis ( $P_0, T_e$ )



#### Die Photosphärenlösung

Bei geringer optischer Tiefe  $\tau \lesssim 1$ :

Konvektion ist ineffektiv → Energietransport durch Strahlung,  $\nabla = \nabla_r$

→ nehmen radiative Photosphäre für  $\tau \leq 2/3$

$$\left. \begin{aligned} \text{Hydrostat. Gleichgewicht : } \frac{dP}{dr} &= -g \varrho \\ \text{Definition der opt. Tiefe : } d\tau &= -\kappa \varrho dr \end{aligned} \right\} \frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}$$

Ansatz für die Opazität :  $\kappa = \kappa_0 P^a T^b$

→  $\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa_0} P^{-a} T^{-b} \iff \underline{P^a dP = \frac{g}{\kappa_0} T^{-b} d\tau}$

► Benützen für die  $T(\tau)$ -Relation die Eddington-Approximation für die graue Atmosphäre :  $T(\tau) = \frac{3}{4} T_e^4 (\tau + 2/3)$  (1)

→  $P^a dP = \frac{g}{\kappa_0} \left(\frac{3}{4}\right)^{-b/4} T_e^{-b} (\tau + 2/3)^{-b/4} d\tau$

→  $\int_0^{P_0} P^a dP = \frac{P_0^{a+1}}{a+1} = \frac{g}{\kappa_0} \left(\frac{3}{4}\right)^{-b/4} T_e^{-b} \int_0^{2/3} (\tau + 2/3)^{-b/4} d\tau$   
 $= \frac{16g}{3(4-b)\kappa_0} T_e^{-b} \left\{ 1 - 2^{\frac{b-4}{4}} \right\}$

►  $P_0 = \left\{ \frac{16(a+1)g}{3(4-b)\kappa_0} \left[ 1 - 2^{\frac{b-4}{4}} \right] \right\}^{\frac{1}{a+1}} \left( \frac{M}{R^2} T_e^{-b} \right)^{\frac{1}{a+1}} = \text{const.} \left( \frac{M}{R^2} T_e^{-b} \right)^{\frac{1}{a+1}}$  (2)

► Massenverlust ändert  $K_a$ :  $K_a \rightarrow K_a + dK_a$   
 ( $dK_a = 0$  nur bei adiabatischem Massenverlust)

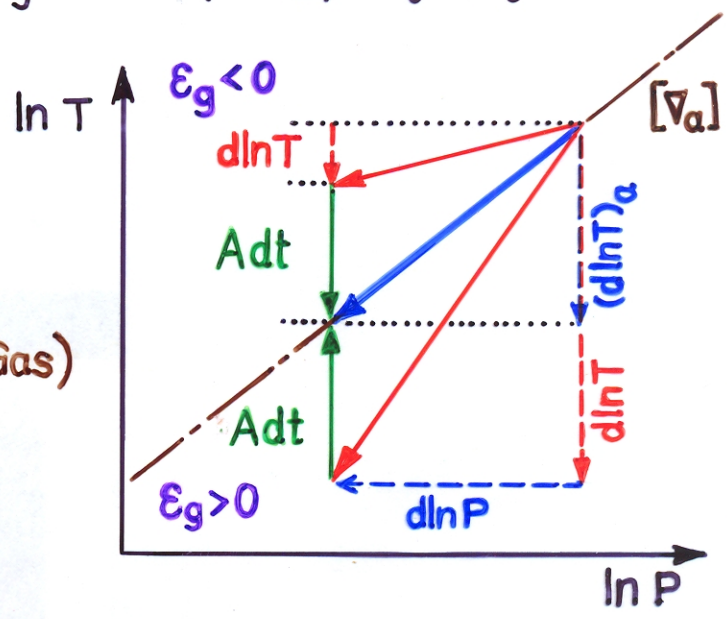
→ dadurch neue Photosphärenlösung mit  $P(\tau=2/3) = P_0 + dP_0$   
 und  $T(\tau=2/3) = T_e + dT_e$

► Änderung von  $K_a \rightarrow \epsilon_g \neq 0$

$$\epsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t} = -c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}$$

mit  $\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P$  (=1 für ideales Gas)

$$\nabla = \nabla_a \rightarrow \epsilon_g = 0 \rightarrow \nabla_a = \frac{P \delta}{c_p \rho T}$$



Massenverlust:  $M \rightarrow M + dM \rightarrow P(M_r) \rightarrow P(M_r) + dP(M_r)$ ,  $T(M_r) \rightarrow T(M_r) + dT(M_r)$   
 $K_a \rightarrow K_a + dK_a$

$$\epsilon_g = c_p T \left\{ \left(\frac{d \ln T}{dt}\right)_a - \frac{d \ln T}{dt} \right\} = c_p T A = c_p T \nabla_a \frac{d \ln K_a}{dt}, \text{ da}$$

$$d \ln K_a = d \ln P - \frac{1}{\nabla_a} d \ln T = \frac{1}{\nabla_a} \left[ (d \ln T)_a - d \ln T \right]$$

$$\rightarrow L_g = \int_{M_{conv}} \epsilon_g dM_r = \int_{M_{conv}} c_p T \nabla_a \frac{d \ln K_a}{dt} dM_r = \nabla_a \frac{d \ln K_a}{dt} \int_{M_{conv}} c_p T dM_r$$

$$= A \int_{M_{conv}} \frac{c_p}{c_v} c_v T dM_r = A \frac{c_p}{c_v} \int_{M_{conv}} c_v T dM_r = A \frac{c_p}{c_v} E_{th} (M_{conv})$$

thermische Energie der Konvektionszone

► Def.: thermische Zeitskala  $\tau_{th} = \frac{E_{th}}{L_g} = \frac{c_v}{c_p} A^{-1} = \frac{c_v}{c_p} \frac{1}{\nabla_a} \frac{dt}{d \ln K_a}$

→ Zeitskala für die Änderung von  $K_a$ :  $\tau_{K_a} = \frac{dt}{d \ln K_a} = \nabla_a \frac{c_p}{c_v} \tau_{th}$

Für die adiabatische Innenlösung gilt demnach am Photosphärenpunkt

$$\left(\frac{d \ln T_e}{dt}\right)_a - \left(\frac{d \ln T_e}{dt}\right) = \nabla_a \frac{\dot{P}_0}{P_0} - \frac{\dot{T}_e}{T_e} = A = \frac{c_v}{c_p} \tau_{th}^{-1}$$

► Def.:  $\varphi = \frac{d \ln T_e}{d \ln M} = \frac{\dot{T}_e / T_e}{\dot{M} / M} = -\frac{\dot{T}_e}{T_e} \tau_M$ , wobei  $\tau_M = -\frac{M}{\dot{M}}$

→  $\frac{\dot{P}_o}{P_o} = \frac{1}{\nabla_a} \left\{ \frac{c_v}{c_p} \tau_{th}^{-1} + \frac{\dot{T}_e}{T_e} \right\} = \frac{1}{\nabla_a} \left\{ \frac{c_v}{c_p} \frac{1}{\tau_{th}} - \frac{\varphi}{\tau_M} \right\}$  (1) Bedingung aus der Innenlösung

Durch Ableiten der Photosphärenlösung folgt

(a+1)  $\frac{\dot{P}_o}{P_o} = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{L}}{L} + (4-b) \frac{\dot{T}_e}{T_e} = -\frac{1}{\tau_M} - \frac{\dot{L}}{L} - (4-b) \frac{\varphi}{\tau_M}$  (2) } Bedingungen aus der Photosphärenlösung

$= \frac{\dot{M}}{M} - 2 \frac{\dot{R}}{R} - b \frac{\dot{T}_e}{T_e} = -\frac{1}{\tau_M} - 2 \frac{\dot{R}}{R} + b \frac{\varphi}{\tau_M}$  (3) }

Elimination von  $\dot{P}_o/P_o$  aus (1) und (2) bzw. aus (1) und (3) ergibt:

►  $\frac{d \log L}{d \log M} = 1 + \frac{c_v}{c_p} \frac{a+1}{\nabla_a} \frac{\tau_M}{\tau_{th}} - \left( \frac{a+1}{\nabla_a} + (b-4) \right) \varphi$  }  $\frac{d \log L}{d \log M}$  und  $\frac{d \log R}{d \log M}$  hängen von  $\frac{\tau_{th}}{\tau_M}$  ab!

►  $\frac{d \log R}{d \log M} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{c_v}{c_p} \frac{a+1}{\nabla_a} \frac{\tau_M}{\tau_{th}} - \left( \frac{a+1}{\nabla_a} + b \right) \varphi \right]$  }

Werte für a, b und  $\varphi$  (aus numerischen Rechnungen):

$a \approx 0.5$ ,  $b \approx 5.5$  für die  $H^-$  Opazität

$\varphi \approx 0.11 \dots 0.17$

► Wichtig für Doppelsternentwicklung:

$\frac{d \log R}{d \log M} = \left( \frac{\partial \log R}{\partial \log M} \right)_a + \frac{c_v}{c_p} \frac{a+1}{2 \nabla_a} \frac{\tau_M}{\tau_{th}} = \zeta_s + \frac{c_v}{c_p} \frac{a+1}{2 \nabla_a} \frac{\tau_M}{\tau_{th}}$

→ Je schneller der Massenverlust, d.h. je kleiner  $\tau_M / \tau_{th}$ , desto kleiner der Masse-Radius-Exponent!

Grenzfall: Adiabatischer Massenverlust, d.h.  $\tau_M / \tau_{th} \rightarrow 0$ .  
Wissen bereits, dass  $\zeta_s \approx -1/3$ , wenn  $\nabla_a = 2/5$  und  $M_{conv} \approx M$ .

## 9. Entwicklung mit Massenverlust: Ergebnisse numerischer Rechnungen

a) Whyte, C., Eggleton, P.: 1980, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 190, 801

Massenverlust mit konstanter Zeitskala  $\tau_M$  :  $\rightarrow M(t) = M_0 e^{-t/\tau_M}$

$\rightarrow$  Entwicklung mit abnehmender Massenverlustrate  $\dot{M}(t) = -\frac{M_0}{\tau_M} e^{-t/\tau_M}$

Parameter :  $M_0 = 1M_\odot$ ,  $\tau_M = 10^6 a$ ,  $10^7 a$ ,  $10^8 a$

$M_0 = 0.5M_\odot$ ,  $\tau_M = 10^7 a$ ,  $10^8 a$

$M_0 = 0.25M_\odot$ ,  $\tau_M = 10^7 a$ ,  $10^8 a$

Ergebnis der Rechnungen ( $\rightarrow$  M-R- und M-L- Diagramm)

entspricht unseren Abschätzungen

- $M_0 = 0.25 M_\odot$  : Sehen deutlich die adiabatische Expansion mit  $\xi \approx -1/3$  zu Beginn des Massenverlusts (Stern ist vollkonvektiv,  $\rightarrow \sim$  Polytrope  $n = 3/2 \rightarrow \xi = -1/3$ ).  $\tau_M \ll \tau_{KH} \approx 9 \cdot 10^8 a$  !

► **N.B.** Am Anfang eines abrupt einsetzenden Massenverlusts reagiert der Stern immer adiabatisch, da vor dem Massenverlust  $L_g = 0$  ( $\rightarrow \tau_{th} \sim L_g^{-1} \rightarrow \infty$ ). Zeitskala zum Aufbau von  $L_g$  ist  $\sim \tau_{KH}$ .

- $M_0 = 1M_\odot$  : Starker Abfall von R für  $\tau_M = 10^6$  und  $10^7 a$  ist ebenfalls adiabatische Reaktion, aber eines Sterns mit praktisch radiativer Hülle  $\rightarrow \xi_s \gg 1$   
N.B.  $\tau_{KH} \approx 4 \cdot 10^7 a$

b) D'Antona, F., Mazzitelli, I.: 1982, Astrophys. J. 260, 722

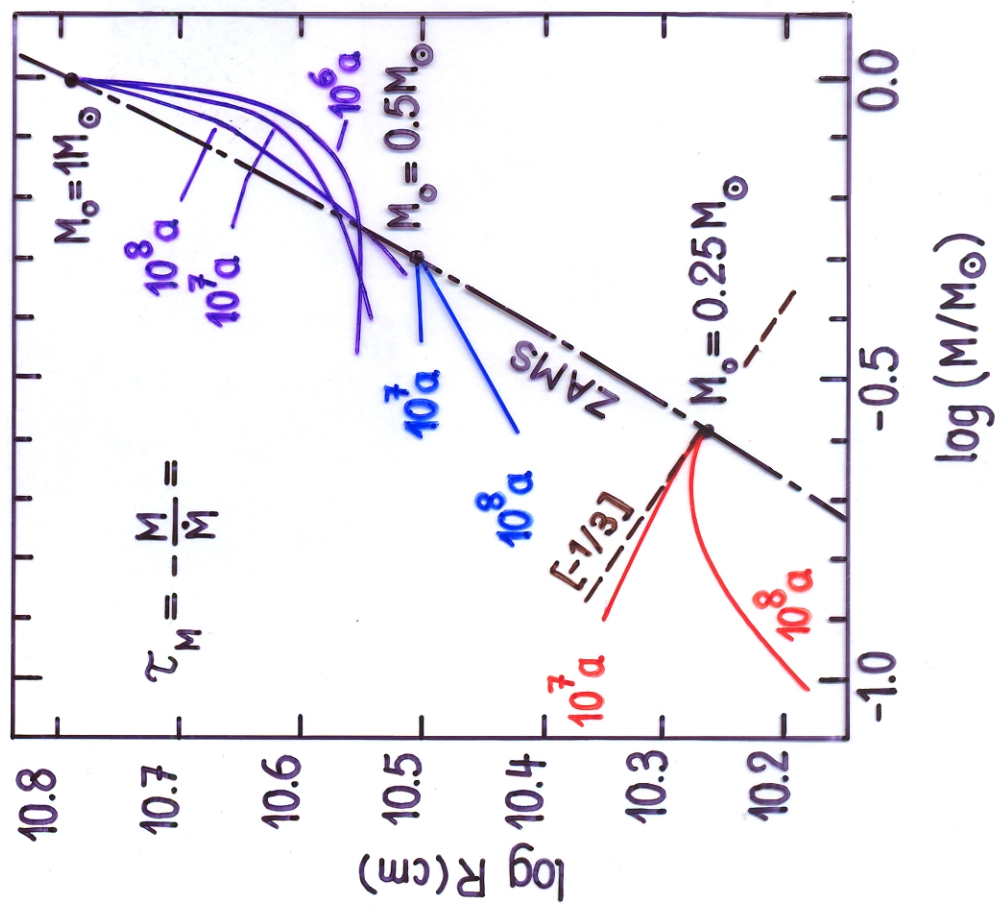
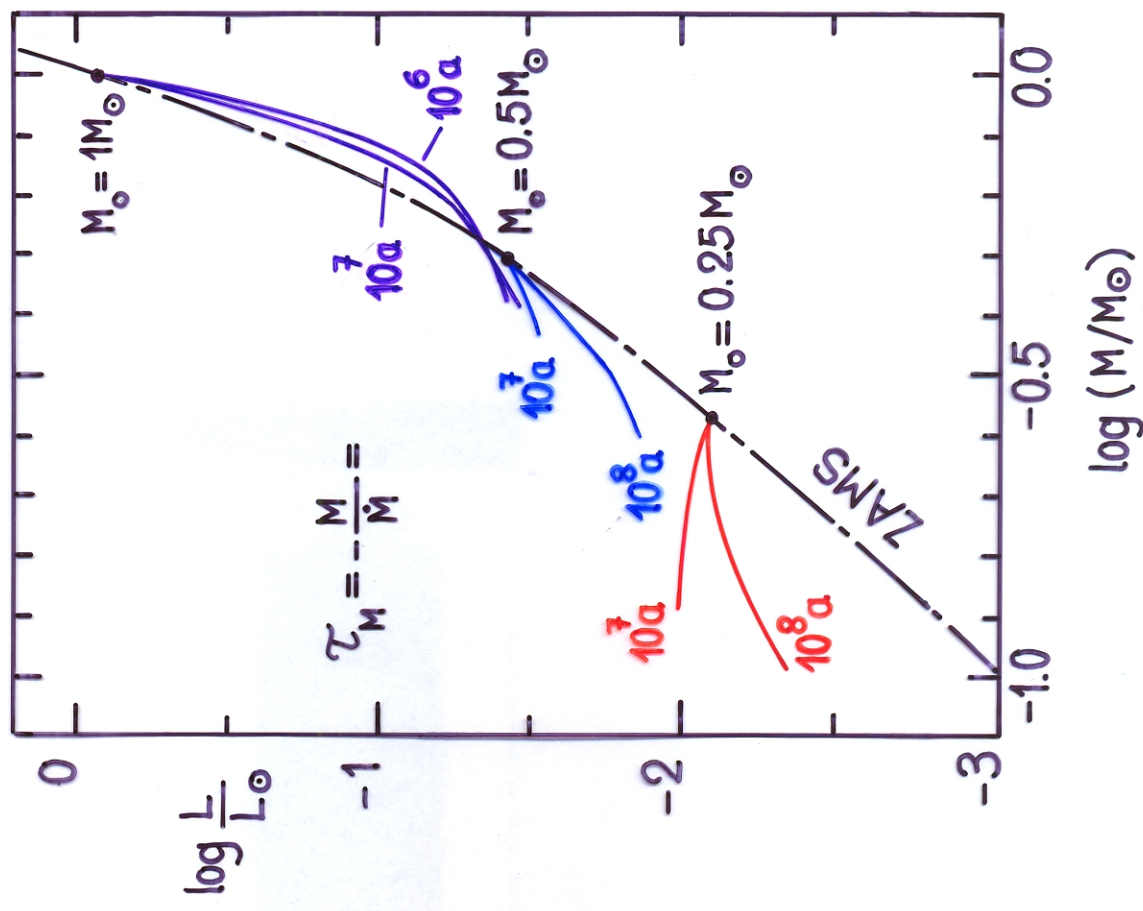
Detaillierte Entwicklungsrechnungen mit  $\dot{M} = \text{const.}$ , Berücksichtigung von  $^3\text{He}$ .

Ergebnisse ( $\rightarrow$  entspr. Figuren)

- Entwicklung im M-R-Diagramm entspricht ebenfalls unseren Erwartungen : Die M-R-Beziehungen verlaufen flacher als die ZAMS, wenn sie von dieser abweichen.

Massenverlust von massearmen Hauptreihensternen

(Whyte, C., Eggleton, P.: 1980, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 190, 801)





ENTWICKLUNG VON MASSEARMEN STERNEN MIT MASSENVERLUST

(D'Antona, F., Mazzitelli, I.: 1982, "Secular Evolution of Cataclysmic Binaries: Evolution of the Secondary and the Period Gap", Astrophys. J. 260, 722)

Entwicklung von massearmen, hauptreihennahen Sternen mit konstanter Massenverlustrate. Berücksichtigung des nuklearen <sup>3</sup>He Ungleichgewichts.

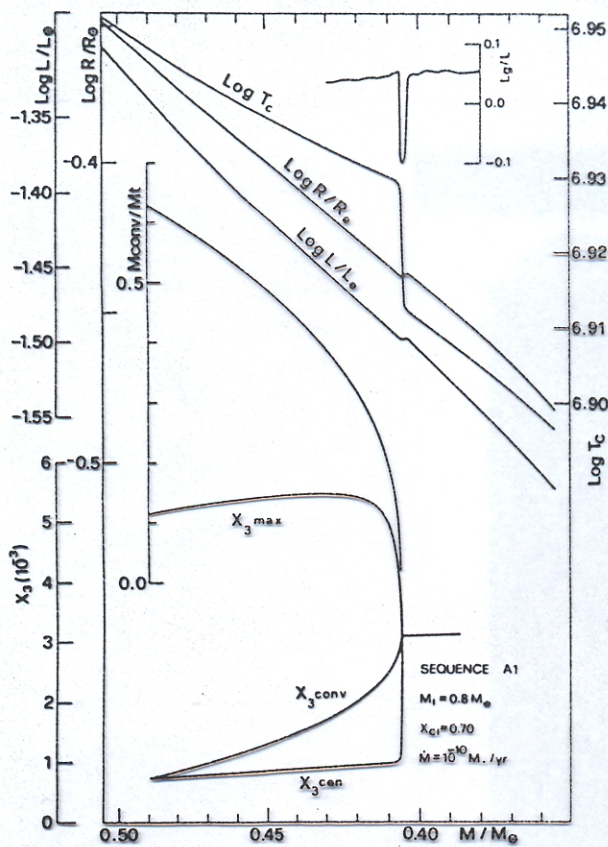


FIG. 2

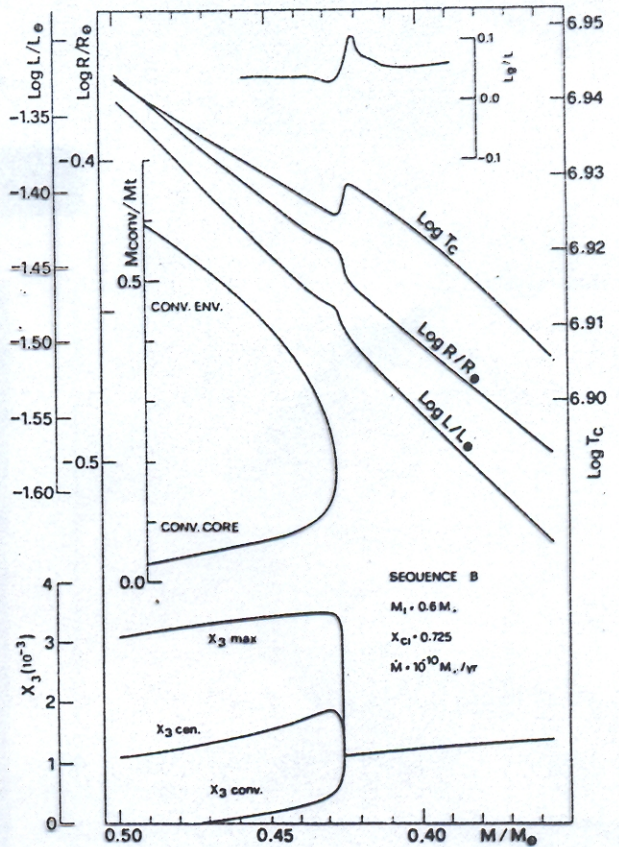


FIG. 3

FIG. 2.—The variation of physical parameters along sequence A1: central temperature  $T_c$ , radius  $\log R/R_\odot$ , luminosity  $\log L/L_\odot$ , ratio of gravitational to total luminosity ( $L_g/L$ ), and fractional mass of the convective envelope,  $M_{conv}/M_i$ . For the <sup>3</sup>He abundance by mass,  $X_3$ , we present the maximum value ( $X_3 \text{ max}$ ), the value in the external convective layers ( $X_3 \text{ conv}$ ), and the central abundance  $X_3 \text{ cen}$ . These values converge at  $M = 0.406 M_\odot$ , where total mixing occurs.

FIG. 3.—The same as Fig. 2 for sequence B. In addition, the convective envelope mass fraction (CONV ENV) and the convective core mass fraction (CONV CORE) are indicated.

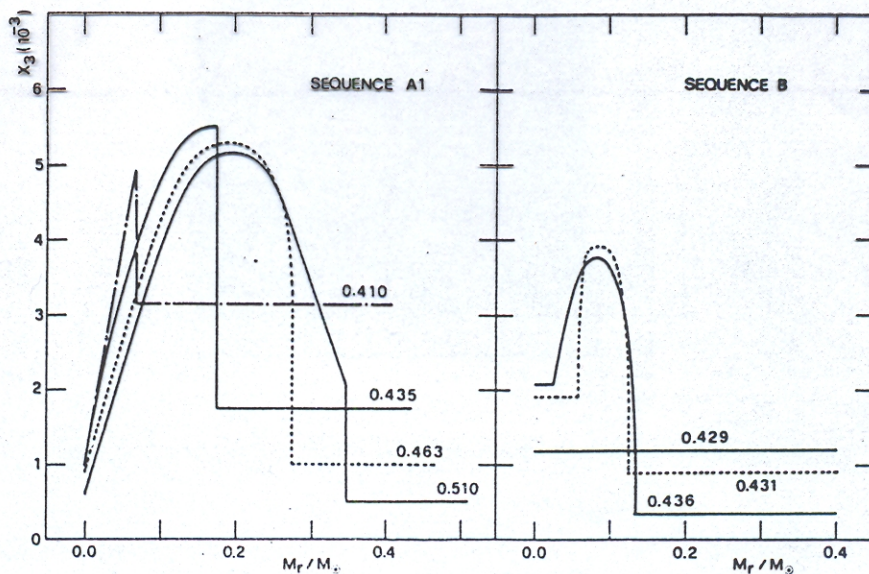
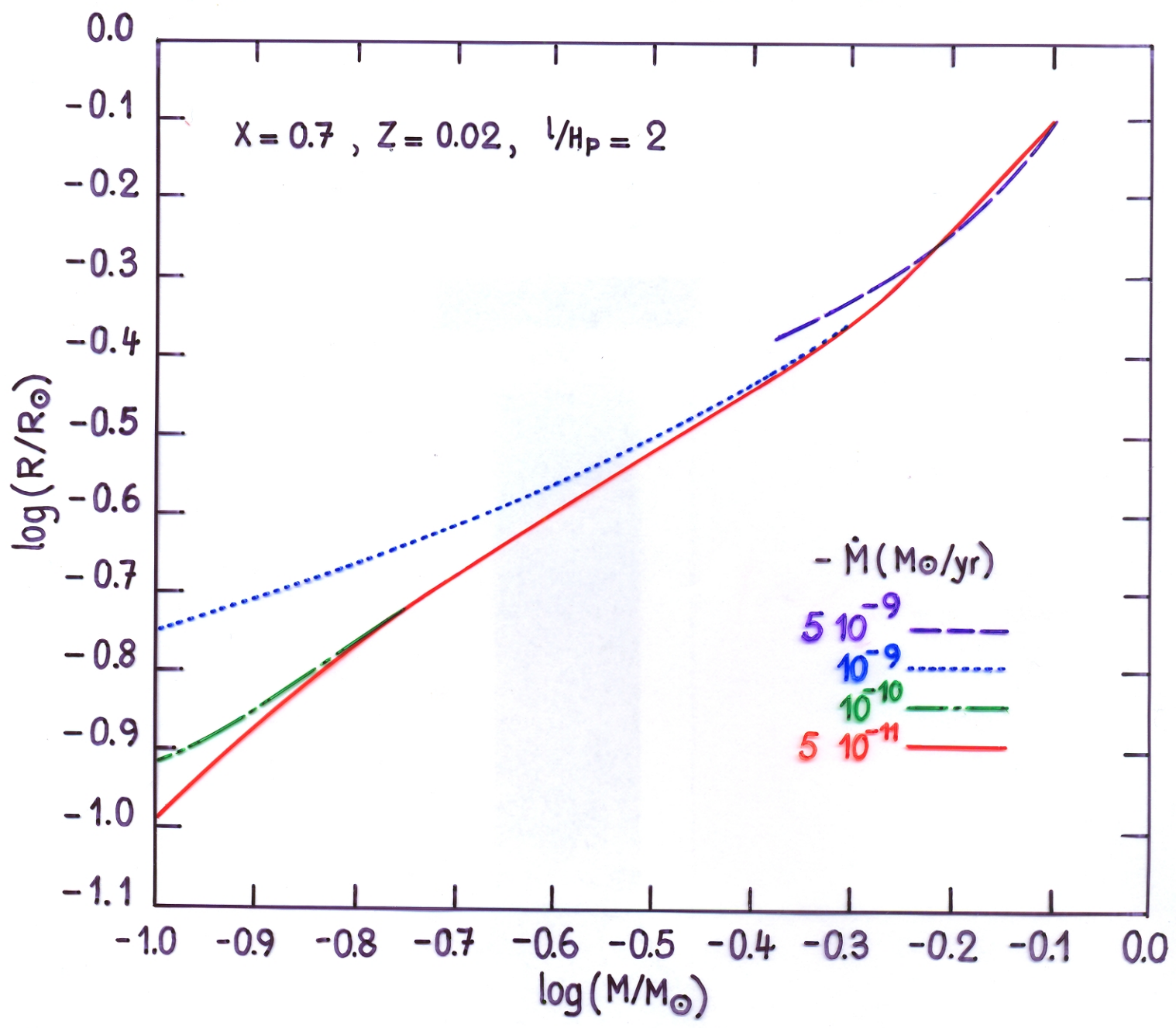


FIG. 4.—The <sup>3</sup>He abundance profiles in the interior of different labeled total masses in sequences A1 and B. For sequence B the abundance in the fully mixed star ( $M = 0.429 M_\odot$ ) is also shown. The full abundance for sequence A1 is roughly that in the convective envelope of the 0.41  $M_\odot$  model.

# Mass radius relation of low-mass stars undergoing mass loss

(D'Antona, F., Mazzitelli, I. : 1982, Astrophys. J. 260, 722 )



-  $^3\text{He}$  : Wenn der Stern vollkonvektiv wird, ändert sich die zentrale  $^3\text{He}$ -Konzentration praktisch instantan.

$$\left. \begin{array}{l} ({}^3\text{He})_c \uparrow \text{ in Sequenz A1} \rightarrow R \uparrow \\ ({}^3\text{He})_c \downarrow \text{ in Sequenz B} \rightarrow R \downarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{warum ändert sich} \\ R? \end{array}$$

Wenn  $({}^3\text{He})_c \uparrow (\downarrow) \rightarrow$  **effektivere (weniger effektive)** Energieerzeugung durch  ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, {}^4\text{He})2{}^1\text{H}$

$\rightarrow T_c \downarrow (\uparrow)$  (Energieüberschuss/-defizit  $\rightarrow \epsilon_g$ )

$\rightarrow R \uparrow (\downarrow)$ , da  $R \sim T_c^{-1}$  (Homologie)

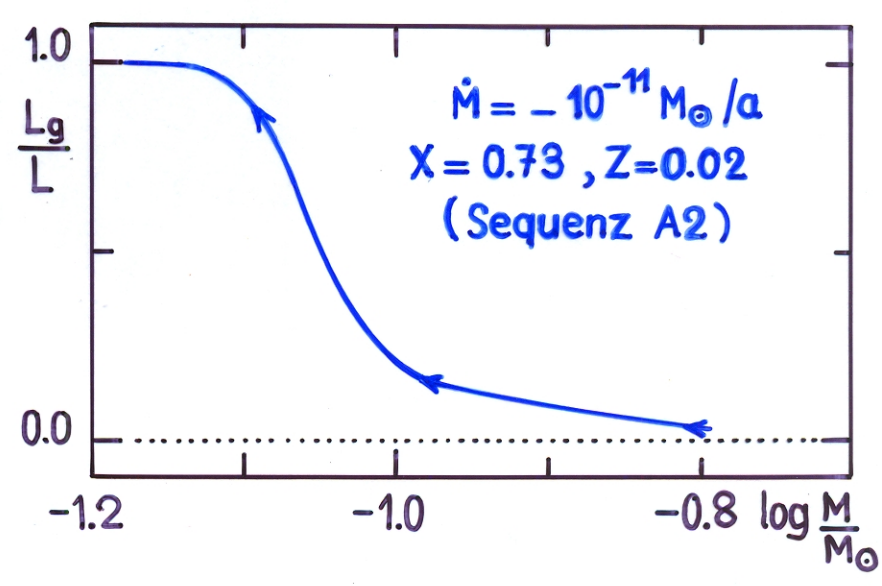
Zeitskala für die Änderungen : Bruchteil von  $\tau_{KH}$  ( $\sim 2 \cdot 10^7 \text{a}$ )

c) D'Antona, F., Mazzitelli, I.: 1982, Astron. Astrophys. 113, 303

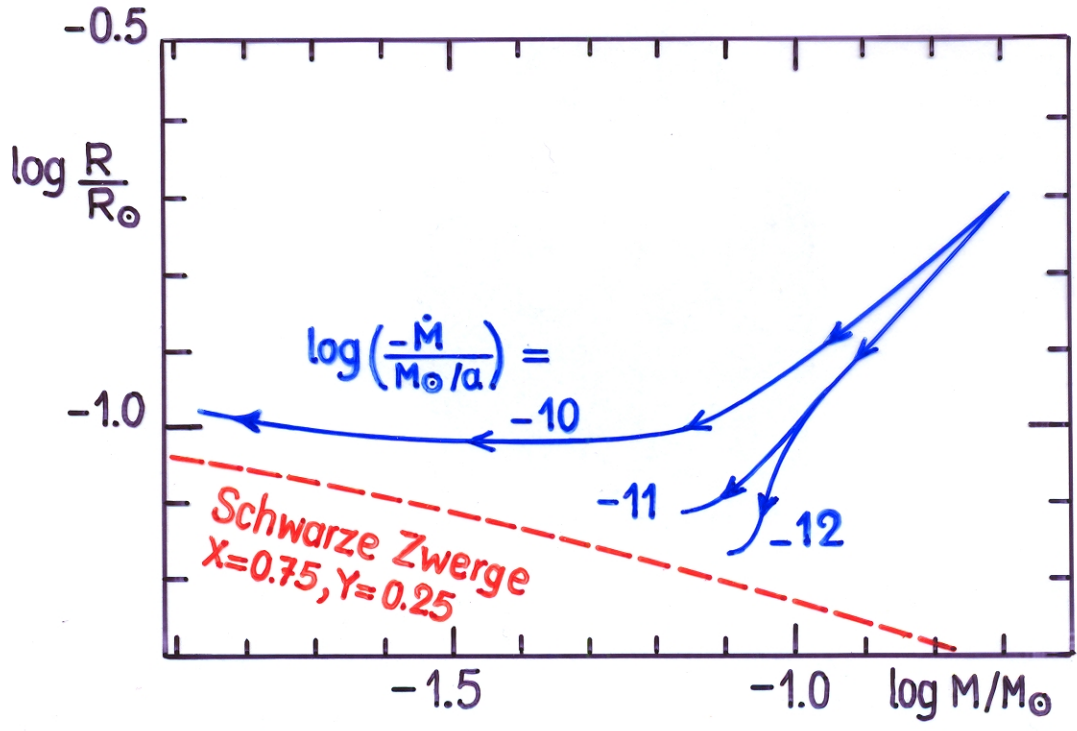
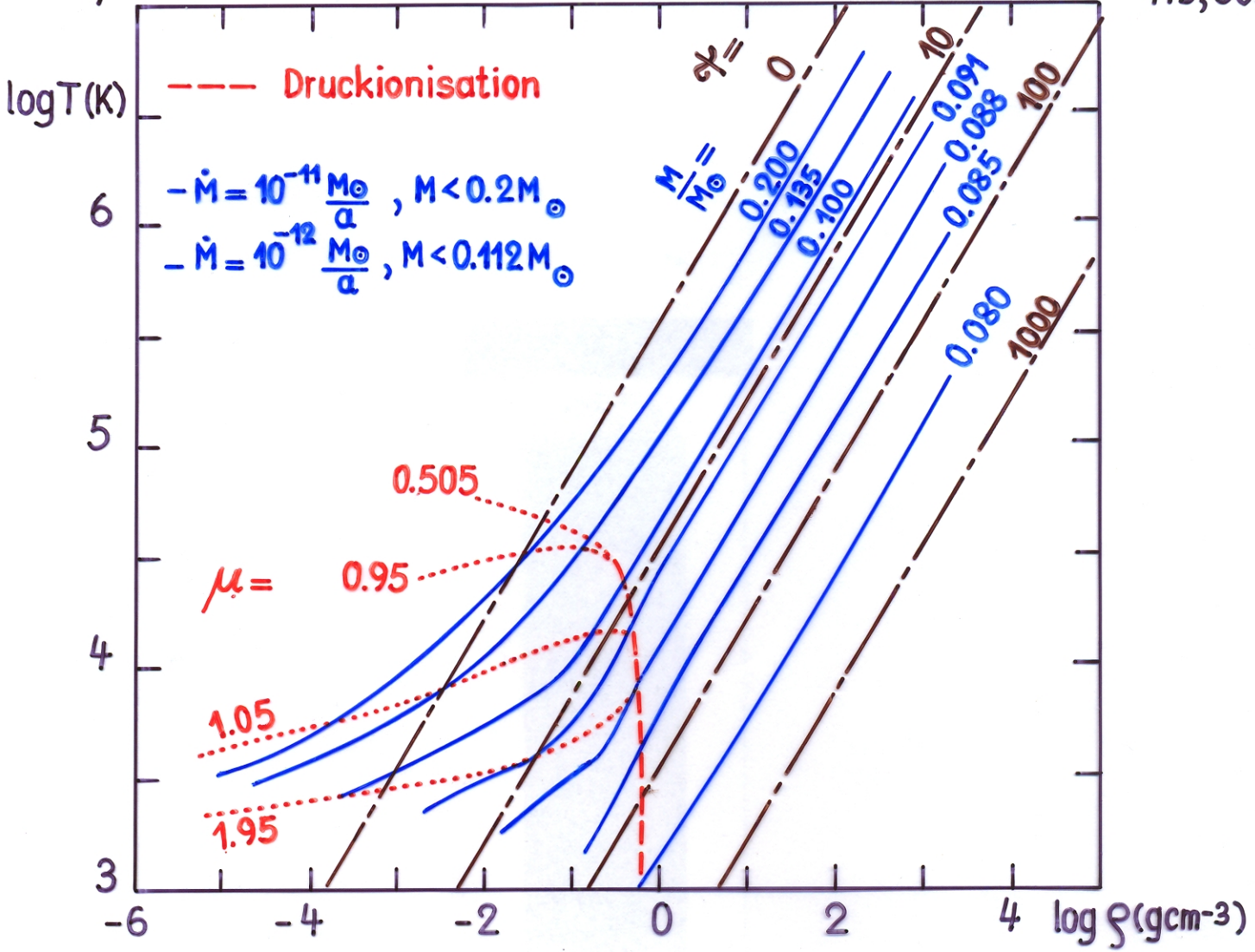
Entwicklung von Sternen mit  $M \leq 0.2 M_\odot$  (vollkonvektiv) bei konstantem  $\dot{M}$  ( $= -10^{-10}, -10^{-11}, -10^{-12} M_\odot/\text{a}$ )

Ergebnisse ( $\rightarrow$  entsprechende Figuren)

- Entwicklung im M-R-Diagramm entspricht wieder unseren Abschätzungen
- Entwicklung im  $\varrho$ -T-Diagramm zeigt  $T_c \downarrow, \varrho_c \uparrow, \tau \uparrow$  mit abnehmender Masse. Wenn  $T_c \approx 10^6 \text{K}$  ( $M \approx 0.08 M_\odot$ ):  $L_{nuc} \rightarrow 0$   
 $L \approx L_g \rightarrow$  Stern kühlt ab  $\rightarrow$  Entwicklung zum Schwarzen Zwerg



7



10. Globales Verhalten von massearmen Sternen mit Massenverlust  
(Stehle, R., Ritter, H., Kolb, U.: 1996, MNRAS 279, 581)

► Ausgangspunkt: Gleichung für  $\zeta_{\text{eff}}$  aus vorangegangenem Abschnitt:

$$\frac{d \ln R}{d \ln M} \equiv \zeta_{\text{eff}} = \zeta_s + \frac{c_v}{c_p} \frac{a+1}{2 \gamma_a} \frac{\tau_M}{\tau_{\text{th}}} \quad (1)$$

beschreibt lokales Verhalten bei Massenverlust

► Ziel: Information über globales Verhalten; Integration von Gleichung (1).

► Voraussetzung: Sterne haben tiefe äussere Konvektionszone  $\rightarrow$  darf (wie bisher) die Homologierelationen verwenden.

► Vorgehen: Wandeln Gleichung (1) in eine Differentialgleichung für R bzw. für  $R/R_e$  um.

1. Schritt: Berechnung von  $\tau_{\text{th}} = \frac{E_{\text{th}}}{L_g}$ :

$$E_{\text{th}} = \int_0^M c_v T dM_r = \underbrace{\frac{3}{2} \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r}_{\text{ideales Gas}} = -\underbrace{\frac{1}{2} E_G}_{\text{Virialsatz}} = \frac{1}{2} \int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r = k_G \frac{GM^2}{R}$$

für Polytrope mit Index  $n$ :  $k_G = \frac{3}{2(5-n)}$

für vollkonvektive Sterne:  $n = 3/2 \rightarrow k_G = 3/7$ . Für Sterne mit tiefen äusseren Konvektionszonen:  $n \approx 3/2 \rightarrow k_G \approx 3/7$ .

$$\rightarrow \tau_{\text{th}} = k_G \frac{GM^2}{RL_g} = k_G \frac{GM^2}{RL} \frac{L}{L_g} = k_G \tau_{\text{KH}} \frac{L}{L_g} \quad (2)$$

2. Schritt: Führen neue Variable ein:

$$\begin{pmatrix} R \\ L \\ T_{\text{eff}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R/R_e \\ L/L_e \\ T_{\text{eff}}/T_{\text{eff},e} \end{pmatrix}, \text{ wobei } \begin{pmatrix} R_e \\ L_e \\ T_{\text{eff},e} \end{pmatrix} = \text{Werte im thermischen Gleichgewicht, d.h. auf der Hauptreihe}$$

$$\rightarrow \frac{d \ln R}{d \ln M} = \frac{d \ln R/R_e}{d \ln M} + \frac{d \ln R_e}{d \ln M} \rightarrow \zeta_{\text{eff}} = \frac{d \ln R/R_e}{d \ln M} + \zeta_e \quad (3)$$

►  $\zeta_e = \left( \frac{\partial \ln R}{\partial \ln M} \right)_{\text{th}} = \text{HR-Masse-Radius-Exponent}$

$$\tau_{KH} = \frac{GM^2}{RL} = \frac{GM^2}{R_e L_e} \left(\frac{R}{R_e}\right)^{-1} \left(\frac{L}{L_e}\right)^{-1} = \tau_{KH,e} \left(\frac{R}{R_e}\right)^{-1} \left(\frac{L}{L_e}\right)^{-1} \quad (4)$$

$$\frac{L}{L_e} = \left(\frac{R}{R_e}\right)^2 \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff,e}}\right)^4 : \text{ Stefan - Boltzmann - Gesetz} \quad (5)$$

→ müssen nun noch  $(T_{eff}/T_{eff,e})$  und  $L_g/L$  als Funktion von  $R/R_e$  ausdrücken:

3. Schritt: Berechnung von  $T_{eff}(R)$ :

Verwenden hierzu analytische Theorie der Hayashi-Linie (Kippenhahn & Weigert 1990; Sternaufbauvorlesung Teil I, Abschnitt 20)

Photosphärenlösung:  $\log T_{eff} = -\frac{a+1}{b} \log P_0 + \frac{1}{b} \log M - \frac{2}{b} \log R + \text{const.} \quad (I)$

polytrope Innenlösung für  $n=3/2$ :  $\log T = \frac{2}{5} \log P + \frac{2}{5} \left[ \frac{3}{2} \log R + \frac{1}{2} \log M - \log K' \right] \quad (II)$

(I) & (II) für  $T=T_{eff}$  und  $P=P_0$  bzw. für  $T=T_{eff,e}$  und  $P=P_{0,e}$  ergeben

$$\frac{T_{eff}}{T_{eff,e}} = \left(\frac{R}{R_e}\right)^\mu, \text{ mit } \mu = \frac{3a-1}{5(a+1)+2b} \quad (6)$$

N.B. für Sterne an der Hayashi-Linie ist  $0 \lesssim \mu \ll 1$

4. Schritt: Berechnung von  $L_g(R)$ :

$$L_g = L - L_{nuc} \rightarrow \frac{L_g}{L} = 1 - \frac{L_{nuc}}{L} = 1 - \frac{L_{nuc}}{L_e} \frac{L_e}{L}$$

$\frac{L_e}{L}$  als Fkt. von  $\frac{R}{R_e}$  aus (5) und (6):  $\frac{L}{L_e} = \left(\frac{R}{R_e}\right)^{2+4\mu}$

→ Benötigen nur noch  $L_{nuc}/L_e$  als Fkt. von  $R/R_e$ . Verwenden wieder Homologie:

$$\left. \begin{array}{l} E_{nuc} \sim \rho T^\nu \\ L_{nuc} \sim M E_{nuc} \\ \rho \sim M/R^3 \\ T \sim M/R \end{array} \right\} \rightarrow L_{nuc} \sim R^{-(\nu+3)}$$

Beachten, dass  $L_e = L_{nuc,e}$ . →  $\frac{L_{nuc}}{L_e} = \left(\frac{R}{R_e}\right)^{-(\nu+3)} \quad (7)$

5. Schritt: Fassen (1) - (7) zu einer Differentialgleichung zusammen:

$$\frac{d \ln R/R_e}{d \ln M} = c \frac{\tau_M}{\tau_{KH,e}} \left\{ \left(\frac{R}{R_e}\right)^{3+4\mu} - \left(\frac{R}{R_e}\right)^{-(\nu+2)} - \frac{1}{c} \frac{\tau_{KH,e}}{\tau_M} (\tau_e - \tau_s) \right\} \quad (8)$$

Dabei ist  $c = \frac{c_v}{c_p} \frac{\alpha+1}{2\nabla_a k_G}$ . Mit  $n = 3/2$ ,  $\frac{c_p}{c_v} = 5/3$ , und  $\nabla_a = 2/5$  folgt

$$c = \frac{7}{4} (\alpha+1)$$

N.B.  $-(\nu+2) < 0$   
 $3+4\mu > 0$   
 $\zeta_e - \zeta_s > 0$  für  $M \lesssim 0.6 M_\odot$   
 $\zeta_e - \zeta_s < 0$  für  $M \gtrsim 0.6 M_\odot$

Verhalten der Lösungen von (8) wird wesentlich von diesen Eigenschaften mitbestimmt!

Diskussion der Lösungseigenschaften der Differentialgleichung (8)

a) schneller Massenverlust:  $\frac{\tau_M}{\tau_{KH,e}} \rightarrow 0$ . Können (8) umschreiben als

$$\zeta_{eff} = \zeta_s + c \frac{\tau_M}{\tau_{KH,e}} \left\{ \left(\frac{R}{R_e}\right)^{3+4\mu} - \left(\frac{R}{R_e}\right)^{-(\nu+2)} \right\} \quad (9), \hat{=} \text{Gl. (1)}$$

→  $\lim_{\tau_M \rightarrow 0} \zeta_{eff} = \zeta_s$ , unabhängig vom Wert von R  
 wenn  $R = R_e \rightarrow \zeta_{eff} = \zeta_s \rightarrow$  ausgehend vom thermischen Gleichgewicht ist erst einmal jeder Massenverlust schnell!

b) langsamer Massenverlust:  $\frac{\tau_M}{\tau_{KH,e}} \rightarrow \infty$ . Können (8) umschreiben als

$$\frac{\tau_{KH,e}}{c \tau_M} \left\{ \frac{d \ln R/R_e}{d \ln M} + (\zeta_e - \zeta_s) \right\} = \left(\frac{R}{R_e}\right)^{3+4\mu} - \left(\frac{R}{R_e}\right)^{-(\nu+3)} \quad (10)$$

→ wenn  $\tau_M/\tau_{KH,e} \rightarrow \infty$  :  $R = R_e \rightarrow \zeta_{eff} = \zeta_e$

c) allgemeiner Fall

Betrachten zuerst den Zustand, bei dem gerade  $(d \ln R/R_e / d \ln M) = 0$  ist. Das ist der Fall, wenn R einen speziellen Wert  $R_0$  annimmt:

$$\frac{d \ln R/R_e}{d \ln M} = 0 \Leftrightarrow R = R_0 \text{ mit } \left(\frac{R_0}{R_e}\right)^{3+4\mu} - \left(\frac{R_0}{R_e}\right)^{-(\nu+2)} - \frac{1}{c} \frac{\tau_{KH,e}}{\tau_M} (\zeta_e - \zeta_s) = 0 \quad (11)$$

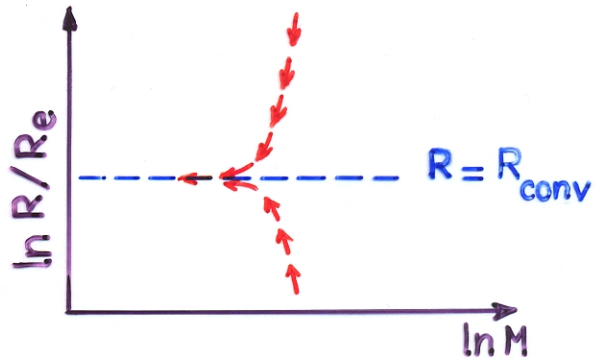
Welches Vorzeichen hat  $\frac{d \ln R/R_e}{d \ln M}$ , wenn  $R \neq R_0$  ist? Sei  $R = R_0 + \delta R$ , wobei  $|\delta R/R_0| \ll 1$ .

In (8) eingesetzt ergibt sich unter Beachtung von (11):

$$\left. \frac{d \ln R/R_e}{d \ln M} \right|_{R_0 + \delta R} = \frac{\delta R}{R_0} \underbrace{\left\{ (3+4/\mu) \left(\frac{R_0}{R_e}\right)^{4\mu+3} + (\nu+2) \left(\frac{R_0}{R_e}\right)^{-(\nu+2)} \right\} \frac{c \tau_{KH,e}}{\tau_M}}_{>0} \sim \frac{\delta R}{R_0} \quad (12)$$

- wenn  $R > R_0$ :  $R \downarrow$  mit Massenverlust
- wenn  $R < R_0$ :  $R \uparrow$  mit Massenverlust

→ Allgemein: Entwicklungen mit Massenverlust streben alle gegen eine durch Gl. (8) definierte Lösung  $R = R_{conv}(M)$ .



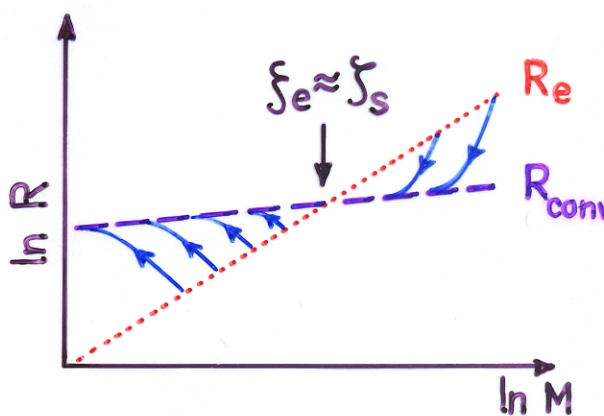
▶ Da einerseits  $\frac{d \ln R_0/R_e}{d \ln M} = 0$  und andererseits  $\frac{R_0}{R_e} = f(M)$ , weil  $(\zeta_e - \zeta_s) = g(M)$ , ist  $R_{conv} \neq R_0$ .

▶  $R_{conv} \approx R_0$ , wenn  $(\zeta_e - \zeta_s)$  nur schwach von  $M$  abhängig ist!

Globale Eigenschaften der Entwicklung mit Massenverlust

1) Ausser in Bereichen, wo  $\zeta_e \approx \zeta_s$  ist, ist in guter Näherung  $R_{conv} = R_0$ .

2) Entwicklungen, ausgehend von  $R_e$  (oder allgemeiner  $R \neq R_{conv}$ ) konvergieren sehr schnell, d.h. mit  $\tau \approx 0.025 \tau_{KH,e}$  auf die Lösung  $R_{conv}(M)$ , (→ Schema und numerische Rechnungen).



▶  $R_{conv}(M)$  beschreibt wesentliche Teile der Entwicklung.

3)  $R_{conv} \approx R_0 < R_e$ , wenn  $\zeta_e < \zeta_s$ , d.h.  $M \gtrsim 0.6 M_\odot$  (Pop.I) } → Schema und num. Rechnungen  
 $R_{conv} \approx R_0 > R_e$ , wenn  $\zeta_e > \zeta_s$ , d.h.  $M \lesssim 0.6 M_\odot$  (Pop.I)

4)  $\frac{R_{conv}}{R_e}$  und  $\frac{R_0}{R_e}$  sind monoton wachsende Fkt. von  $\frac{\tau_{KH,e}}{c \tau_M} (\zeta_e - \zeta_s)$

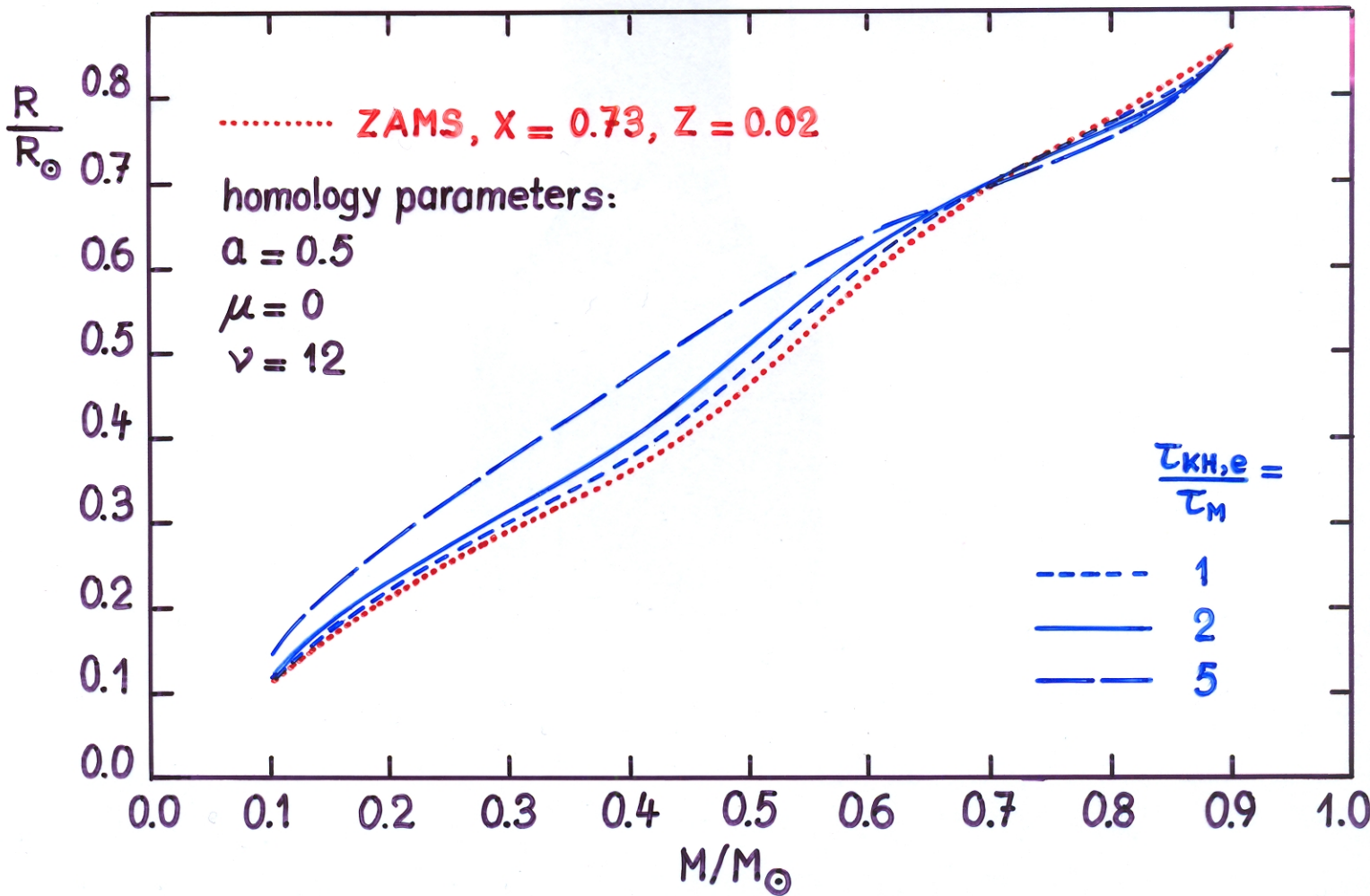
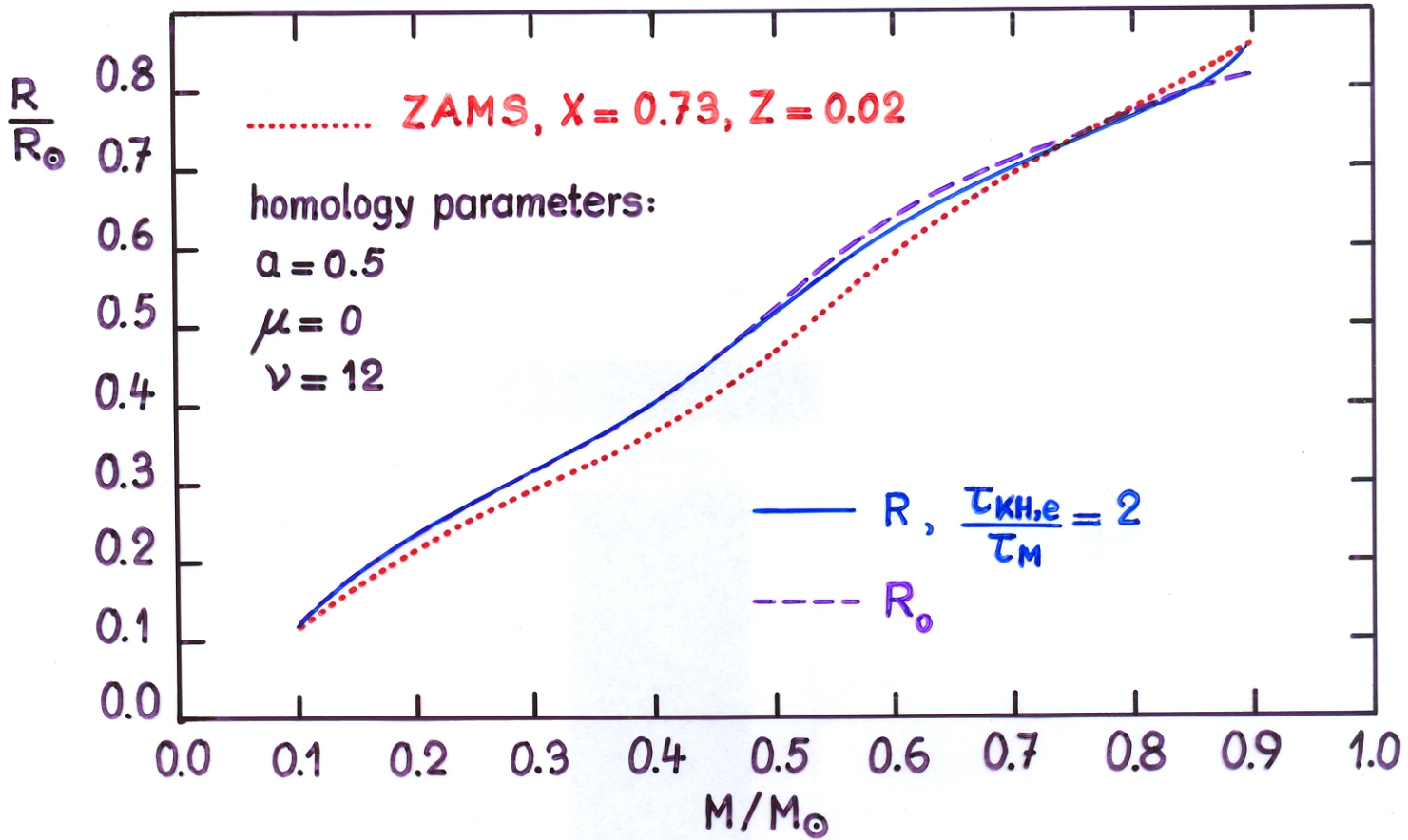
▶ Die Abweichungen  $|R_{conv} - R_e|$  und  $|R_0 - R_e|$  sind umso grösser, je grösser  $\tau_{KH,e} / \tau_M$  ist.

5) Obige Ergebnisse gelten (mindestens qualitativ) auch für Sterne, welche nicht nahezu vollkonvektiv sind, d.h. für die  $\zeta_e < \zeta_s$  (→ Ergebnisse numerischer Rechnungen)



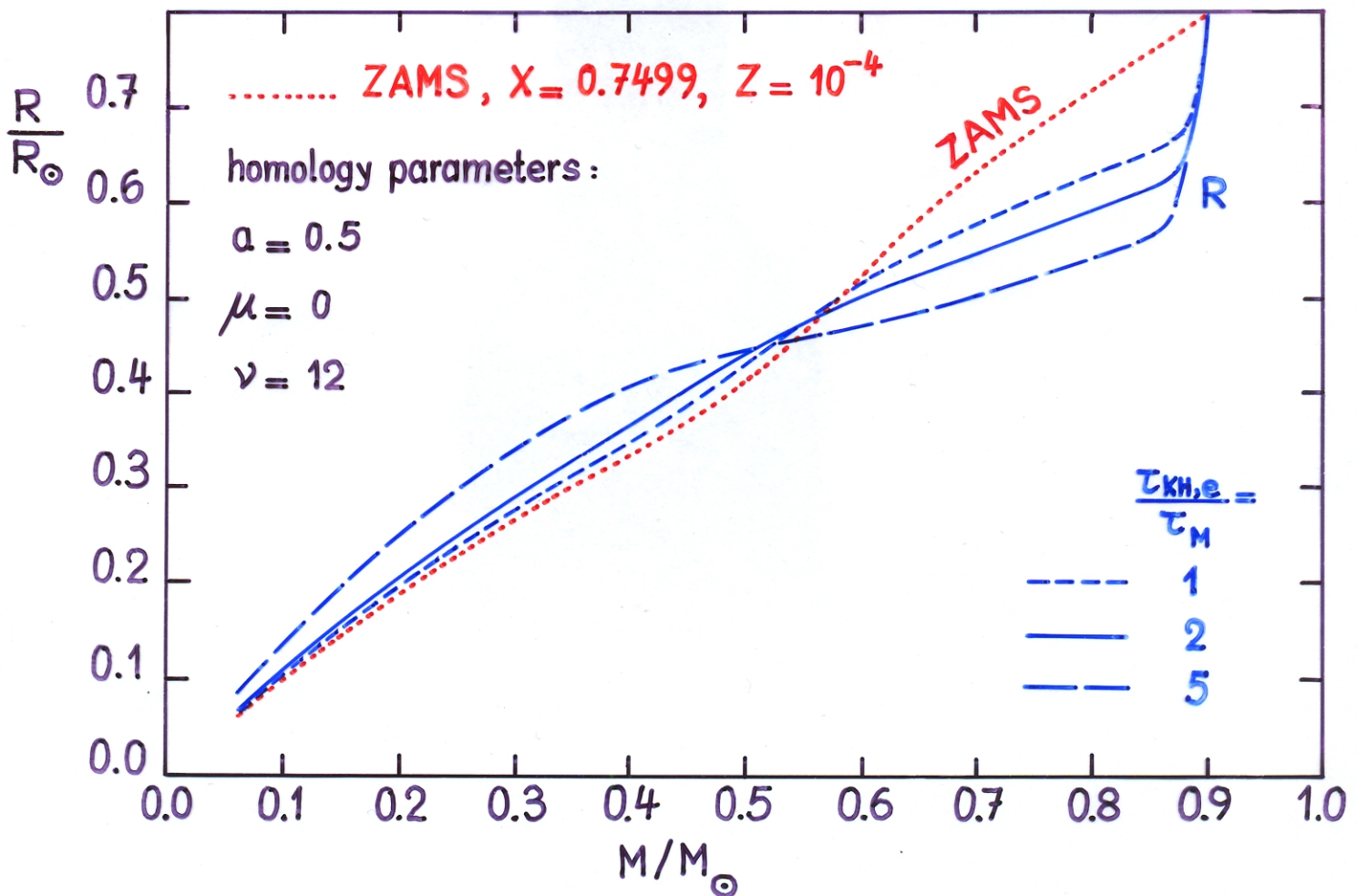
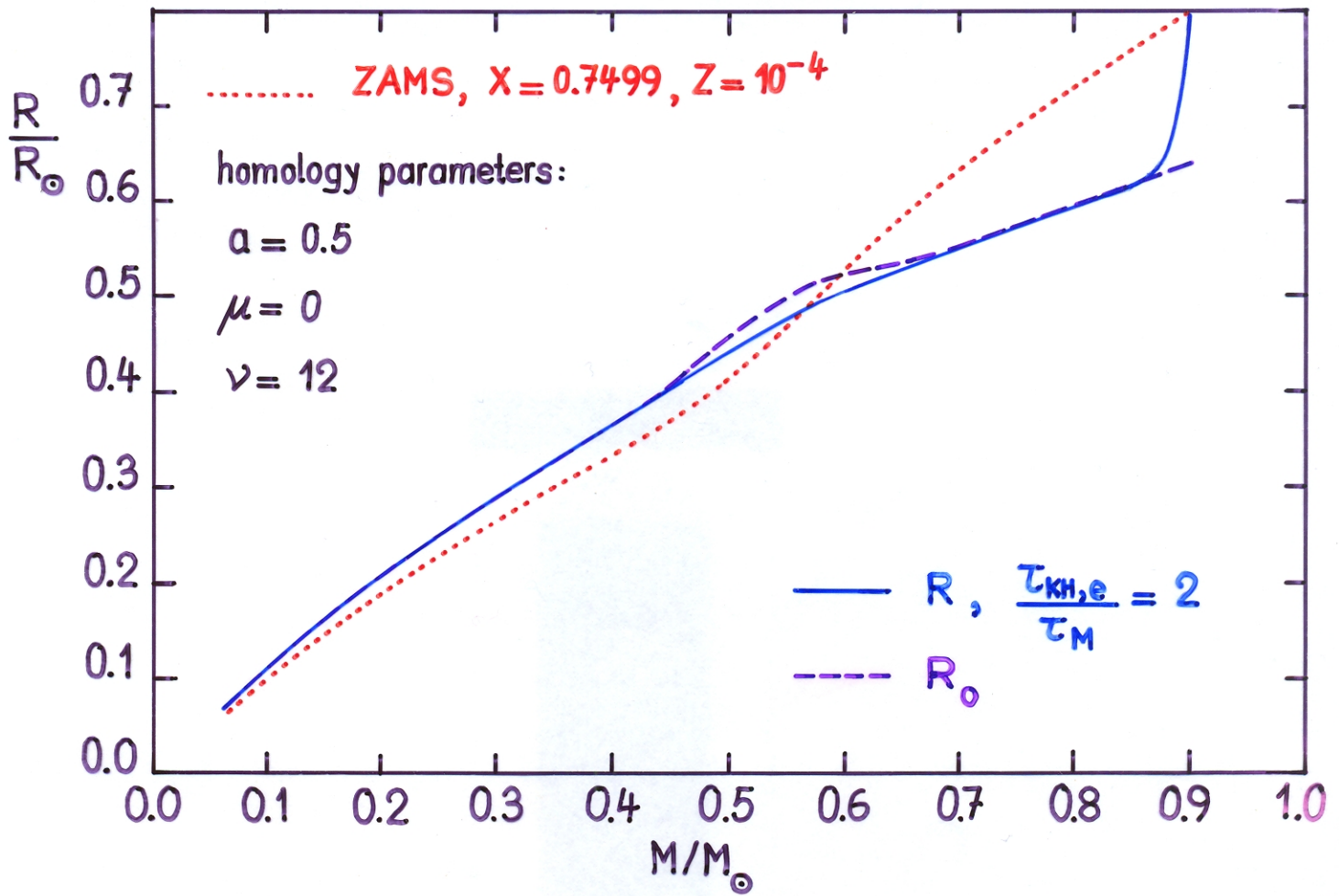
# Evolution of low-mass stars with mass loss

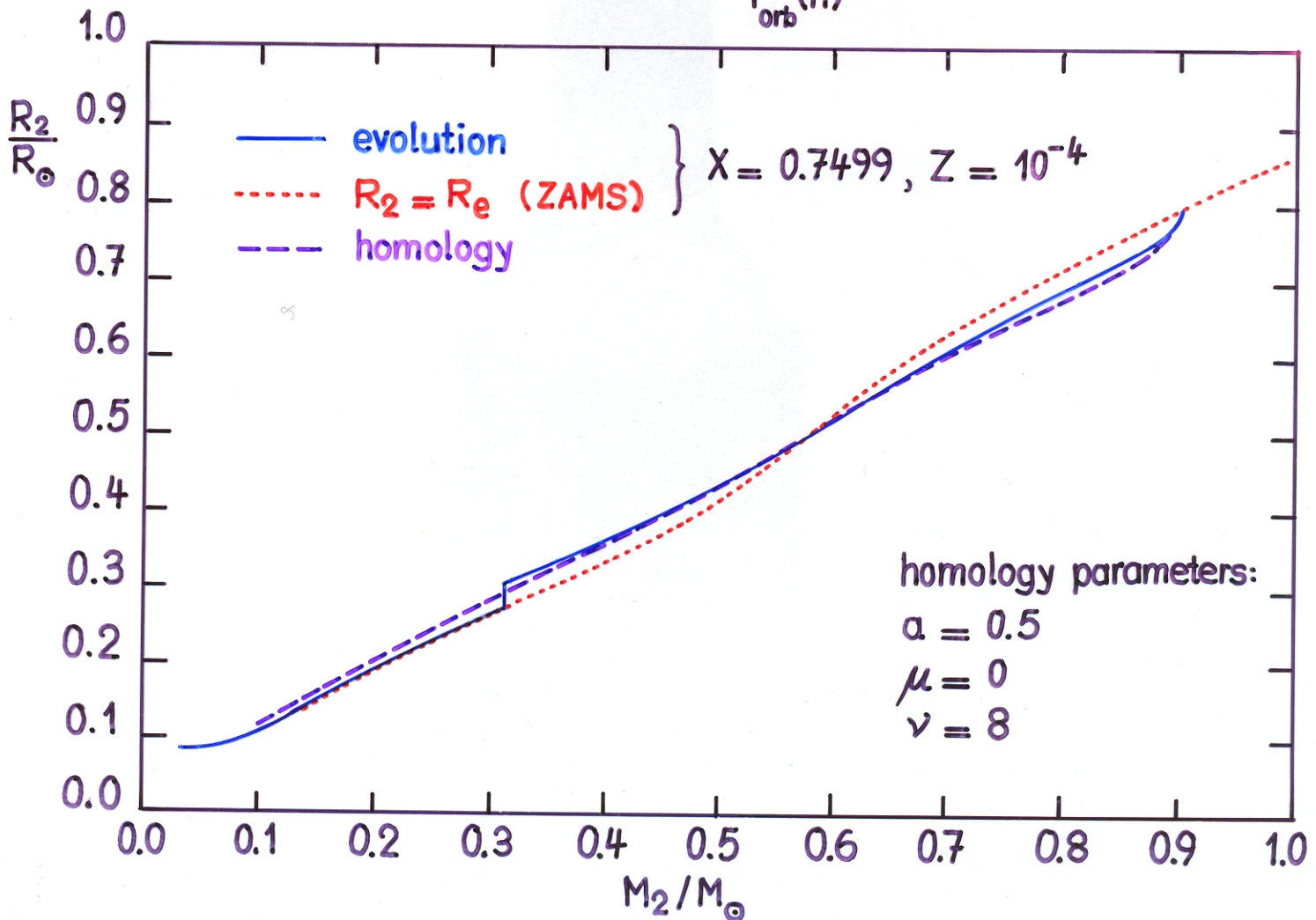
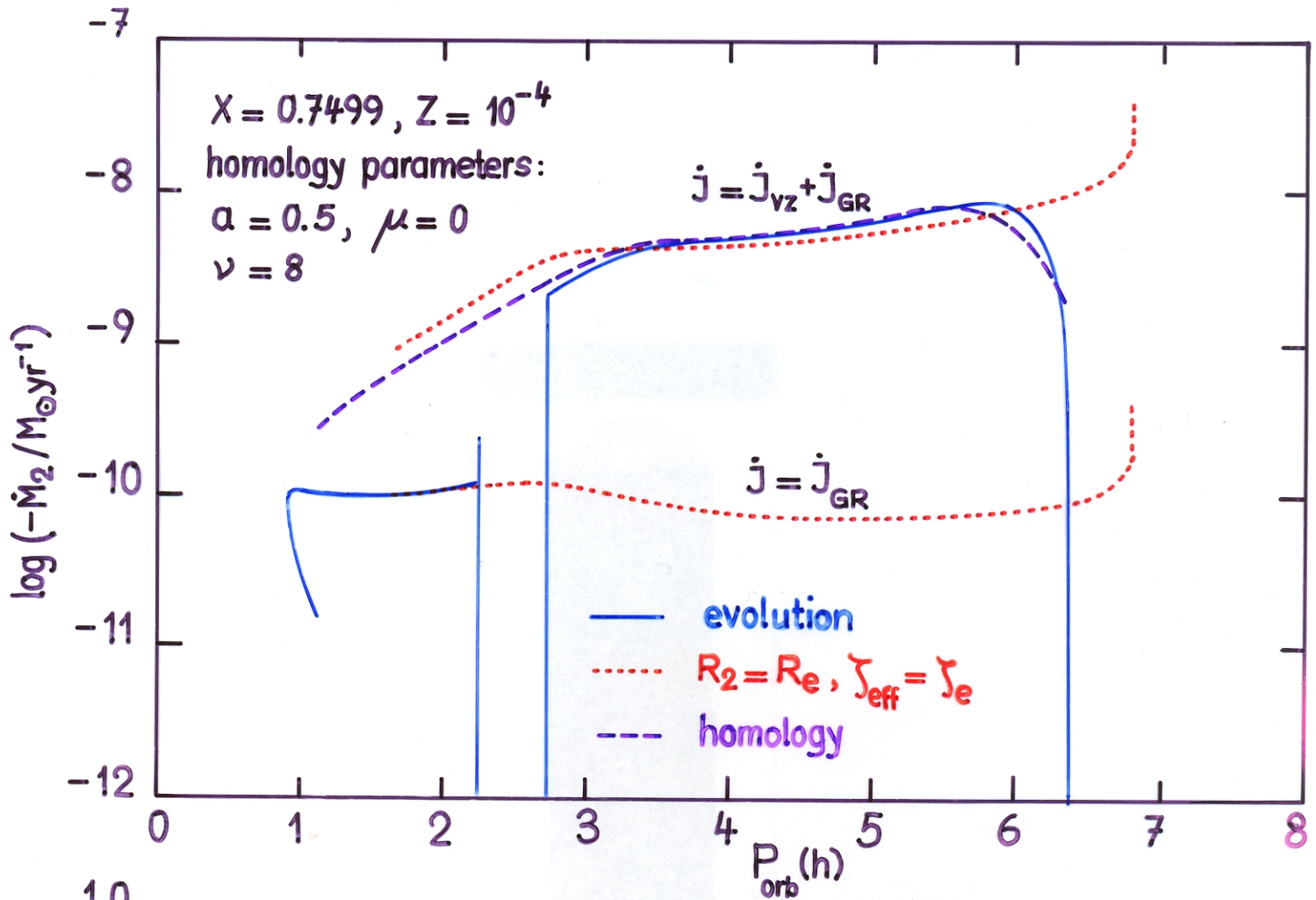
(Stehle, R., Ritter, H., Kolb, U.: 1996, MNRAS 279, 581)



# Evolution of low-mass stars with mass loss

(Stehle, R., Ritter, H., Kolb, U.: 1996, MNRAS 279, 581)





# Polytrope Gaskugeln I

- Polytrope = Modell eines Sterns im hydrost. Gleichgew. unter der Nebenbedingung, dass

$$P = K \varrho^{1+1/n} \quad (1), \quad K = \text{Polytropenkonstante}$$
$$n = \text{Polytropenindex}$$

+ Aufbaugleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dM_r} &= \frac{1}{4\pi r^2 \varrho} & (2) \\ \frac{dP}{dM_r} &= -\frac{GM_r}{4\pi r^4} & (3) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\varrho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \varrho \quad (4)$$

1-dim. Poisson-Gl.

$$(1) + (4) \rightarrow \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n \quad (5) : \text{Emdensche Diff.-Gl.}$$

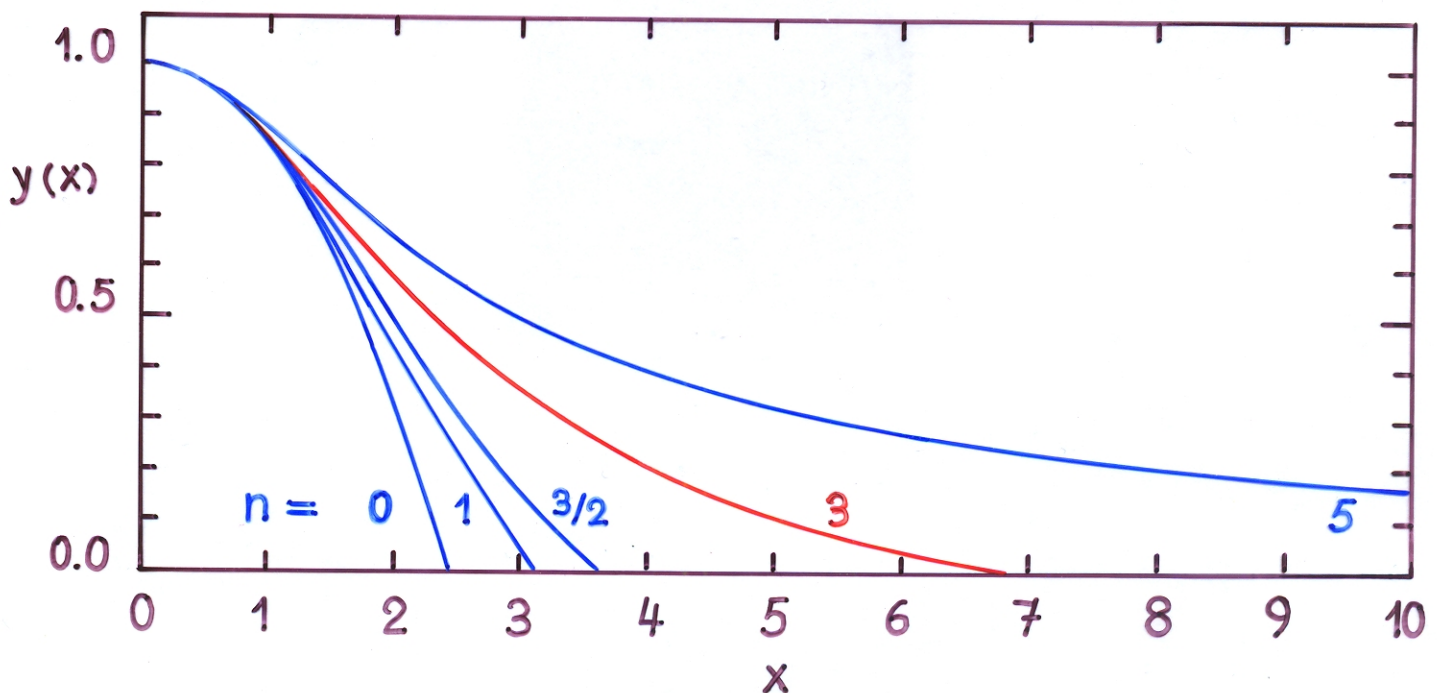
mit

$$\varrho = \varrho_c y^n$$
$$r = \alpha x, \quad \alpha^2 = \frac{K(n+1)\varrho_c^{1/n-1}}{4\pi G}$$

$$\text{Randbedingungen: } y(x=0) = 1, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

- $y(x)$ : Lane-Emden-Funktion.  $\forall n < 5: y = 0$  für  $x = x_0 < \infty$   
 $y'(x_0) < 0$

- Polytrope mit  $n < 5$  haben einen scharfen Rand!



## Polytrope Gaskugeln II

### Wichtige Eigenschaften von Polytropen

► Radius :  $R = \alpha x_0 = \left[ \frac{K(n+1) \rho_c^{1-n}}{4\pi G} \right]^{1/2} x_0$

► Masse :  $M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr = -4\pi \rho_c \alpha^3 x^2 \frac{dy}{dx}$

→  $M = -4\pi \rho_c \alpha^3 x_0^2 y'(x_0) = -4\pi \left[ \frac{K(n+1)}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{3-n/2} x_0^2 y'(x_0)$

►  $n = 3$ :  $M$  hängt nicht mehr von  $\rho_c$  ab, sondern ist nur durch  $K$  bestimmt!

⇒  $M_3 = M(n=3) = -4\pi \left( \frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} (x_0^2 y'(x_0))_{n=3}$

► Masse - Radius - Beziehung:

$R^{3-n} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{K(n+1)}{G} \right]^n \left[ -x_0^{n+1} y'(x_0) \right]^{n-1} M^{1-n}$

► Gravitationsenergie:  $E_G = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}$

► Mittlere Dichte:  $\bar{\rho} = -3 \rho_c \frac{y'(x_0)}{x_0}$

► Mass für Massenkonzentration:  $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = -\frac{1}{3} \frac{x_0}{y'(x_0)}$