

2. Das Roche-Modell

- Das Roche-Potential
- Anwendbarkeit und Grenzen des Roche-Modells
- Konsequenzen des Roche-Modells
- Der kritische Roche-Radius
- Anwendungen des Roche-Modells
 - Veränderung des Bahnabstands und der kritischen Roche-Radien bei konservativem Massentransfer
 - Bahnumlaufzeit von halbgetrennten Systemen
 - Bedeckungswahrscheinlichkeit in halbgetrennten Systemen

Das Roche - Modell

- ▶ Das Roche-Modell ist eine hilfreiche Näherung zur Beschreibung der Kräfteverhältnisse in engen Doppelsternen. Es erlaubt die Berechnung eines Potentials für die auftretenden Kräfte.
 - grosse Vereinfachung, da man die Poisson-Gleichung nicht zu lösen braucht!
- ▶ N.B. in Doppelsternen haben die auftretenden Kräfte nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen ein Potential. Im Allgemeinen brauchen die Kräfte aber kein Potential zu haben!

a) Das Roche-Potential

Betrachten zunächst zwei Punktmassen (Masse M_1 und M_2) auf einer Kreisbahn im Abstand A .

Das Gesamtpotential an einem beliebigen Punkt (x,y,z) im mitrotierenden System ist dann

$$\phi(x,y,z) = -\frac{GM_1}{|\vec{r}_1|} : \text{Gravitationspot. von } M_1$$

$$- \frac{GM_2}{|\vec{r}_2|} : \text{Gravitationspot. von } M_2$$

$$- \frac{1}{2} \omega^2 |\vec{S}|^2 : \text{Zentrifugalpotential}$$

mit

$$|\vec{r}_1| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

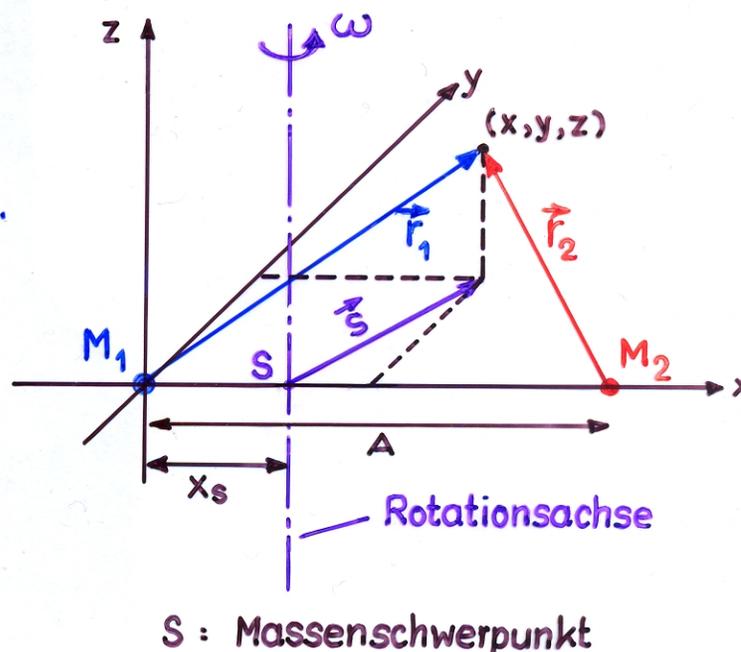
$$|\vec{r}_2| = ((A-x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

$$|\vec{S}| = \left[\left(x - \frac{M_2}{M_1+M_2} A \right)^2 + y^2 \right]^{1/2},$$

$= x_s$

und

$$\omega^2 = \frac{G(M_1+M_2)}{A^3} : \text{3. Keplersches Gesetz}$$



Führen dimensionslose Koordinaten ein: $\xi = \frac{x}{A}$; $\eta = \frac{y}{A}$; $\zeta = \frac{z}{A}$; $q = \frac{M_1}{M_2}$

$$\phi_R(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{GM_2}{A} \left\{ \frac{q}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}} + \frac{1}{((1-\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}} + \left[\left(\xi - \frac{1}{1+q} \right)^2 + \eta^2 \right]^{\frac{1+q}{2}} \right\}$$

ϕ_R heisst Roche - Potential

► ϕ_R ist das Gesamtpotential im mitrotierenden System eines Doppelsterns mit nicht-punktförmigen Komponenten, wenn

- 1.) die Bahn eine Kreisbahn ist,
- 2.) die Massenverteilung beider Sterne sphärisch symmetrisch ist,
- 3.) beide Sterne gebunden rotieren: $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$, und
- 4.) keine weiteren Kräfte (Magnetfeld, Strahlungsdruck) wirken.

► Eigenschaften der Äquipotentialflächen:

- nahezu sphärisch in der Nähe der Massenzentren
- mit zunehmender Entfernung von den Massenzentren zunehmend asphärisch, deformiert durch Fliehkräfte und Anziehung des Begleiters
- Äquipotentialflächen um M_1 und M_2 berühren sich in einem Punkt L_1 für $\phi_R = \phi_1$. L_1 heisst innerer Lagrange - Punkt (Koordinaten $(x, y, z) = (x_1, 0, 0) = A(\xi_1, 0, 0)$). Bedingung für L_1 :

$$\text{► } L_1 : \vec{\nabla} \phi = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{L_1} = -\frac{GM_2}{A^2} \left\{ \frac{1}{(1-\xi_1)^2} - \frac{q}{\xi_1^2} + [(1+q)\xi_1 - 1] \right\} = 0$$

$$\phi_1 = \phi_R(\xi_1, 0, 0) = -\frac{GM_2}{A} \left\{ \frac{q}{\xi_1} + \frac{1}{1-\xi_1} + \frac{1}{2}(1+q) \left(\xi_1 - \frac{1}{1+q} \right)^2 \right\}$$

L_1 : kräftefreier Sattelpunkt von ϕ zwischen M_1 und M_2

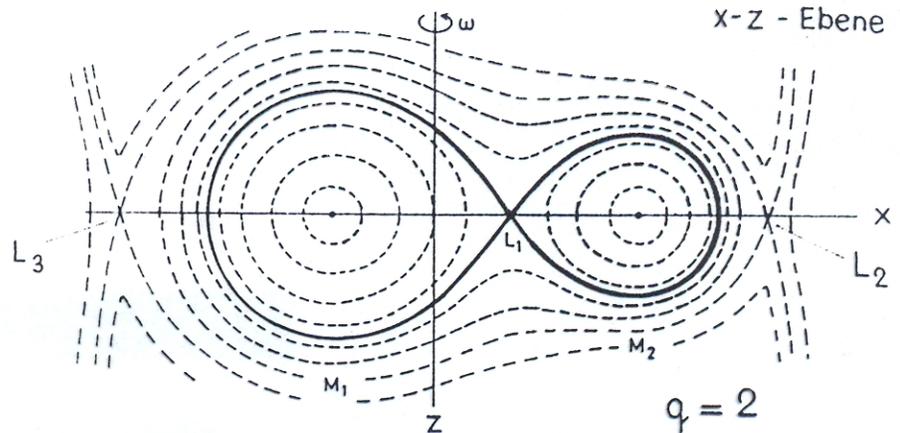
- $\phi_R > \phi_1$: die Äquipotentialflächen umschliessen beide Sterne
- bei hinreichend grossem Abstand von der Rotationsachse dominieren die Fliehkräfte gegenüber der Gravitation $\rightarrow \exists$ Kräftegleichgewicht bei den äusseren Lagrange-Punkten L_2 und L_3 $[(x, y, z) = (x_2, 0, 0)$ und $(x, y, z) = (x_3, 0, 0)]$; $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{L_i} = 0$ und $\phi(x_i, 0, 0) > \phi_1$, $i = 2, 3$

Das Roche-Modell

Verlauf der Äquipotentialflächen:

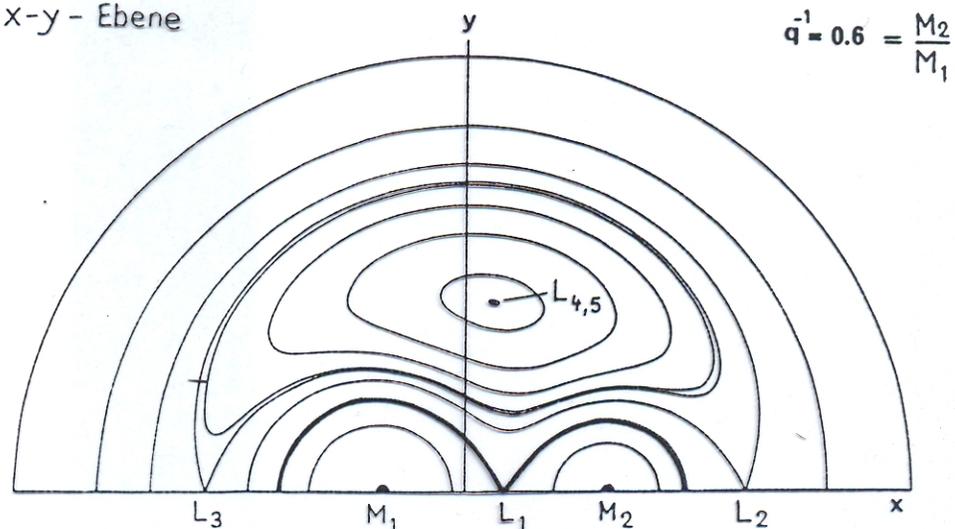
Schnitt senkrecht zur Bahnebene (x-z-Ebene) durch die Äquipotentialflächen in einem Doppelsystem mit den Massen M_1 und $M_2=0.5M_1$.

L_1 ist der innere Lagrange-Punkt. Die kritische Roche-Fläche ist als durchgezogene Linie dargestellt. L_2 und L_3 sind die äusseren Lagrange-Punkte.

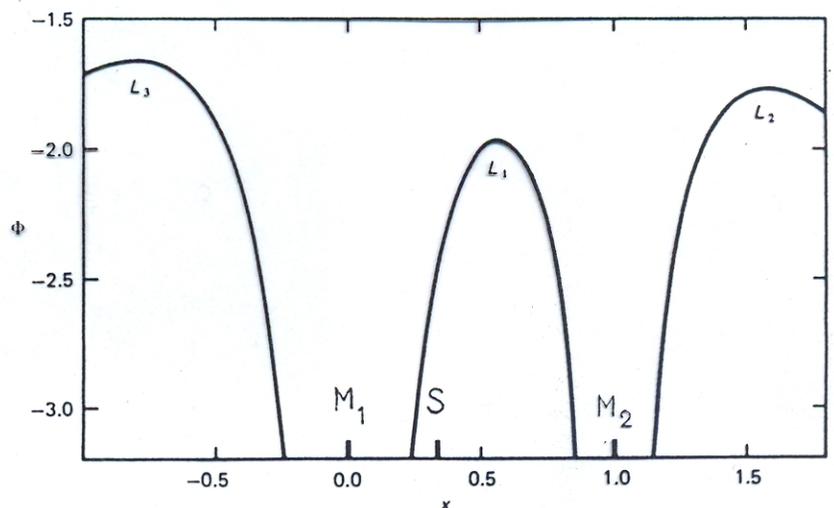


Schnitt in der Bahnebene (x-y-Ebene) durch die Äquipotentialflächen in einem Doppelsystem mit den Massen M_1 und $M_2=0.6M_1$.

Die äusseren Lagrange-Punkte L_4 und L_5 bilden zusammen mit den Massen M_1 und M_2 je ein gleichseitiges Dreieck.



Verlauf des Roche-Potentials auf der Verbindungslinie der beiden Sterne ($\phi=\phi(x,0,0)$) für das Massenverhältnis $M_1/M_2=2$.



b) Anwendbarkeit und Grenzen des Roche-Modells

Voraussetzungen:

- Kreisbahn
- gebundene Rotation
- keine weiteren Kräfte
- **sphärische Sterne ??**

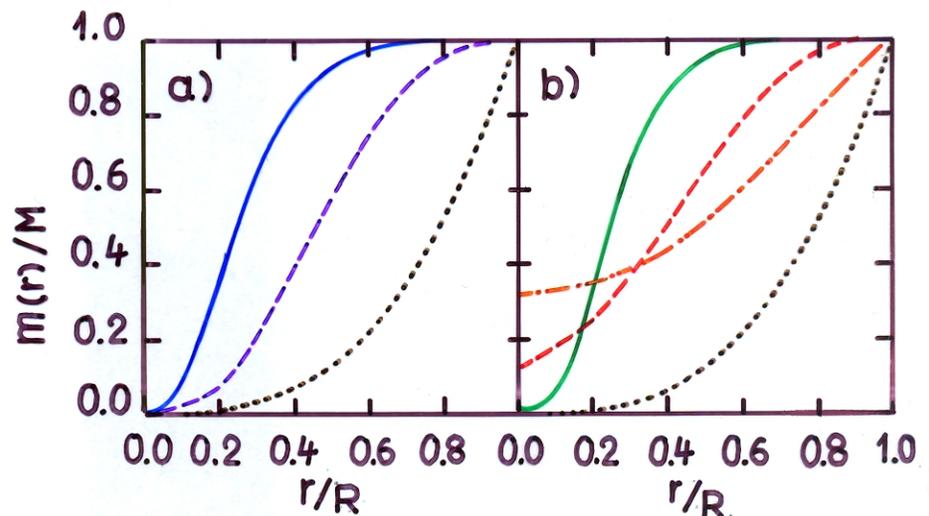
} im Prinzip erfüllbare Bedingungen, aber

► **hydrostatisches Gleichgewicht:** $\nabla P = -\rho \nabla \phi \rightarrow P = \text{const.}$ und $\rho = \text{const.}$ auf Äquipotentialflächen

► **ausgedehnte Sterne im Roche-Potential sind asphärisch!** $\rightarrow \phi \neq \phi_R$

► aber:
in praktisch allen Sternen ist die Masse stark zum Zentrum konzentriert!

Beispiele: (\rightarrow Abb.)



..... : $\rho = \text{const.}$

a) ——— : **Sonnenmodell**

----- : **$0.9M_{\odot}$ Weisser Zwerg**

b) ——— : **$4M_{\odot}$ HR-Stern**

b) ----- : **$4M_{\odot}$ roter Riese**

----- : **$4M_{\odot}$ Überriese**

► daher: Das Roche-Potential ist als Näherung brauchbar,

da merkliche Abweichungen von der sphärischen Symmetrie nur in den äusseren Schichten (mit rel. wenig Masse), wenn $R \gtrsim 0.2A$.

► Grenzen der Anwendbarkeit

können nur durch 3-dimensionale, hydrodynamische Modelle mit selbst-konsistent gerechnetem Potential ermittelt werden. \rightarrow Uryū, K., Eriguchi, Y.: 1999, MNRAS 303, 329; Rezzolla, L., Uryū, K., Yoshida, S.: 2001, MNRAS 327, 888

c) Konsequenzen des Roche-Modells

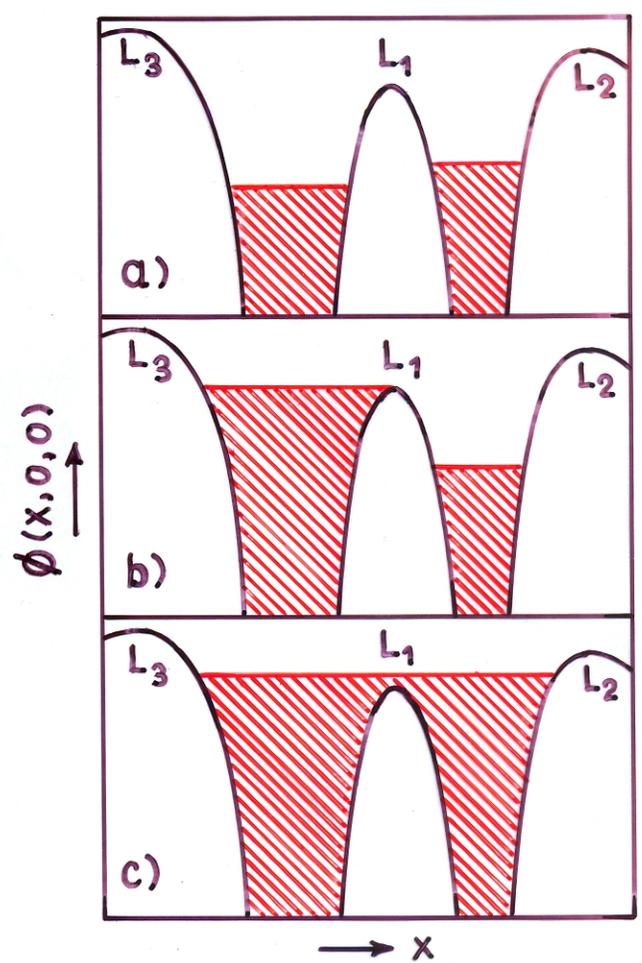
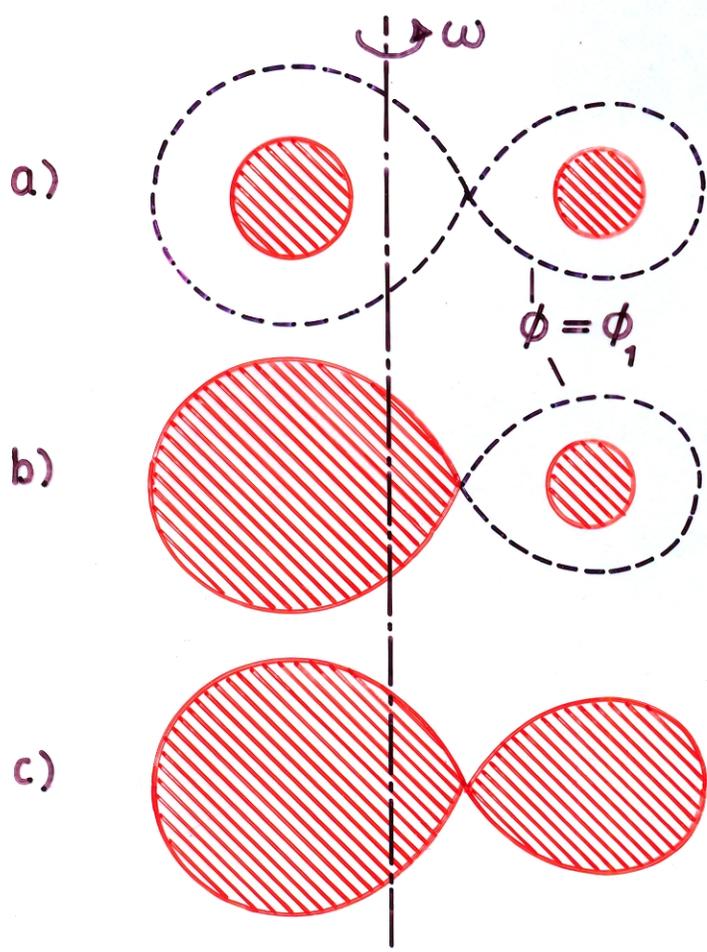
▶ jedem der beiden Sterne steht nur ein begrenztes Volumen zur Verfügung!

Das maximale Volumen wird durch die Äquipotentialfläche $\phi = \phi_1$ begrenzt. Materie mit $\phi > \phi_1$ kann keinem der beiden Sterne eindeutig zugeordnet werden.

Folge dieser Tatsache:

▶ Es gibt drei grundsätzlich verschiedene Typen von Doppelsternen

- a) getrennte Systeme: beide Sterne füllen ihr maximal erlaubtes Volumen nicht aus: $\phi(R_1) < \phi_1$, $\phi(R_2) < \phi_1$
- b) halbgetrennte Systeme: einer der beiden Sterne füllt sein maximal erlaubtes Volumen gerade aus, der andere ist kleiner, also $\phi(R_1) = \phi_1$ und $\phi(R_2) < \phi_1$, oder $\phi(R_1) < \phi_1$ und $\phi(R_2) = \phi_1$.
- c) Kontaktsysteme: beide Sterne füllen oder überfüllen ihr maximal erlaubtes Volumen, also $\phi_{phot} > \phi_1$.



d) Der kritische Roche-Radius

► Vereinfachung: Betrachten nur sphärische Sterne

→ Frage: Wie gross darf der Radius eines sphärischen Sterns sein, damit er im Roche-Potential gerade sein kritisches Volumen ausfüllt?

► Annahme: das ist der Fall, wenn

$$\frac{4\pi}{3} R_*^3 = \frac{4\pi}{3} R_R^3 = V_{\text{krit}} = \int_{\phi=\phi_1} dx dy dz = A^3 \int_{\phi=\phi_1} d\xi d\eta d\zeta = A^3 F(q)$$

$$\rightarrow R_R = A \left[\frac{3}{4\pi} \int_{\phi=\phi_1} d\xi d\eta d\zeta \right]^{1/3} = A f(q) : R_R = \text{kritischer Roche-Radius}$$

$q = \text{Massenverhältnis}$

$F(q)$: kompliziertes Integral; $f(q)$ tabelliert (→ z. Kopal: 1959, Close Binary Systems; Mochnacki, S.W.: 1984, ApJS 55, 551)

► Eigenschaften des kritischen Roche-Radius:

kritischer Roche-Radius des Primärsterns: $R_{1,R} = A f_1\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = A f_1(q)$

.. Sekundärsterns: $R_{2,R} = A f_2\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = A f_2(q)$,

$$\rightarrow \underline{f_2(q) = f_1(q^{-1})} \quad (f_1 \text{ und } f_2 \text{ tabelliert bei Kopal (1959), Mochnacki (1984)})$$

► Approximationen

Sei $q = M_1/M_2$. Dann ist mit einer Abweichung $\lesssim 2\%$

$$f_1(q) = \begin{cases} 0.38 + 0.2 \log q, & q \gtrsim 0.8 \\ \frac{2}{3^{4/3}} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{1/3}, & q \lesssim 0.8, \end{cases} \leftarrow \text{sehr nützlich für analytische Rechnungen!}$$

oder mit einer Abweichung $\lesssim 1\%$

$$f_1(q) = \frac{0.49 q^{2/3}}{0.6 q^{2/3} + \ln(1+q^{1/3})} \quad \forall q \quad (\text{Eggleton 1983}).$$

Ebenfalls sehr nützlich ist die Beziehung $\frac{f_1(q)}{f_2(q)} = q^{0.45}$

e) Veränderung von A , $R_{1,R}$ und $R_{2,R}$ bei konservativem Massentransfer

► konservativer Massentransfer: $\varpi\kappa = M_1 + M_2 = \text{const.}$

$$\text{Bahndrehimpuls: } J = \left[\frac{GM_1^2 M_2^2 A}{M_1 + M_2} \right]^{1/2} = \text{const.}$$

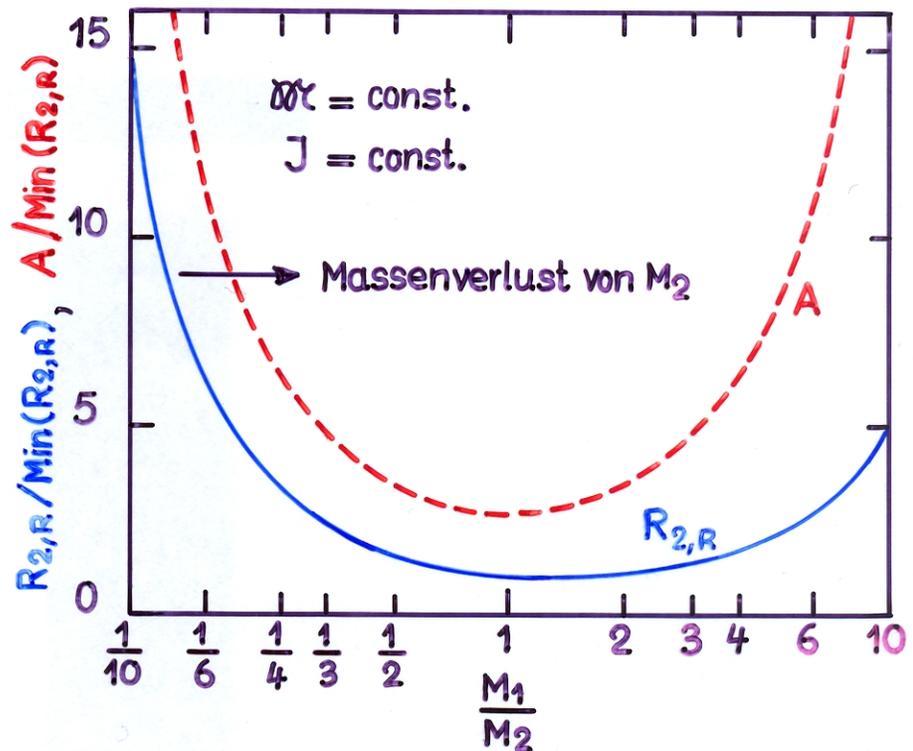
→ Änderung von A , $R_{1,R}$ und $R_{2,R}$ mit $q = \frac{M_1}{M_2}$:

$$A = \frac{J^2 (M_1 + M_2)}{GM_1^2 M_2^2}$$

$$= \frac{J^2}{G\varpi\kappa^3} \frac{(1+q)^4}{q^2}$$

$$R_{2,R} = A f_2(q)$$

$$= \frac{J^2}{G\varpi\kappa^3} \frac{(1+q)^4 f_2(q)}{q^2}$$



► Für festes $\varpi\kappa$ und J $\exists \text{ Min}(A)$ für $q = 1$
 $\exists \text{ Min}(R_{2,R})$ für $q \approx 1.27$

→ bei Massenverlust des Sekundärsterns:

$R_{2,R}$ wird grösser, wenn $q > q_{\text{min}} \approx 1.27$
 „ „ kleiner, „ $q < q_{\text{min}} \approx 1.27$,

wobei die Ableitung von $R_{2,R}$ gegeben ist durch

$$\left(\frac{d \ln R_{2,R}}{d \ln M_2} \right)_{\varpi\kappa, J} \equiv \left(\zeta_{R,2} \right)_{\varpi\kappa, J} = \frac{2(1-q)}{q} - \frac{1+q}{q} \frac{d \ln f_2(q)}{d \ln q}$$

f) Bahnumlaufszeit von halbgetrennten Systemen

Angenommen, der Sekundärstern füllt sein kritisches Roche-Volumen

→ $R_{2,R} = A f_2(q)$, wobei $f_2(q) \approx \left(\frac{8}{81}\right)^{1/3} (1+q)^{-1/3}$

+ 3. Keplersches Gesetz: $P = 2\pi \left(\frac{A^3}{G(M_1+M_2)}\right)^{1/2}$

▶ → $P \approx 2\pi \left(\frac{81 R_2^3}{8G M_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{243\pi}{8G \bar{\rho}_2}\right)^{1/2}$, $\bar{\rho}_2 =$ mittlere Dichte des Sekundärsterns

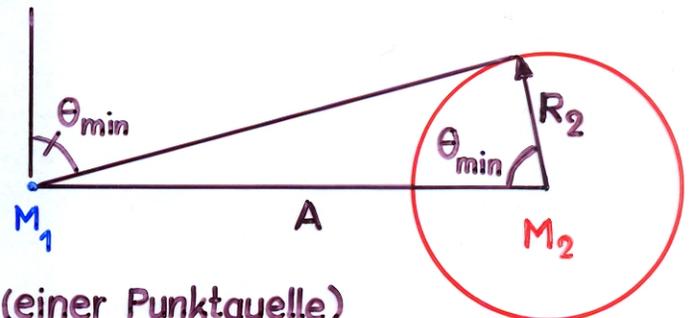
▶ P hängt in erster Näherung nur $\bar{\rho}_2$ ab, nicht aber von M_1 !
Bei exakter Rechnung: P nur sehr wenig von q abhängig.

$P \approx 0.4369 \left(\frac{R_2}{R_\odot}\right)^{3/2} \left(\frac{M_2}{M_\odot}\right)^{-1/2} \approx 0.438 \bar{\rho}_2^{-1/2} (\text{gcm}^{-3})$

g) Bedeckungswahrscheinlichkeit in halbgetrennten Systemen

∃ Bedeckungen, wenn $i > \theta_{min}$
keine " " " $i < \theta_{min}$,

wobei $\cos \theta_{min} = \frac{R_{2,R}}{A} = f_2(q)$.

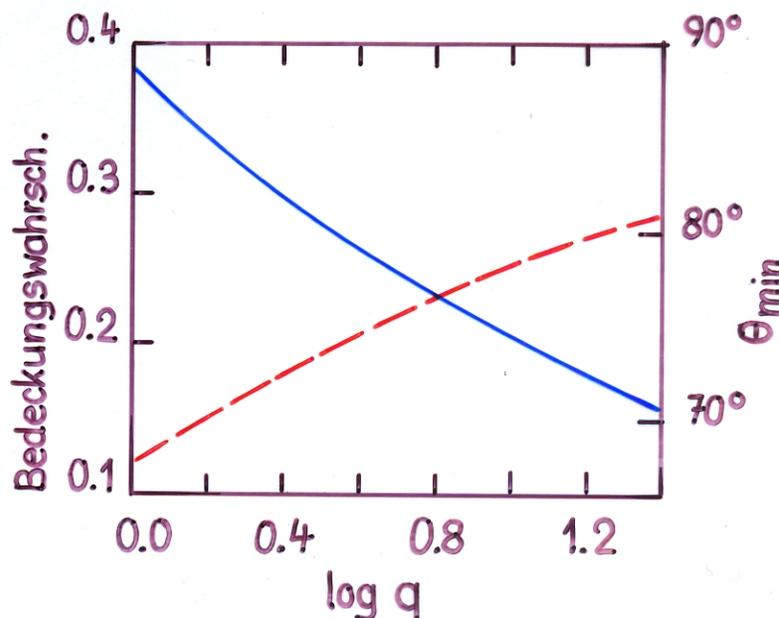


Wahrscheinlichkeit für Bedeckungen (einer Punktquelle)

$W(i > \theta_{min}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{min}}^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \cos \theta_{min} = \frac{R_2}{A} = f_2(q)$

Minimale Bahnneigung für Bedeckungen:

$i > \theta_{min} = \arccos f_2(q)$



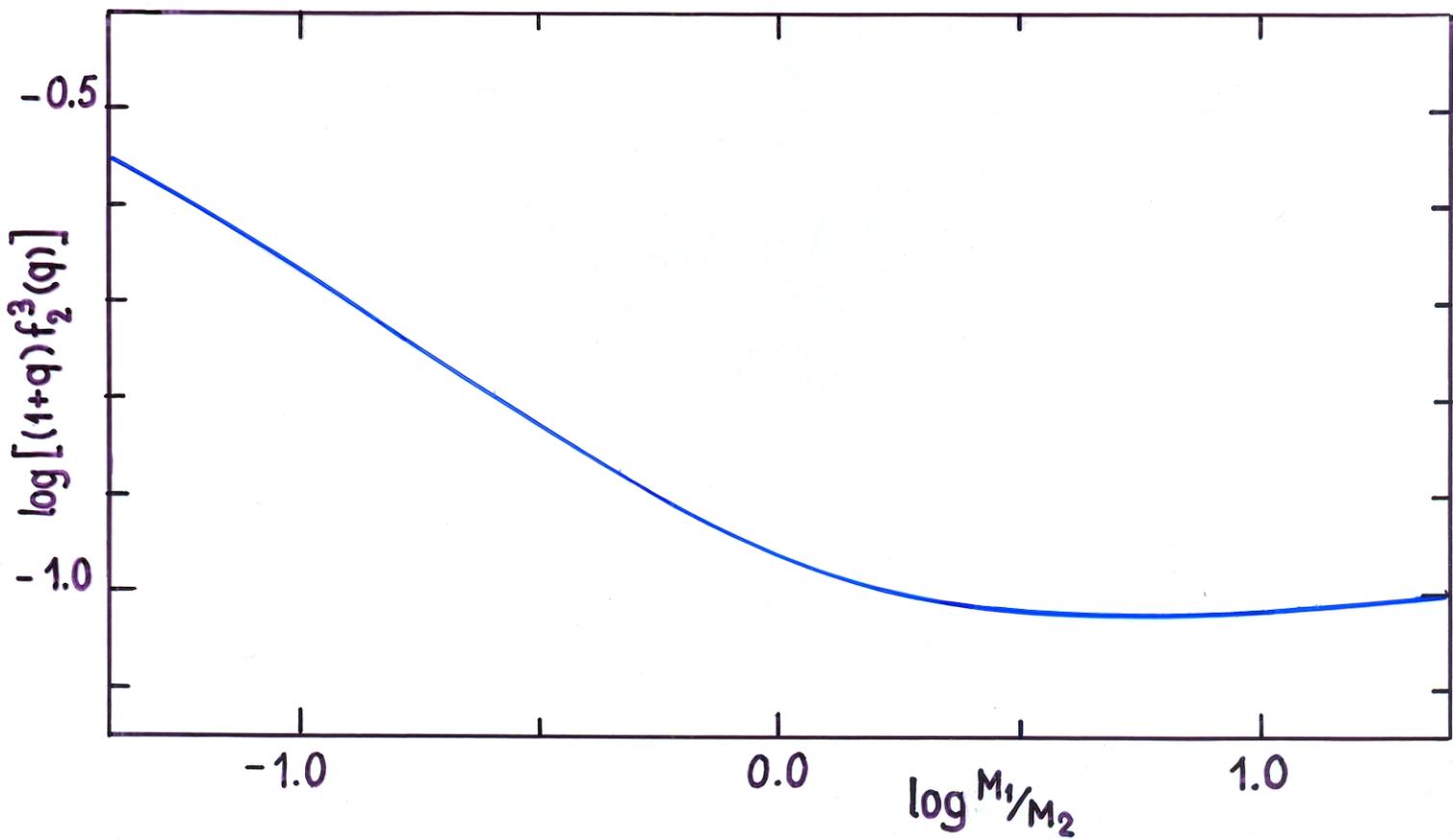
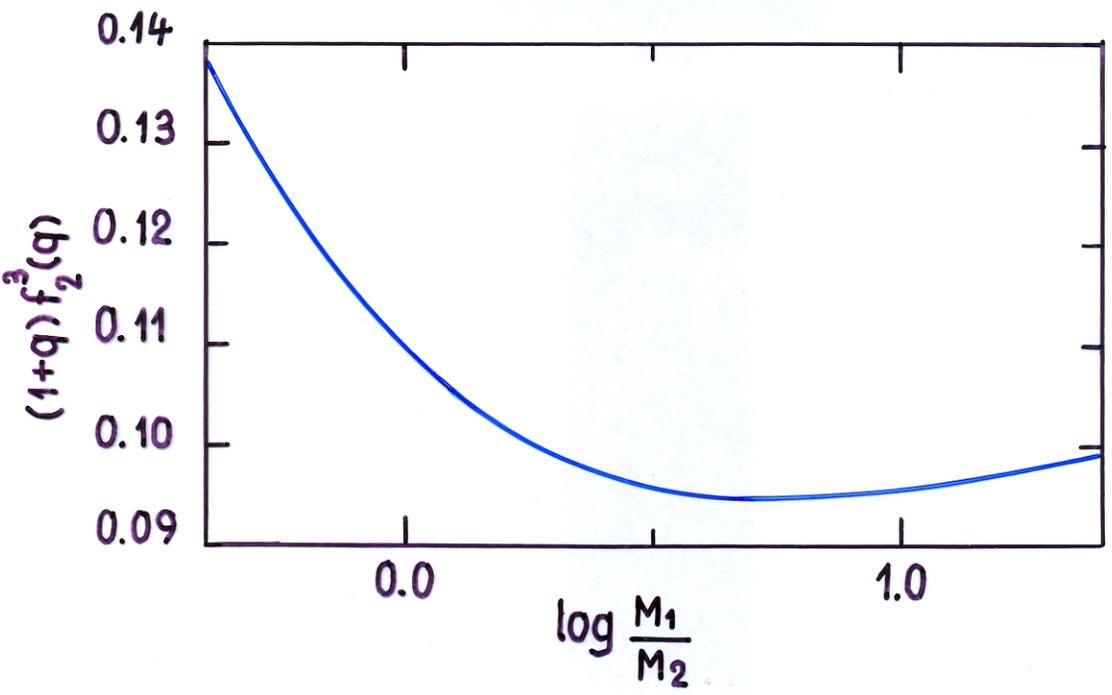
h) Wie gut ist die Näherung $(1+q)f_2^3(q) = \text{const. ?}$

Wichtig, weil $P = P(\bar{\xi}_2)$, wenn $(1+q)f_2^3(q) = \text{const.}$

► Aus den Figuren geht hervor, dass

$(1+q)f_2^3(q) \approx \text{const.} \approx 0.1$, wenn $q = \frac{M_1}{M_2} \gtrsim 1.25$

(Genauigkeit der Näherung besser als ~5%)



3. Stationärer und instationärer Massentransfer, Stabilität von stationärem Massentransfer

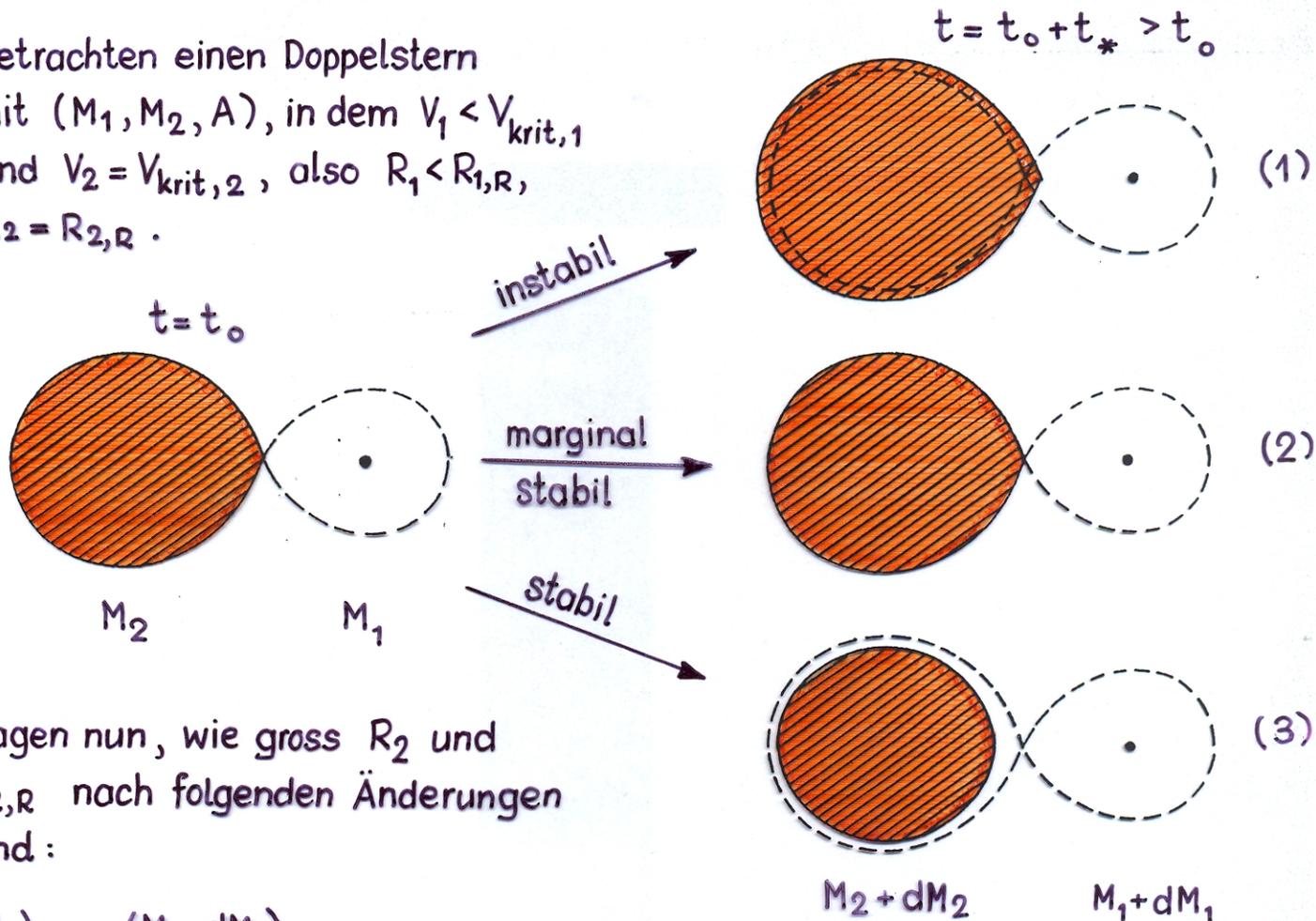
1. Teil

- Qualitative Diskussion des Stabilitätsproblems
- Formale Behandlung des Massentransfers
 - Herleitung der Stationaritätsbedingung
 - Berechnung der zeitlichen Ableitung des Roche–Radius
 - Formale Berechnung der zeitlichen Ableitung des Sternradius
 - Adiabatischer und thermischer Gleichgewichts–Masse–Radius–Exponent
 - Implizite Bestimmung der stationären Massentransferrate
 - Stabilität von stationärem Massentransfer
 - Das kritische Massenverhältnis
 - Instationärer Massentransfer
- Veränderung der Bahnperiode unter Massentransfer

1. Stabilität von Massentransfer: qualitative Diskussion

- Was passiert, wenn der Sekundärstern gerade sein kritisches Roche-Volumen ausfüllt und etwas Masse verliert? Verstärkt sich der Massenverlust? → dazu ein Gedankenexperiment:

Betrachten einen Doppelstern mit (M_1, M_2, A) , in dem $V_1 < V_{\text{krit},1}$ und $V_2 = V_{\text{krit},2}$, also $R_1 < R_{1,R}$, $R_2 = R_{2,R}$.



Fragen nun, wie gross R_2 und $R_{2,R}$ nach folgenden Änderungen sind:

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ J \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M_1 + dM_1 \\ M_2 + dM_2 \\ J + dJ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R_2 \\ R_{2,R} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R_2 + dR_2 \\ R_{2,R} + dR_{2,R} \end{pmatrix}$$

- Es sind drei Fälle denkbar:

- 1) nachher ist R_2 formal grösser als $R_{2,R}$ → Verstärkung des Massentransfers → System ist instabil gegen Massentransfer
- 2) nachher ist $R_2 = R_{2,R}$ → System ist marginal stabil gegen Massentransfer
- 3) nachher ist $R_2 < R_{2,R}$ → Massentransfer hört von selbst auf → System ist stabil gegen Massentransfer

2. Formale Behandlung des Massentransfers

2.1 Formaler Ansatz für die Massentransferrate

► Nehmen an, dass

$$\dot{M}_{tr} = -\dot{M}_2 = f(\Delta R), \quad (1)$$

wobei

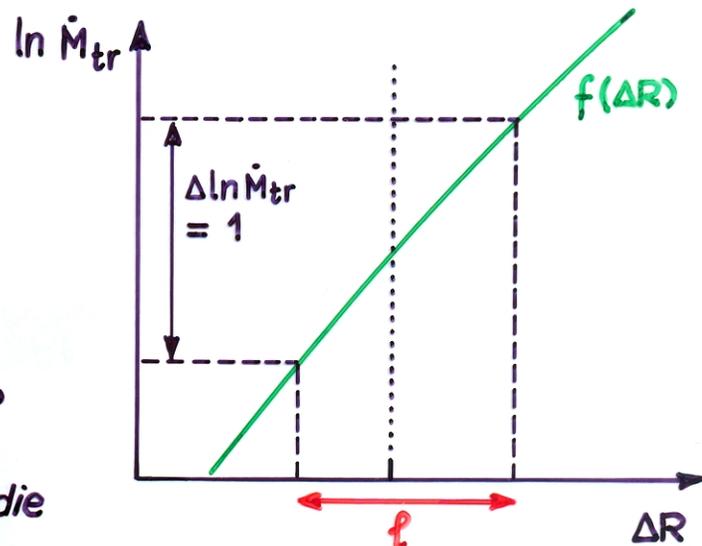
$$\Delta R = R_2 - R_{2,R}, \quad (2)$$

und $\partial f / \partial \Delta R > 0$. \rightarrow Je grösser ΔR , desto grösser \dot{M}_{tr} . Die Steilheit des Anstiegs von \dot{M}_{tr} mit ΔR wird durch die

► **charakteristische Länge**

$$\ell = \frac{\partial \Delta R}{\partial \ln f} \quad (3)$$

beschrieben.



► Werden später zeigen, 1.) dass $\ell \approx H_p =$ photosphärische Druckskalenhöhe, und
2.) dass für alle hier interessierenden Sterntypen (HR, Riesen) $H_p / R \lll 1$.
 \rightarrow Sterne haben einen ziemlich scharfen Rand!

► Folge von $\ell / R \lll 1$: Bei Systemen mit Massentransfer muss $|\Delta R| \lesssim$ wenige ℓ , d.h. $\Delta R / R \lll 1$ sein, sonst entweder riesiges \dot{M}_{tr} ($\Delta R > 0$), oder $\dot{M}_{tr} \approx 0$ ($\Delta R < 0$).

► \rightarrow d.h. in guter Näherung dürfen wir $R_2 = R_{2,R}$ setzen,
(ausser zur Berechnung von ΔR).

2.2 Die Stationaritätsbedingung

Massentransfer ist stationär, wenn

$$\dot{M}_{tr} = -\dot{M}_2 = \frac{df(\Delta R)}{dt} = 0. \quad (4)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \Delta R} \frac{d\Delta R}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \Delta R} \frac{d}{dt} (R_2 - R_{2,R}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \ln f}{\partial \Delta R} f R_2 \left[\frac{\dot{R}_2}{R_2} - \frac{\dot{R}_{2,R}}{R_{2,R}} \right] = \frac{\partial f}{\partial t} + (-\dot{M}_2) \frac{R_2}{\ell} \left[\frac{\dot{R}_2}{R_2} - \frac{\dot{R}_{2,R}}{R_{2,R}} \right] \end{aligned}$$

wird

$$-\dot{M}_2 = \frac{\partial f}{\partial t} + (-\dot{M}_2) \frac{R_2}{\ell} \left[\frac{\dot{R}_2}{R_2} - \frac{\dot{R}_{2,R}}{R_{2,R}} \right]. \quad (5)$$

Da wir annehmen wollen, dass f nicht explizit von t abhängt, d.h. $\partial f/\partial t = 0$, wird

$$-\dot{M}_2 = -\dot{M}_2 \frac{R_2}{\ell} \left[\frac{\dot{R}_2}{R_2} - \frac{\dot{R}_{2,R}}{R_{2,R}} \right]. \quad (6)$$

Da im Allg. $-\dot{M}_2$, R_2 und $\ell \neq 0$, folgt aus (4) und (6)

$$\underline{\underline{\frac{\dot{R}_2}{R_2} = \frac{\dot{R}_{2,R}}{R_{2,R}}}} : \text{ die formale } \underline{\underline{\text{Stationaritätsbedingung}}} \quad (7)$$

Interpretation

Gleichung (7): Damit es überhaupt zu Massentransfer kommt, muss $R_2 \approx R_{2,R}$ mit $\Delta R/R_2 \lll 1$ sein. Soll der Massentransfer weder aufhören noch stark anwachsen, so muss $\forall t$ $\Delta R/R_2 \lll 1$ gelten, d.h. $\dot{R}_2 = \dot{R}_{2,R}$.

Gleichung (6): Man beachte den Faktor $R_2/\ell \ggg 1$ vor der Klammer!
 \rightarrow Bereits geringe Abweichungen von der Stationarität führen zu grossen Änderungen in \dot{M}_{tr} !

2.3 Berechnung von $\dot{R}_{2,R} / R_{2,R}$

Ausgangsgleichungen:

$$R_{2,R} = A f_2(q), \quad q = \frac{M_1}{M_2} \quad (8)$$

$$J = \left[\frac{GM_1^2 M_2^2 A}{M_1 + M_2} \right]^{1/2} : \text{ Bahndrehimpuls} \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt daher

$$R_{2,R} = \frac{J^2 (M_1 + M_2) f_2(q)}{GM_1^2 M_2^2} \quad (10)$$

und

$$\frac{\dot{R}_{2,R}}{R_{2,R}} = \left(\frac{\partial \ln R_{2,R}}{\partial \ln M_1} \right)_{M_2, J} \frac{\dot{M}_1}{M_1} + \left(\frac{\partial \ln R_{2,R}}{\partial \ln M_2} \right)_{M_1, J} \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_{2,R}}{\partial \ln J} \right)_{M_1, M_2} \frac{\dot{J}}{J} \quad (11)$$

In einem Doppelstern mit Massentransfer sind die in (11) auftretenden Ableitungen \dot{M}_1, \dot{M}_2 und \dot{J} nicht unabhängig voneinander.

Parametrisierung der Massen- und Drehimpulsverluste:

$$dM_1 \stackrel{\text{def.}}{=} -\eta dM_2 \Leftrightarrow d(M_1 + M_2) = (1 - \eta) dM_2 \quad (12)$$

$$\frac{\dot{J}}{J} \stackrel{\text{def.}}{=} \nu \frac{\dot{M}_1 + \dot{M}_2}{M_1 + M_2} + \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1 + M_2} \quad (13)$$

Der erste Term in (13) beschreibt Drehimpulsverluste, die nur in Verbindung mit Massenverlust aus dem System auftreten (Engl. "consequential angular momentum loss" = CAML). Der zweite Term in (13) beschreibt Drehimpulsverluste, die ohne Massenverlust aus dem System auftreten (z.B. Abstrahlung von Gravitationswellen).

Mit (10), (12) und (13) wird aus (11):

$$\frac{\dot{R}_{2,R}}{R_{2,R}} = \frac{2\eta}{q} \frac{\dot{M}_2}{M_2} - 2 \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \frac{2\nu(1-\eta)}{1+q} \frac{\dot{M}_2}{M_2} + 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1 + M_2} \quad (14)$$

Formal kann man das wie folgt schreiben:

$$\frac{\dot{R}_{2,R}}{R_{2,R}} \stackrel{\text{def.}}{=} \zeta_{R,2} \frac{\dot{M}_2}{M_2} + 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1 + M_2}, \quad (15)$$

wobei

$$\zeta_{R,2} \equiv \left(\frac{\partial \ln R_{2,R}}{\partial \ln M_2} \right) = (1-\eta) \frac{2\gamma+1}{1+q} + \eta \frac{2}{q} - 2 - \beta_2 \left(1 + \frac{\eta}{q} \right) \quad (16)$$

mit

$$\beta_2(q) = \frac{d \ln f_2(q)}{d \ln q} \quad (17)$$

2.4 Formale Berechnung von \dot{R}_2/R_2

Analog zum Ausdruck (15) für $\dot{R}_{2,R}/R_{2,R}$ kann man für \dot{R}_2/R_2 schreiben:

$$\frac{\dot{R}_2}{R_2} = \frac{d \ln R_2}{d \ln M_2} \frac{\dot{M}_2}{M_2} \equiv \zeta_{\text{eff}} \frac{\dot{M}_2}{M_2} \stackrel{\text{def.}}{=} \zeta_2 \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} \quad (18)$$

So geschrieben, sind die Terme ζ_2 und $(\partial \ln R_2 / \partial t)_{\dot{M}_2=0}$ interpretationsbedürftig: Folgende Fallunterscheidung ist erforderlich:

1. Der masseverlierende Stern wird durch den Massenverlust aus dem thermischen Gleichgewicht gebracht. (Das ist, streng genommen, immer so!) Dann ist

$$\zeta_2 \equiv \zeta_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial \ln M_2} \right)_{\text{ad}} : \text{adiabatischer Masse-Radius-Exponent, (19)}$$

beschreibt die Reaktion auf eine instantane Massenänderung

und

$$\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} = \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\text{th}} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\text{nuc}} \quad (20)$$

$(\partial \ln R_2 / \partial t)_{\text{th}}$: Radiusänderung durch thermische Readjustierung

$(\partial \ln R_2 / \partial t)_{\text{nuc}}$: „ „ nukleare Entwicklung

2. Wenn der Stern durch den Massenverlust näherungsweise im thermischen Gleichgewicht bleibt (das ist stets nur eine Näherung), dann ist

$$\zeta_2 \approx \zeta_e = \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial \ln M_2} \right)_e : \text{thermischer Gleichgewichts-Masse-Radius-Exponent} \quad (21)$$

und

$$\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} = \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\text{nuc}} \quad (22)$$

N.B. $(\partial \ln R_2 / \partial t)_{\text{th}} = 0$, da der Stern im thermischen Gleichgewicht bleiben soll, trotz Massenverlusts.

2.5 Implizite Bestimmung der stationären Massentransferrate

Gl. (19) und (20) bzw. (21) und (22) zusammen mit (7) und (15) können nun nach \dot{M}_2/M_2 aufgelöst werden. \rightarrow Implizite Bestimmung der stationären Massentransferrate. Aus (7), (15) und (18) folgt zunächst

$$\blacktriangleright \dot{M}_{tr,e} = -\dot{M}_{2,e} = \frac{M_2}{\zeta_2 - \zeta_{R,2}} \left[\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1+M_2} \right]. \quad (23)$$

Mit Hilfe von (19) und (20) wird

$$\blacktriangleright \dot{M}_{tr,e} = -\dot{M}_{2,e} = \frac{M_2}{\zeta_{ad} - \zeta_{R,2}} \left[\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{th} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{nuc} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1+M_2} \right], \quad (24)$$

bzw. mit (21) und (22)

$$\blacktriangleright \dot{M}_{tr,e} = -\dot{M}_{2,e} = \frac{M_2}{\zeta_e - \zeta_{R,2}} \left[\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{nuc} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1+M_2} \right]. \quad (25)$$

Damit das Vorzeichen von $\dot{M}_{tr,e}$ stimmt, muss offensichtlich gelten:

$$\blacktriangleright \zeta_{ad} - \zeta_{R,2} > 0 \Leftrightarrow \text{Bedingung für adiabatische Stabilität gegen Massentransfer} \quad (26)$$

bzw.

$$\blacktriangleright \zeta_e - \zeta_{R,2} > 0. \Leftrightarrow \text{Bedingung für thermische Stabilität gegen Massentransfer} \quad (27)$$

Interpretation von (24) und (25)

1. Ist ein System adiabatisch und thermisch stabil gegen Massentransfer, so muss der Massentransfer angetrieben werden.
2. Als Antriebsmechanismen kommen in Frage: 1. nukleare Entwicklung des Sekundärsterns ($(\partial \ln R_2 / \partial t)_{nuc} > 0$), 2. Drehimpulsverluste ($(\partial \ln J / \partial t)_{M_1+M_2} < 0$, und 3. thermische Relaxation des Sekundärsterns, sofern $(\partial \ln R_2 / \partial t)_{th} > 0$. N.B. CAML können Massentransfer nicht antreiben. Deren Einfluss steckt in $\zeta_{R,2}$.
3. Bleibt der Sekundärstern im thermischen Gleichgewicht, fällt die thermische Relaxation als Antriebsmechanismus auf jeden Fall aus, da definitionsgemäss $(\partial \ln R_2 / \partial t)_{th} = 0$.

2.6 Stabilität von stationärem Massentransfer

Wollen die Stabilitätsbedingungen (26) und (27) beweisen. Gleichungen (5), (15) und (18) ergeben

$$-\ddot{M}_2 = -\dot{M}_2 \frac{R_2}{\ell} \left[(\zeta_2 - \zeta_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1+M_2} \right]. \quad (28)$$

Angenommen Massentransfer sei stationär, d.h. $\dot{M}_2 = \dot{M}_{2,e}$. Nun werde der Massentransfer gestört, so dass $\dot{M}_2 = \dot{M}_{2,e} + \delta \dot{M}_2$. Wie entwickelt sich die Störung $\delta \dot{M}_2(t)$? \dot{M}_2 in (28) eingesetzt ergibt

$$-\ddot{M}_2 = \underbrace{-\dot{M}_{2,e}}_{=0} - \delta \ddot{M}_2 = -\dot{M}_2 \frac{R_2}{\ell} \left[(\zeta_2 - \zeta_{R,2}) \frac{\dot{M}_{2,e} + \delta \dot{M}_2}{M_2} + \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{n_2} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right) \right]. \quad (29)$$

(23) in (29) eingesetzt ergibt sodann

$$\frac{d}{dt} (-\delta \dot{M}_2) = -(-\dot{M}_2) \frac{R_2}{\ell} (\zeta_2 - \zeta_{R,2}) \frac{-\delta \dot{M}_2}{M_2}. \quad (30)$$

Betrachten M_2 , R_2 , ℓ und $\zeta_2 - \zeta_{R,2}$ als konstant auf der hier relevanten Zeitskala. Dann folgt aus (30), dass

$$-\delta \dot{M}_2(t-t_0) = -\delta \dot{M}_2(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_{\dot{M}_2}}}, \quad (31)$$

wobei

$$\tau_{\dot{M}_2} = \frac{\delta \dot{M}_2}{\delta \ddot{M}_2} = \frac{\ell}{R_2} \frac{M_2}{(-\dot{M}_2)} \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_{R,2}} = \frac{\ell}{R_2} \frac{\tau_{M_2}}{\zeta_2 - \zeta_{R,2}}. \quad (32)$$

Dabei ist

$$\tau_{M_2} = \frac{M_2}{-\dot{M}_2} \quad (33)$$

die momentane Zeitskala des Massentransfers.

Ergebnis:

1. Da $\tau_{M_2} > 0$, wächst die Störung exponentiell, wenn $\tau_{\dot{M}_2} < 0$, d.h. wenn $\zeta_2 - \zeta_{R,2} < 0$, und zerfällt exponentiell, wenn $\tau_{\dot{M}_2} > 0$, d.h. $\zeta_2 - \zeta_{R,2} > 0$.
 → Stabilität gegen Störungen, wenn $\zeta_2 - \zeta_{R,2} > 0$. qed.
2. Die relevante Zeitskala ist $\tau_{\dot{M}_2} \approx \ell/R_2 \tau_{M_2} \ll \tau_{M_2}$, sofern nicht $\zeta_2 - \zeta_{R,2} \approx 0$ (marginale Stabilität / Instabilität).

2.7 Das kritische Massenverhältnis

Da $\zeta_{R,2} = \zeta_{R,2}(q, \nu, \eta)$ (\rightarrow Gl. (16)), sind die Stabilitätsbedingungen (26) und (27) für gegebenes η und ν Bedingungen an das Massenverhältnis:

- ▶ $\zeta_{ad} - \zeta_{R,2}(q_{crit,ad}, \eta, \nu) = 0 \rightarrow q > q_{crit,ad}$ für adiabatische (34) Stabilität
- ▶ $\zeta_e - \zeta_{R,2}(q_{crit,th}, \eta, \nu) = 0 \rightarrow q > q_{crit,th}$ für thermische (35) Stabilität

2.8 Stabiler, instationärer Massentransfer

Bei stabilem, instationärem Massentransfer wird $\dot{M}_2(t)$ durch Gl. (28) unter der Nebenbedingung $\zeta_2 - \zeta_{R,2} > 0$ beschrieben. Zwei Extremfälle sind denkbar, entweder 1. $-\dot{M}_2 \ll -\dot{M}_{2,e}$, oder 2. $-\dot{M}_2 \gg -\dot{M}_{2,e}$.
Wollen beide Fälle näher betrachten:

$$1. \underline{-\dot{M}_2 \ll -\dot{M}_{2,e}} \Leftrightarrow |(\zeta_2 - \zeta_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2}| \ll \left| \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{M_2} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right) \right| \quad (36)$$

Daraus folgt

$$-\dot{M}_2 \approx -\dot{M}_2 \frac{R_2}{\ell} \left[\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1+M_2} \right], \quad (37)$$

oder

$$\tau_{\dot{M}_2} \approx \frac{\ell}{R_2} \left[\left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{\dot{M}_2=0} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1+M_2} \right]^{-1}. \quad (38)$$

Einsetzen von Massentransfer

Die Bedingung $-\dot{M}_2 \ll -\dot{M}_{2,e}$ ist offensichtlich beim Einsetzen von Massentransfer erfüllt. Wollen annehmen, dass der Sekundärstern zu Beginn des Massentransfers im thermischen Gleichgewicht ist, d.h. dass $(\partial \ln R_2 / \partial t)_{th} = 0$. (N.B. das muss nicht so sein.)

▶ Def. nukleare Zeitskala: $\tau_{nuc} = \left(\frac{\partial t}{\partial \ln R_2} \right)_{nuc} \quad (39)$

Def. Drehimpulsverlustzeitskala: $\tau_J = - \left(\frac{\partial t}{\partial \ln J} \right)_{M_1+M_2} \quad (40)$

Gl. (38), (39) und (40) ergeben unter der Voraussetzung, dass $(\partial \ln R_2 / \partial t)_{th} = 0$

$$\tau_{\dot{M}_2} \approx \frac{\ell}{R_2} \left[\frac{1}{\tau_{nuc}} + \frac{2}{\tau_J} \right]^{-1} \quad (41)$$

Können wieder zwei Grenzfälle unterscheiden:

Einsetzen von Massentransfer durch nukleare Entwicklung

Hier ist $\tau_{nuc} \ll \tau_J$. Daher wird aus (41)

► $\tau_{\dot{M}_2} \approx \frac{\ell}{R_2} \tau_{nuc}$: Zeitskala für das Einsetzen von Massentransfer durch nukleare Entwicklung (42)

Einsetzen von Massentransfer durch Drehimpulsverluste

Hier ist $\tau_{nuc} \gg \tau_J$. Damit wird aus (41)

► $\tau_{\dot{M}_2} \approx \frac{\ell}{R_2} \frac{\tau_J}{2}$: Zeitskala für das Einsetzen von Massentransfer durch Drehimpulsverluste (43)

► In jedem Fall ist $\tau_{\dot{M}_2}$ um den Faktor $\ell/R_2 \lll 1$ kürzer als die Zeitskala, auf der der Massentransfer angetrieben wird. → Massentransfer setzt sehr schnell ein, die instationäre Phase ist sehr kurz.

$$2. \underline{-\dot{M}_2 \gg -\dot{M}_{2,e}} \Leftrightarrow \left| (\zeta_2 - \zeta_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} \right| \gg \left| \left(\frac{\partial \ln R_2}{\partial t} \right)_{M_2} - 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right) \right| \quad (44)$$

Damit wird aus (27)

$$-\ddot{M}_2 \approx -\dot{M}_2 \frac{R_2}{\ell} (\zeta_2 - \zeta_{R,2}) \frac{\dot{M}_2}{M_2} \quad (45)$$

und

$$\tau_{\dot{M}_2} \approx -\frac{\ell}{R_2} \tau_{M_2} (\zeta_2 - \zeta_{R,2})^{-1} \quad (46)$$

Wieder finden wir, dass die Zeitskala der Instationarität sehr kurz ist, nämlich um den Faktor $\ell/R_2 (\zeta_2 - \zeta_{R,2})^{-1}$ kürzer als die momentane Zeitskala des Massentransfers. Da $\tau_{\dot{M}_2}$ so kurz ist, darf man R_2/ℓ , M_2 und $(\zeta_2 - \zeta_{R,2})$ als konstant annehmen und (45) lösen. Dabei wird

$$-\dot{M}_2(t-t_0) \approx -\dot{M}_2(t_0) \left[\frac{\ell}{R_2} \frac{\zeta_2 - \zeta_{R,2}}{M_2} (t-t_0) + \frac{1}{-\dot{M}_2(t_0)} \right]^{-1} \quad (47)$$

Eine andere Möglichkeit für instationären Massentransfer entsteht durch

3. plötzliche Störung des stationären Massentransfers

Wenn $-\dot{M}_{2,e} \rightarrow -\dot{M}_2 \neq -\dot{M}_{2,e}$, so folgt mit Gl. (28)

$$-\ddot{M}_2 = -\dot{M}_2 \frac{R_2}{\ell} \frac{\dot{M}_2 - \dot{M}_{2,e}}{M_2} (\zeta_2 - \zeta_{R,2}) \quad (48)$$

oder

$$\tau_{\dot{M}_2} = \frac{\ell}{R_2} \frac{M_2}{\dot{M}_2 - \dot{M}_{2,e}} (\zeta_2 - \zeta_{R,2})^{-1}. \quad (49)$$

→ $\tau_{\dot{M}_2}$ ist kurz, sofern \dot{M}_2 genügend verschieden von $\dot{M}_{2,e}$ und das System nicht nur marginal stabil, d.h. $\zeta_2 - \zeta_{R,2} \ll 1$ ist.

$\tau_{\dot{M}_2}$ wird lang, wenn entweder $\dot{M}_2 \approx \dot{M}_{2,e}$ oder $\zeta_2 - \zeta_{R,2} \ll 1$.

→ Erreichen von stationärem Massentransfer, d.h. $\dot{M}_2 = \dot{M}_{2,e}$ dauert formal unendlich lang!

▶ → Stationärer Massentransfer ist stets nur eine Näherung, da im Allg. auch τ_{nuc} und τ_j zeitlich variabel. Die Näherung ist umso besser, je kleiner ℓ/R_2 und je grösser $\zeta_2 - \zeta_{R,2}$, d.h. je stabiler der Massentransfer ist.

3. Veränderung der Bahnperiode unter Massentransfer

Ziel: Berechnung von $\dot{P}(\dot{M}_2)$

Verwenden 3. Keplersches Gesetz:

$$P = 2\pi \left[\frac{A^3}{G(M_1+M_2)} \right]^{1/2} = 2\pi \left[\frac{R_2^3}{GM_2(1+q)f_2^3(q)} \right]^{1/2} \quad (1)$$

und

$$f_2(q) \sim (1+q)^{-1/3}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$P \sim R_2^{3/2} M_2^{-1/2} \quad (4)$$

oder

$$\blacktriangleright \frac{\dot{P}}{P} = \frac{3}{2} \frac{\dot{R}_2}{R_2} - \frac{1}{2} \frac{\dot{M}_2}{M_2} = \frac{1}{2} \left(3 \frac{d \ln R_2}{d \ln M_2} - 1 \right) \frac{\dot{M}_2}{M_2} = \frac{1}{2} \left(3 \zeta_{\text{eff}} - 1 \right) \frac{\dot{M}_2}{M_2} \quad (5)$$

Da $\dot{M}_2 < 0$, ist

$$\blacktriangleright \left. \begin{array}{l} \dot{P} < 0 \\ \dot{P} = 0 \\ \dot{P} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{\text{eff}} > +1/3 \\ \zeta_{\text{eff}} = +1/3 \\ \zeta_{\text{eff}} < +1/3 \end{array} \right. \quad (6)$$

Da (2) nur eine Näherung ist, gelten auch (5) und (6) nur näherungsweise. Die Approximation ist aber gut, sofern $q \gtrsim 1.25$.

Den allgemein gültigen Ausdruck für $\dot{P}(\dot{M}_2)$ erhalten wir auf folgende Weise:

Mit der Gleichung für den Bahndrehimpuls

$$J^2 = \frac{GM_1^2 M_2^2 A}{M_1 + M_2} \quad (7)$$

wird aus (1)

$$P = 2\pi \frac{J^3 (M_1 + M_2)}{G^2 M_1^3 M_2^3} \quad (8)$$

und damit

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln M_1} \frac{\dot{M}_1}{M_1} + \frac{\partial \ln P}{\partial \ln M_2} \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \frac{\partial \ln P}{\partial (M_1 + M_2)} \frac{d \ln (M_1 + M_2)}{dt} + \frac{\partial \ln P}{\partial \ln J} \frac{\dot{J}}{J} \quad (9)$$

Mit

$$\eta = -\frac{\dot{M}_1}{\dot{M}_2} \quad (10)$$

und

$$\nu = \frac{\partial \ln J}{\partial \ln (M_1 + M_2)} \quad (11)$$

wird

$$\frac{\dot{P}}{P} = \mathcal{F}(q, \eta, \nu) \frac{\dot{M}_2}{M_2} + 3 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1 + M_2}, \quad (12)$$

wobei

$$\mathcal{F}(q, \nu, \eta) = \frac{(3\nu+1)(1-\eta)}{1+q} - \frac{3(\eta+q)}{q}. \quad (13)$$

Die Ableitung $(\partial \ln J / \partial t)$ in (12) eliminieren wir mit Hilfe von

$$\frac{\dot{M}_2}{M_2} = \frac{1}{\zeta_{\text{eff}} - \zeta_{R,2}} 2 \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t} \right)_{M_1 + M_2} \quad (14)$$

und erhalten:

$$\blacktriangleright \frac{\dot{P}}{P} = \left[\frac{3}{2} (\zeta_{\text{eff}} - \zeta_{R,2}) + \mathcal{F}(q, \eta, \nu) \right] \frac{\dot{M}_2}{M_2}. \quad (15)$$

Analog zu (6) wird damit

$$\blacktriangleright \left. \begin{array}{l} \dot{P} < 0 \\ \dot{P} = 0 \\ \dot{P} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{\text{eff}} < \zeta_{R,2} - 2\mathcal{F}/3 \\ \zeta_{\text{eff}} = \zeta_{R,2} - 2\mathcal{F}/3 \\ \zeta_{\text{eff}} > \zeta_{R,2} - 2\mathcal{F}/3 \end{array} \right. . \quad (16)$$

Ausserdem gilt noch folgende Identität:

$$2\mathcal{F} = 3\zeta_{R,2} - 1 + \frac{\eta+q}{q} \left(3\beta_2 + \frac{q}{1+q} \right), \quad (17)$$

was mit (2) zu

$$2\mathcal{F} = 3\zeta_{R,2} - 1 \quad (18)$$

führt. (18) in (16) eingesetzt ergibt schliesslich wieder (5).

- Fazit: Das Vorzeichen von \dot{P} hängt praktisch nur vom Wert von ζ_{eff} ab!**