Mögliche Quellen der Viskosität

1) Molekulare Viskosität :

- **Teilchen** : Moleküle, Atome, Ionen, Elektronen (je nach X_i, ϱ, T)
  hier : vorwiegend Ionen & Elektronen (elektr. geladen)
- λ : mittlere freie Weglänge bei Coulomb-Stössen λ_c

$$\lambda_c \approx \frac{m^2 v_p^4}{2\pi N Z_1^2 Z_2^2 e^4} \frac{1}{\ln\Lambda} = \frac{9\, k^2 T^2}{2\pi N Z_1^2 Z_2^2 e^4} \frac{1}{\ln\Lambda} \qquad (\text{mit } m v_p^2 = 3kT)$$

$$\approx 1.2\; 10^{-18}\,\text{cm}\; \frac{T^2(\text{K})}{\varrho(\text{g cm}^{-3})}\, \mu\, \frac{1}{\ln\Lambda} \qquad (\text{mit } Z_1 = Z_2 = 1)$$

($Z_1 e$, $Z_2 e$ = el. Ladung der Stosspartner , N = Teilchendichte)

$\ln\Lambda$ = Coulomb-Logarithmus $\approx 10 + 3.45 \log T(\text{K}) - 1.15 \log N_e(\text{cm}^{-3})$
$\approx 10 - 20$

- v_p : mittlere thermische Geschwindigkeit $\approx$ Schallgeschwindigkeit

$$v_p^2 = \frac{\mathcal{R}}{\mu} T = c_s^2$$

- $$\nu_{mol} \approx 3.6\; 10^{-15}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}\, \frac{T^2(\text{K})}{\varrho(\text{g cm}^{-3})}\, \frac{\mu^{1/2}}{\ln\Lambda}$$

Abschätzung :

$$\left.\begin{array}{l} T \approx 10^4 - 10^5\,\text{K} \\ \varrho \approx 10^{-6}\,\text{g cm}^{-3} \\ R \approx 10^{10}\,\text{cm} \\ M \approx 1 M_\odot \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \nu_{mol} \approx 1 \dots 10^3\,\text{cm}^2/\text{s} \\ \\ Re(\nu_{mol}) \approx 10^{15} \dots 10^{18} \end{array}$$

- In jedem Fall : $Re(\nu_{mol}) \ggg 1$ (Hauptgrund : $\lambda_c \lll R$)

$\rightarrow$ molekulare Viskosität ist extrem klein.

$\rightarrow$ Frage : Können die Scheiben in Kataklysmischen Doppelsternen / LMXBs $\nu = \nu_{mol}$ haben ?

Dazu : Abschätzung der Scheibenmasse

Hatten : $\Sigma \nu = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$

$$\rightarrow \quad M_S = 2\pi \int_{R_*}^{R_a} R\Sigma\, dR = \frac{2\dot{M}}{3\nu}\int_{R_*}^{R_a} R\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]^{1/2} dR$$

$$M_S = \frac{\dot{M}R_a^2}{3\nu}\left\{1-\frac{4}{3}\left(\frac{R_*}{R_a}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{R_*}{R_a}\right)^{2}\right\} \approx \frac{\dot{M}R_a^2}{3\nu} \quad \text{für} \quad R_a \gg R_*$$

$$\rightarrow \quad t_{visc} = \frac{M_S}{\dot{M}} \approx \frac{R_a^2}{\nu}$$

Beispiel: $\dot{M} \approx 10^{-9} M_\odot/a$, $R_a \approx \frac{1}{2} R_\odot$, $\nu \approx 10^3\, cm^2 s^{-1}$

$\rightarrow$ $M_S \approx 40 M_\odot$, $t_{visc} \approx 4\; 10^{10} a$ > Weltalter

- Mit $\nu = \nu_{mol}$ $\nexists$ kein selbstkonsistentes Modell: Bedingung, dass $M_S \ll M_{WZ}$ ist verletzt, mit t_{visc} > Weltalter $\nexists$ keine Stationarität.

- Folgerung : In den beobachteten Scheiben muss $\nu \gg \nu_{mol}$ sein !

$\rightarrow$ Mögliche Ursache für die grosse Viskosität ?

Hinweis : $Re(\nu_{mol}) \gtrsim 10^{14}$

Laborexperimente zeigen, dass Strömungen mit $Re > Re_{krit}$ turbulent werden, wobei $Re_{krit} \approx 10 \cdots 10^3$

- $\rightarrow$ Mit $Re(\nu_{mol}) \gtrsim 10^{14} \gg Re_{krit}$: erwarten, dass die Strömung in der Scheibe hochgradig turbulent ist.

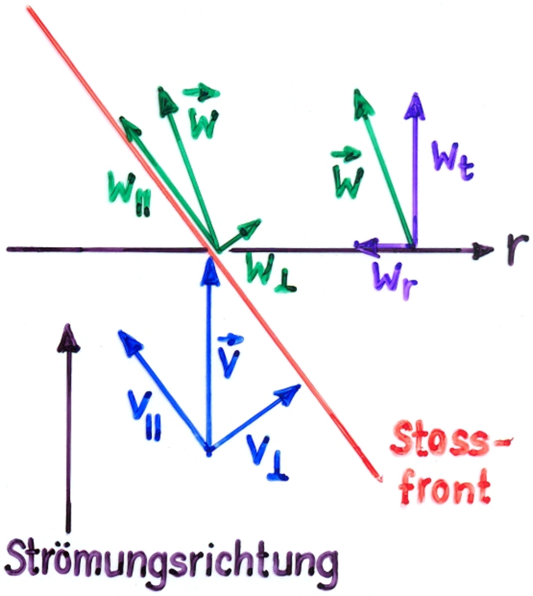
  $\rightarrow$ Viskosität = turbulente Viskosität ν_{turb} ?

2) Stosswellen

- Gezeitenkräfte
- Aufprall der von L_1 kommenden Materie auf den Rand der Scheibe (Hot Spot)

} verursachen spiralförmige Stosswellen in der Scheibe (→ numerische Simulationen)

- Da der Stoss schief zur Strömungsrichtung erfolgt (Stossfront zum Zentrum laufend) ergibt sich nach dem Stoss eine radial nach innen gerichtete Geschwindigkeitskomponente w_r: (→ Figur)



- Vor dem Stoss: $\vec{v} = (0, v_t)$ mit Komponenten $v_{\parallel}$ und $v_{\perp}$ bezüglich der Stossfront.
- Stoss: $v_{\perp} \longrightarrow w_{\perp} < v_{\perp}$
  $v_{\parallel} \longrightarrow w_{\parallel} = v_{\parallel}$
- Nach dem Stoss: $\vec{w} = (w_r, w_t)$, wobei $|w| < |v|$

↝ Die Strömung wird abgebremst und zum Zentrum abgelenkt.

↝ Stoss wirkt wie Viskosität

- Bei kalten Scheiben ($H/R = c_s/v_\varphi \ll 1$) sind die Spiralen der Stossfronten sehr eng gewunden (Windungszahl $O(R/H)$). Daher ist $v_{\perp} \ll v_{\parallel}$ ↝ $w_r \ll w_t$ ↝ nur geringe Viskosität

$$\nu \approx 10^{-2} H c_s \left(\frac{H}{R}\right)^{3/2}$$

3) Magnetfelder

- **Scheibe:** differentiell rotierendes, ionisiertes, d.h. leitfähiges Gas

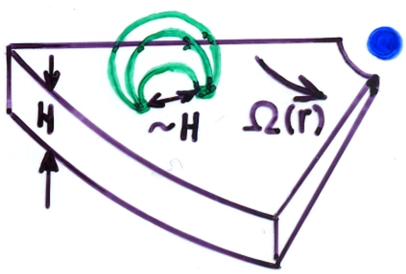
  → allfällige Magnetfelder sind "eingefroren" → noch so kleine Felder werden aufgewickelt und verstärkt. Dazu verstärkt eine lokale, extrem starke Scherungsinstabilität Felder auf der Zeitskala Ω^{-1} (Balbus & Hawley (1991, ApJ 376, 214; 1992, ApJ 400, 610), Hawley & Balbus (1991, ApJ 376, 223; 1992, ApJ 400, 595).

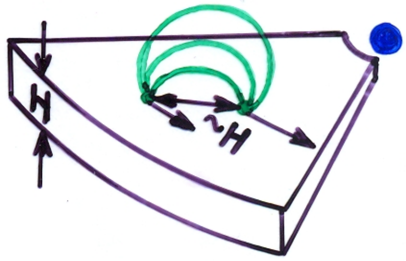
- Quelle der Magnetfelder:
  - selbst erregt (Dynamo, Balbus & Hawley-Instabilität)
  - vom Begleitstern eingeschleppt

- Feldverstärkung wird durch magnetischen Auftrieb der Flussröhren begrenzt, wenn $P_{mag} \approx B^2/8\pi \approx P_G$.

  Aus der Oberfläche austretende Flussröhren können relativ langreichweitige ($\Delta r \sim H$) Verbindungen zu anderen Flussröhren herstellen → magnetische Spannung $\tau_{r\varphi} \approx B_r B_\varphi / 4\pi$ durch differentielle Rotation bremst innen liegende Teile und beschleunigt aussen liegende Teile.

  → Viskosität





- magnetische Viskosität: derzeit der einzige vielversprechende Mechanismus zur Erzeugung starker Viskosität!

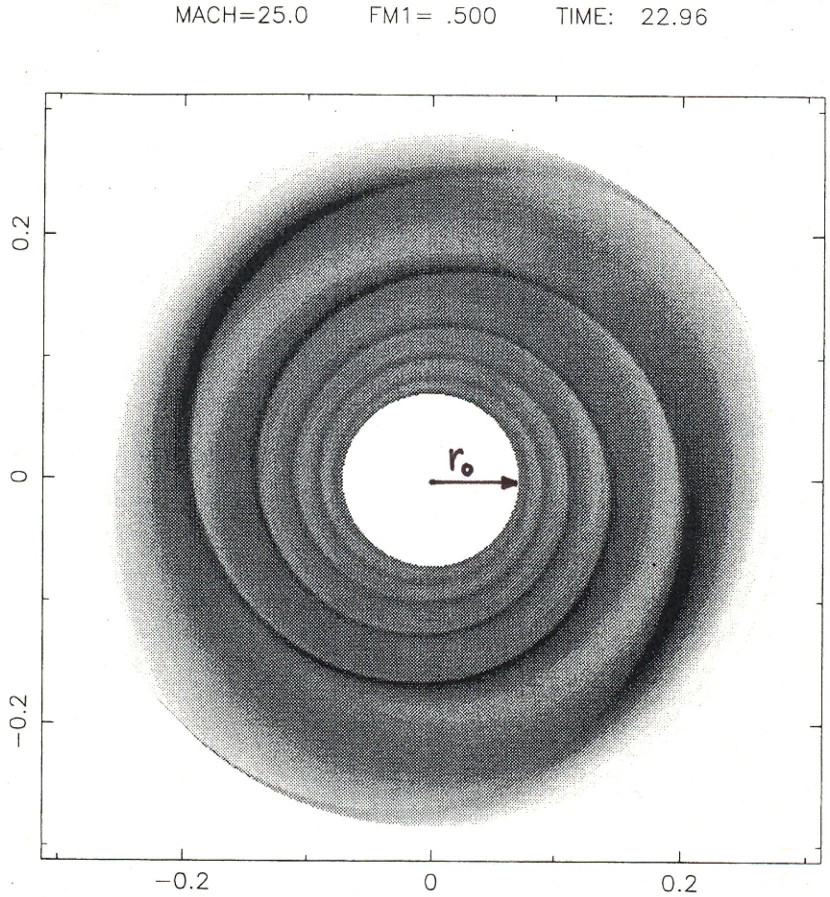
- Problem: ∃ keine "einfache" Theorie für quantitative Aussagen.
  → benötigt 3-dimensionale MHD-Rechnungen.

- Ergebnis: $\boxed{(\tau_{r\varphi})_{mag} \approx 0.4\, P_{mag}}$

(→ z.B. Hawley, Gammie & Balbus (1995, ApJ 440, 742))

Tidally induced shocks in accretion discs in close binary systems

(Savonije, G.J., Papaloizou, J.C.B., Lin, D.N.C.: 1994, MNRAS 268, 13)

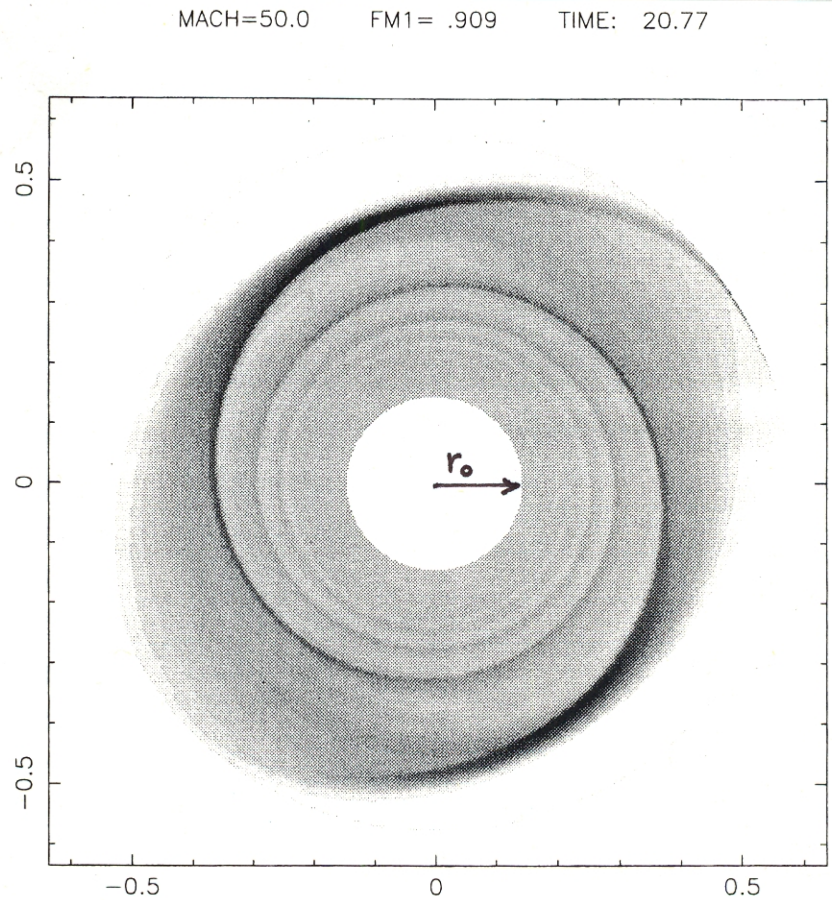


$$\frac{V_\varphi(r_o)}{C_s(r_o)} = 25$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 1$$

$$r_o = 0.071\,A$$

Figure 4. Grey-scale plot of surface density distribution in the disc for model 2 at time 22.96.



$$\frac{V_\varphi(r_o)}{C_s(r_o)} = 50$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 10$$

$$r_o = 0.145\,A$$

Figure 10. Grey-scale plot of surface density distribution in the disc for model 5 at time 20.77.

4) Turbulente Viskosität, der α-Ansatz

- Teilchen : Turbulenzelemente in chaotischer Bewegung
- λ : mittlere freie Weglänge der Turbulenzelemente λ_{turb}
- $\bar{v}_p$: mittlere Turbulenzgeschwindigkeit v_{turb}

- turbulente Viskosität $\nu_{turb} = \frac{1}{3} v_{turb} \lambda_{turb}$

- Problem : $\exists$ bis heute keine brauchbare Turbulenztheorie zur Bestimmung von v_{turb} und λ_{turb}

- $\exists$ lediglich Plausibilitätsargumente für Obergrenze von ν_{turb}:

  1) $\lambda_{turb} \approx$ Grösse der Turbulenzelemente $\lesssim H$ = Dicke der Scheibe

  2) $v_{turb} < c_s$ (Wenn $v_{turb} > c_s \rightarrow \exists$ Stosswellen $\rightarrow$ starke Dissipation, solange bis $v_{turb} \lesssim c_s$)

  $\rightarrow$ Obere Grenze für ν_{turb} : $\nu_{turb} \lesssim H c_s$

- Parametrisierung der Viskosität (Shakura & Sunyaev, 1973)

$$\boxed{\nu = \alpha c_s H} \qquad (25) \quad , \text{ mit } \alpha \lesssim 1$$

- Alle Unkenntnis über ν ist im Parameter α zusammengefasst

  N.B. α braucht nicht konstant durch die Scheibe zu sein; d.h. im allg. $\frac{d\alpha}{dR} \neq 0$.

- Vergleich von Beobachtungen (Ausbrüche von CVs) mit theor. Modellen von α-Scheiben (mit $\nu = \alpha c_s H$) ergibt:

  $\alpha \lesssim 1$ während eines Ausbruchs (Maximum)
  $\alpha \lesssim 0.1$ im Ruhezustand (Minimum)

Abschätzung von ν und Re

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \alpha c_s H \\ H &= \frac{R c_s}{v_\varphi} \\ c_s &= \left(\frac{\mathcal{R}T}{\mu}\right)^{1/2} \end{aligned}\right\}$$

$$\nu = \alpha \frac{c_s^2}{\Omega} = \alpha \frac{\mathcal{R}T}{\mu\Omega} \approx 2\,10^{15}\,\mathrm{cm^2 s^{-1}} \left(\frac{T}{10^4\,K}\right)\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/2}$$

$$Re = \frac{R v_\varphi}{\nu} = \frac{1}{\alpha}\frac{v_\varphi^2}{c_s^2} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R}{H}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\mathcal{M}^2 \,, \quad \mathcal{M} = \text{Mach-Zahl}$$

$$\rightarrow Re = \frac{1}{\alpha}\frac{GM\mu}{\mathcal{R}TR} \approx 1.4\,10^3 \alpha^{-1}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{T}{10^4\,K}\right)^{-1}$$

▶ $\nu(\alpha \approx 1)$ ist sehr viel grösser als ν_{mol} :

$$\nu_{turb} \approx \frac{\lambda_{turb}}{\lambda_c}\nu_{mol} \quad \rightarrow \quad \nu(\alpha\approx 1) \approx \underbrace{\frac{H}{\lambda_c}}_{\ggg 1} \nu_{mol}$$

Zur Selbstkonsistenz von Scheibenmodellen mit α-Viskosität

Hydrostatisches Gleichgewicht in z-Richtung ergibt

$$H = \frac{R c_s}{v_\varphi} \leftrightarrow \frac{H}{R} = \frac{c_s}{v_\varphi} = \frac{1}{\mathcal{M}} \ll 1 \iff v_\varphi \gg c_s$$

▶ Damit $H \ll R$, muss $v_\varphi \gg c_s$, d.h. $\mathcal{M} \gg 1$ sein.

→ geometrisch <u>dünne Scheiben</u> müssen <u>starke Überschall-strömungen</u> sein !

Abweichung von $\Omega(R)$ von der Kepler-Rotation $\Omega_K(R)$:

Betrachten radiale Komponente der Impulsgleichung

$$v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_\varphi^2}{R} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{GM}{R^2} = 0 \quad \Big| : \frac{GM}{R^2}$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{R^2 v_R}{GM}\frac{\partial v_R}{\partial R}}_{1} - \frac{R v_\varphi^2}{GM} + \underbrace{\frac{R^2}{GM\varrho}\frac{\partial P}{\partial R}}_{2} + 1 = 0$$

① Viskositätsterm $\frac{R^2 v_R}{GM}\frac{\partial v_R}{\partial R}$

$$v_R = -\frac{3\nu}{2R}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]^{-1} \approx -\frac{3\nu}{2R} \qquad v_R\frac{\partial v_R}{\partial R} \approx -\frac{9\nu^2}{4R^3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_R}{\partial R} \approx \frac{3\nu}{2R^2} \qquad \approx -\frac{9\alpha^2}{4}\frac{c_s^2}{R}\left(\frac{H}{R}\right)^2$$

$$\rightarrow -\frac{R^2 v_R}{GM}\frac{\partial v_R}{\partial R} \approx \frac{9\alpha^2}{4}\underbrace{c_s^2\frac{R}{GM}}_{\mathcal{M}^{-2}}\underbrace{\left(\frac{H}{R}\right)^2}_{\mathcal{M}^{-2}} \approx \frac{9\alpha^2}{4}\underbrace{\mathcal{M}^{-4}}_{\approx 10^{-6}} \lll 1$$

② Druckterm $\frac{R^2}{GM\rho}\frac{\partial P}{\partial R}$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{1}{R}\underbrace{\frac{P}{\rho}}_{=c_s^2}\underbrace{\frac{\partial \ln P}{\partial \ln R}}_{\approx -1} \approx -\frac{c_s^2}{R} < 0$$

$$\rightarrow -\frac{R^2}{GM\rho}\frac{\partial P}{\partial R} \approx \frac{R}{GM}c_s^2 = \mathcal{M}^{-2} \ll 1$$

▶ Viskositätsterm & Druckterm sind beide negativ $\rightarrow \Omega < \Omega_K$

$$v_\varphi = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2}\left[1 - O(\mathcal{M}^{-2})\right]$$

▶ Keplerrotation, d.h. $\Omega = \Omega_K$ ist eine gute Approximation, wenn $\mathcal{M}^2 \gg 1 \leftrightarrow H^2 \ll R^2$, d.h. wenn die Scheibe geometrisch dünn ist $\leftrightarrow v_\varphi^2 \gg c_s^2$, wenn die Strömung stark überschall ist.

▶ radiale Driftgeschwindigkeit $v_R \approx -\frac{3\nu}{2R} = -\frac{3\alpha c_s H}{2R} = -\frac{3\alpha}{2}c_s\mathcal{M}^{-1}$

$$v_R \approx -\frac{3\alpha}{2}v_\varphi\mathcal{M}^{-2}$$

5. Stabilität der stationären Lösungen

a) Zeitskalen

▶ viskose Akkretionsscheiben sind durch 3 Zeitskalen charakterisiert

1) dynamische Zeitskala = Einstellzeit des hydrostatischen Gleichgewichts in z-Richtung

$$t_{dyn} \approx \frac{H}{c_s} = \frac{R}{v_\varphi} = \frac{1}{\Omega_K(R)} = t_\varphi$$ = Zeitskala des Bahnumlaufs

2) viskose Zeitskala = Diffusionszeitskala

$$t_{visc} \approx \frac{R^2}{\nu} = \frac{R^2}{\alpha c_s H} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{H}{c_s} = \frac{1}{\alpha}\mathcal{M}^2 \frac{R}{v_\varphi} = \frac{1}{\alpha}\mathcal{M}^2 t_{dyn}$$

3) thermische Zeitskala = Einstellzeit des thermischen Gleichgewichts in z-Richtung

$$t_{th} \approx \frac{\text{Wärmeinhalt pro Scheibenfläche}}{\text{Dissipationsrate pro Scheibenfläche}}$$

Teilchenzahl pro Volumeneinh.

Wärmeinhalt pro Volumen $= U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2}\frac{\mathcal{R}}{\mu}\varrho T = \frac{3}{2}\varrho c_s^2$

Wärmeinhalt pro Fläche $= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{2}\varrho c_s^2\, dz = \frac{3}{2}\Sigma c_s^2$

Damit folgt:

$$t_{th} = \frac{3}{2}\frac{\Sigma c_s^2}{2D(R)}$$

$$\Sigma = \frac{\dot M}{3\pi\nu}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

$$D = \frac{3GM\dot M}{8\pi R^3}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

$$t_{th} = \frac{2}{3}\frac{R^3}{GM}\frac{c_s^2}{\nu} = \frac{2}{3}\Omega^{-2}\frac{c_s^2}{\alpha c_s H}$$

$$t_{th} = \frac{2}{3\alpha}\Omega^{-2}\frac{v_\varphi}{R} = \frac{2}{3\alpha}\Omega^{-1} = \frac{2}{3\alpha}t_{dyn}$$

▶ N.B. In Ionisationszonen wird t_{th} länger als nach obiger Abschätzung! Der Grund: die Ionisationsenergie

Ionisationsenergie pro Masseneinheit (für Wasserstoff)

$$= \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{m_p} = 1.3\ 10^{13}\,\mathrm{erg\,g^{-1}}$$

Innere Energie pro Masseneinheit $u = \frac{3}{2}\frac{\mathcal{R}}{\mu}T \approx 1.25\ 10^{12}\,\mathrm{erg\,g^{-1}}\left(\frac{T}{10^4\,\mathrm{K}}\right)\frac{1}{\mu}$

→ in Ionisationszonen $\quad \frac{2}{3\alpha}t_{dyn} \lesssim t_{th} \lesssim 10\,\frac{2}{3\alpha}t_{dyn}$

▶ ∃ eine Hierarchie der 3 Zeitskalen:

$$t_{dyn} = t_{\varphi} \approx \frac{3\alpha}{2}t_{th} \approx \alpha\left(\frac{H}{R}\right)^2 t_{visc}$$

d.h. mit $\alpha \lesssim 1$: $\quad \underline{\underline{t_{dyn} = t_{\varphi} \lesssim t_{th} \ll t_{visc}}}$

b) Stabilität

Sei $\Sigma_0(R)$ eine stationäre Lösung und
$\delta\Sigma(R)$ eine Störung, so dass $\delta\Sigma(R)/\Sigma_0 \ll 1$

Betrachten zeitliche Entwicklung von $\Sigma = \Sigma_0 + \delta\Sigma$

→ ∃ 2 Möglichkeiten:

1) die Störung wächst an, d.h. $\delta\Sigma(R,t) = \delta\Sigma(R,t=0)\,e^{t/|\tau|}$

→ Lösung $\Sigma_0(R)$ ist $\left\{\begin{matrix}\text{dynamisch}\\ \text{thermisch}\\ \text{viskos}\end{matrix}\right\}$ instabil, wenn $\tau \approx \left\{\begin{matrix}t_{dyn}\\ t_{th}\\ t_{visc}\end{matrix}\right.$

oder

2) die Störung klingt ab, d.h. $\delta\Sigma(R,t) = \delta\Sigma(R,t=0)\,e^{-t/|\tau|}$

→ Lösung $\Sigma_0(R)$ ist $\left\{\begin{matrix}\text{dynamisch}\\ \text{thermisch}\\ \text{viskos}\end{matrix}\right\}$ stabil, wenn $\tau \approx \left\{\begin{matrix} t_{dyn} \\ t_{th} \\ t_{visc}\end{matrix}\right.$

c) thermische Instabilität

→ Störung (= Ungleichgewicht zwischen dissipierter & transportierter bzw. abgestrahlter Energie) wächst an mit $\tau \approx t_{th}$

▶ Da $t_{th} \ll t_{visc}$, gilt in guter Näherung für $\Delta t \approx t_{th}$

$\Sigma(R,t) = \Sigma_0(R)$ = const. (in t)

▶ Da $t_{th} \gtrsim t_{dyn}$: → hydrostatisches Gleichgewicht in z-Richtung

$$\rightarrow \; H \approx R\,\frac{c_s}{v_\varphi} = c_s(T_c)\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$$

▶ Stationaritätsbedingung: $Q^+(R,T_c,\dots) = Q^-(R,T_c,\dots)$

$Q^+ = \dfrac{D(R)}{H}$ = Energieerzeugung pro Zeit- und Volumeneinheit

$Q^- = \operatorname{div} F \approx \dfrac{\partial F}{\partial z} \approx \dfrac{4\sigma}{3\tau_z}\,\dfrac{T_c^4}{H}$ = Energieverlust pro Zeit und Volumeneinheit. ($\tau_z > 1$, opt. Tiefe in z-Richtung)

$Q^+ = Q^-$: Bedingung an T_c : → $T_c = T_{c,0}$

Betrachten Störung in T_c : $T_c = T_{c,0} + \delta T_c$

$$\rightarrow \; Q^+(R,T_c,\dots) = Q^+(R,T_{c,0},\dots) + \frac{\partial Q^+}{\partial T_c}\,\delta T_c$$

$$Q^-(R,T_c,\dots) = Q^-(R,T_{c,0},\dots) + \frac{\partial Q^-}{\partial T_c}\,\delta T_c$$

$$\rightarrow \; Q^+ - Q^- = \left(\frac{\partial Q^+}{\partial T_c} - \frac{\partial Q^-}{\partial T_c}\right)\delta T_c$$

▶ Lösung stabil, wenn für $\delta T_c > 0$: $Q^+ - Q^- < 0$, d.h. $\dot{T}_c < 0$

Lösung instabil, wenn für $\delta T_c > 0$: $Q^+ - Q^- > 0$, d.h. $\dot{T}_c > 0$

▶ **Stabilitätskriterium:** $\dfrac{\partial Q^+}{\partial T_c} < \dfrac{\partial Q^-}{\partial T_c}$ oder $\dfrac{\partial \ln Q^+}{\partial \ln T_c} < \dfrac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T_c}$

Beispiel: optisch dicke Scheibe mit Strahlungstransport

$$Q^+ = \frac{D}{H} = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3 H}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

$$H = R\frac{c_s}{v_\varphi} = \left(\frac{\mathcal{R}T_c R^3}{\mu G M}\right)^{1/2}$$

$$\dot{M} = 3\pi\nu\Sigma\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]^{-1}$$

$$\nu = \alpha c_s H = \alpha c_s^2 \Omega_K^{-1}$$

$\rightsquigarrow$ $Q^+ = \dfrac{9}{8}\alpha\underbrace{\Sigma}_{=\text{const. über } \Delta t \approx t_{th}}\left(\dfrac{GM}{R^3}\right)^{1/2}\left(\dfrac{\mathcal{R}T_c}{\mu}\right)^{1/2}$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{\partial \ln Q^+}{\partial \ln T_c} = \dfrac{1}{2}$ (Vor.: $\alpha = \text{const.}$)

$$Q^- = \frac{4\sigma}{3\tau_z}\frac{T_c^4}{H}$$

$$\tau_z = \kappa_R \frac{\Sigma}{2}$$

Ansatz: $\kappa_R = \kappa_0 \varrho^a T^b$
$= (2\pi)^{-a/2}\left(\dfrac{\Sigma}{H}\right)^a T^b$

$\rightsquigarrow$ $Q^- = (2\pi)^{\frac{a}{2}}\dfrac{8\sigma}{3\kappa_0}\left(\dfrac{\mathcal{R}R^3}{\mu G M}\right)^{\frac{a-1}{2}}\Sigma^{-(a+1)}\,T_c^{\frac{7+a-2b}{2}}$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T_c} = \dfrac{7+a-2b}{2}$

$\rightsquigarrow$ thermische Stabilität, wenn $\underline{2b < 6+a}$ ▶ Bedingung an κ!

Beispiel: Kramers' Opazität für g-f-Übergänge: $\kappa_R = \kappa_0 \varrho T^{-7/2}$
$\rightsquigarrow$ $a = 1$, $b = -7/2$

▶ Lösung mit Kramers' Opazität ist thermisch stabil

d) viskose (diffusive) Instabilität

Betrachten jetzt Scheiben auf Zeitskalen $\tau \approx t_{visc} \gg t_{th} \gtrsim t_{dyn}$

$\rightsquigarrow$ jeder Kreisring $(R, \ldots, R+dR)$ ist für sich im thermischen und hydrostatischen Gleichgewicht (in z-Richtung)

Ausgangspunkt : die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{3}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{1/2}\nu\varrho\right)\right) \quad \Big| \int \dots dz \quad \longrightarrow \quad \underline{\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{1/2} f\right)\right)} \;, *$$

wobei $f = \int \varrho(z)\nu(z)\,dz \quad \left(= \nu\Sigma \text{ , wenn } \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0\right)$

▶ N.B. im allg. ist $f = f(\Sigma(R,t), R)$

Ersetzen in $*$ $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$ durch $\frac{\partial f}{\partial t}$:

Weil $df = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_R dt + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)_t dR = \left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma}\right)_R \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}\right)_R dt + \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma}\right)_R \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial R}\right)_t + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)_\Sigma\right\} dR$,

folgt :

▶ $$\underline{\underline{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_R = \frac{3}{R}\left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma}\right)_R \frac{\partial}{\partial R}\left(R^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{1/2} f\right)\right)}}$$

Diffusionsgl. für f bzw. $R^{1/2}f$

Variablensubstitution : Sei $s = 2R^{1/2}$, so folgt

▶ $$\underline{\left(\frac{\partial sf}{\partial t}\right)_s = \frac{12}{s^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma}\right)_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}(sf) = \mathbb{D}\,\frac{\partial^2 (sf)}{\partial s^2}}$$

▶ $\mathbb{D} = \frac{12}{s^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma}\right)_s = \frac{3}{R}\left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma}\right)_R$: Diffusionskoeffizient $\sim \frac{\partial f}{\partial \Sigma}$!

→ stationäre Lösung ist nur dann diffusiv stabil, wenn $\mathbb{D} > 0$, d.h. $\left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma}\right)_R > 0$.

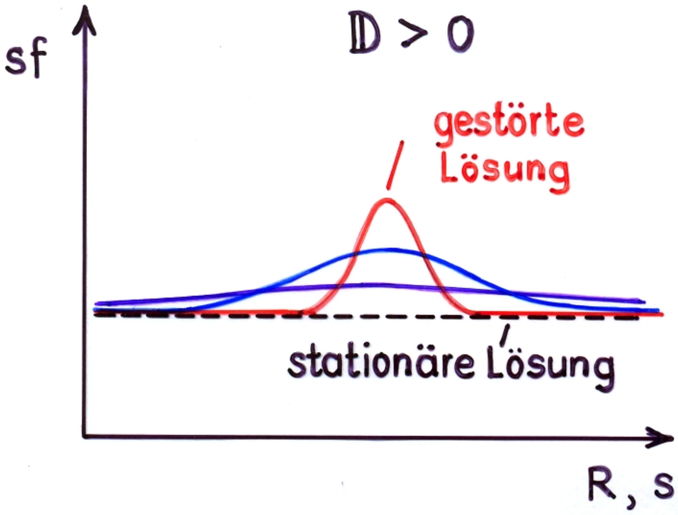
→ Stabilität der stationären Lösung hängt von $f(\Sigma)$ für festes R ab.

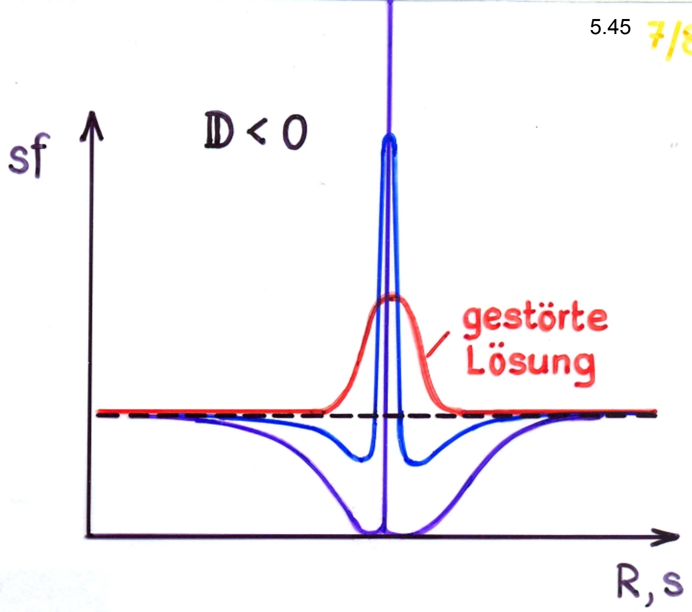
Verhalten der stationären Lösung gegen kleine Störungen :

$\mathbb{D} > 0$: Störung wird durch Diffusion verschmiert und kleiner

$\mathbb{D} < 0$: Störung steilt sich auf → Scheibe zerfällt in Ringe

Schema:





Zur Beziehung $f(\Sigma)$

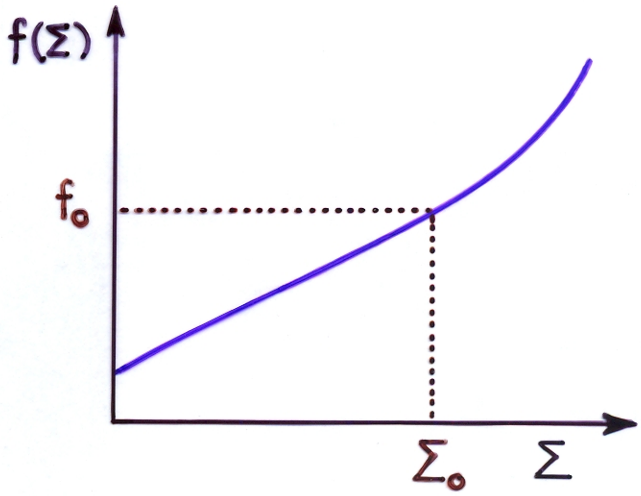
- $f(\Sigma)$ für geg. R ist durch die vertikale Struktur der lokalen stationären Lösung (mit lokalem $\dot{M}$, d.h. lokalem D) bestimmt. Begründung: therm. & hydrost. Gleichgewicht ist eingestellt. → Lokale vertikale Struktur = vertikale Struktur einer stationären Scheibe beim gleichen R mit dem lokalen $\dot{M}$.

- Für den Verlauf von $f(\Sigma)$ gibt es 2 Möglichkeiten:

1) $(\partial f/\partial \Sigma)_R > 0 \quad \forall \Sigma$

→ zu jedem $\dot{M}$ gibt es eine stabile stationäre Lösung, charakterisiert durch $(f_0 = f(\Sigma_0), \Sigma_0)$, wobei

$$\dot{M} = \dot{M}_0 = 3\pi f_0 \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]^{-1}$$



2) $(\partial f/\partial \Sigma)_R$ wechselt ein- oder mehrmals das Vorzeichen

Betrachten hier einen speziellen $f(\Sigma)$-Verlauf, wo zwei $f(\Sigma)$-Bereiche mit $\partial f/\partial \Sigma > 0$ durch einen Bereich mit $\partial f/\partial \Sigma < 0$ verbunden sind (→ Figur).

Nun gibt es 3 Möglichkeiten:

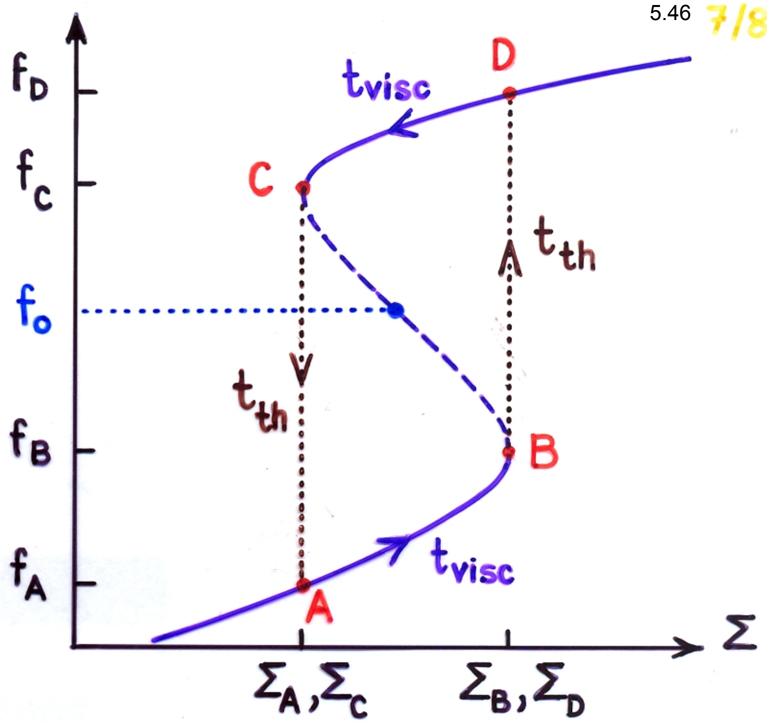
- $\dot{M}_0$ so, dass

  $$f_0 = \frac{\dot{M}_0}{3\pi}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right] > f_C$$

  → stationäre Lösung ist stabil

- $\dot{M}_0$ so, dass $f_0 < f_B$

  → stationäre Lösung ist ebenfalls stabil



- $\dot{M}_B < \dot{M}_0 < \dot{M}_C \Longleftrightarrow f_B < f_0 < f_C$: → stationäre Lösung ist instabil

Was passiert, wenn $f_B < f_0 < f_C$? → $\exists$ Grenzzyklus

Schema des Grenzzyklus':

A → B
$f < f_0 \leftrightarrow \dot{M} < \dot{M}_0$
→ $\dot{\Sigma} > 0$
→ Entwicklung in Richtung Punkt B

$\tau \approx t_{visc}$

bei Punkt B
sobald $\Sigma = \Sigma_B + \delta\Sigma$
→ nächste stabile stationäre Lösung bei Punkt D

B → D
$\tau \approx t_{th}$

D → C
$f > f_0 \leftrightarrow \dot{M} > \dot{M}_0$
→ $\dot{\Sigma} < 0$
→ Entwicklung in Richtung Punkt C

$\tau \approx t_{visc}$

bei Punkt C
sobald $\Sigma = \Sigma_C - \delta\Sigma$
→ nächste stabile stationäre Lösung bei Punkt A

$\tau \approx t_{th}$
C → A

▶ Scheibe versucht sich (lokal) auf die Werte $(f_0, \Sigma_0, \dot{M}_0)$ einzustellen, kann sie jedoch nicht erreichen.

Die Lösung ist <u>lokal</u> diffusiv (viskos) <u>instabil</u>.

6. Vertikale Struktur von Akkretionsscheiben

Bisher: vertikale Struktur nur durch ein 1-Zonen-Modell beschrieben; ist zur Bestimmung von $f(\Sigma)$ unzureichend

→ detailierte numerische Rechnungen erforderlich
(→ z.B. Meyer, F., Meyer-Hofmeister, E.: 1982, Astron. Astrophys. 106, 34)

a) Problemstellung: Berechnung der Vertikalstruktur von Scheiben ist völlig analog zum 1-dim. Sternaufbau (Scheiben = kontinuierliche Sequenz von Modellen "flacher Sterne")

Die Grundgleichungen

$$\frac{dP}{dz} = -g_z \varrho = -\left(\frac{GM}{R^3}\right) \varrho z \qquad ; \text{ hydrost. Gleichgew.}$$

$$\frac{dT}{dz} = \begin{cases} -\dfrac{3 \varkappa \varrho}{4acT^3} F, & \text{wenn } \nabla_{rad} < \nabla_{ad} \quad ; \text{ Strahlungstransport} \\ -g_z \varrho \dfrac{T}{P} \nabla_{conv}, & \text{wenn } \nabla_{rad} > \nabla_{ad} \quad ; \text{ Konvektion} \end{cases}$$

$$\frac{dF}{dz} = \underbrace{\nu \varrho \left(R \frac{d\Omega}{dR}\right)^2}_{\substack{\text{Energieerzeugung} \\ \text{pro Volumen- \& Zeiteinheit}}} = \frac{9}{4} \nu \varrho \left(\frac{GM}{R^3}\right) \qquad ; \text{ Energieerhaltung}$$

mit $\quad \nabla = \dfrac{d \ln T}{d \ln P}$

Randbedingungen (für optisch dicke Scheiben)

bei $z = 0$: $F(z=0) = 0$

bei $z = z_0$: $F(z_0) = \sigma T_{eff}^4 = \dfrac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\dfrac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau + 2/3\right) \quad , \text{ Eddington-Approx. für graue Atmosphäre}$$

→ $z_0 = Z(\tau = 2/3)$, halbe Dicke der Scheibe

Materialfunktionen (analog zum Sternaufbau)

Opazität: $\varkappa(P,T,\vec{X}_i)$ aus Tabellen

Zustandsgleichung : $\varrho(P,T,\vec{X}_i)$, im wesentl. ideales Gas, Strahlung & Ionisation

Energieerzeugungsrate: $\varepsilon(P,T,\vec{X}_i) \rightarrow \nu\varrho\left(R\frac{d\Omega}{dR}\right)^2$

Ansatz für ν: (Meyer & Meyer-Hofmeister, 1982)

$$\nu = \varepsilon\, C_s \underbrace{\left(\frac{-dz}{d\ln P}\right)}_{\text{lokale Druckskalenhöhe}}$$

ε: freier Parameter, $\hat{=}\ \alpha$

$$-\frac{dz}{d\ln P} = \frac{P}{g_z\varrho} = \frac{P}{\Omega^2\varrho z}$$

$\rightarrow \varrho\nu = \varepsilon C_s \frac{P}{\Omega^2 z}$

▶ $\varrho\nu \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow 0$, weil $\left.\frac{-dz}{d\ln P}\right|_{z=0} = \infty$

Beschränkung von $\varrho\nu$ für kleine z:

$$\varrho\nu = \varepsilon\frac{C_s P}{\Omega^2 z} = \varepsilon\frac{\sqrt{2}\,P}{\Omega}\,\frac{1}{\underbrace{\frac{\sqrt{2}\,\Omega z}{C_s}}} \rightarrow \varrho\nu = \varepsilon\frac{\sqrt{2}\,P}{\Omega}\underbrace{\left[1+\frac{2\Omega^2 z^2}{C_s^2}\right]^{-1/2}}$$

$$\rightarrow\ \boxed{\varrho\nu = \varepsilon P\left(\frac{2R^3}{GM}\right)^{1/2}\left[1+\frac{2GM\varrho}{PR^3}z^2\right]^{-1/2}}$$

b) Ergebnisse numerischer Rechnungen

Hier: stellvertretend für zahlreiche Rechnungen die Ergebnisse von Meyer & Meyer-Hofmeister (1982)

Parameter: chem. Zus.: $X=0.739$, $Y=0.240$, $Z=0.021$
Viskosität : $\varepsilon = 1/30$

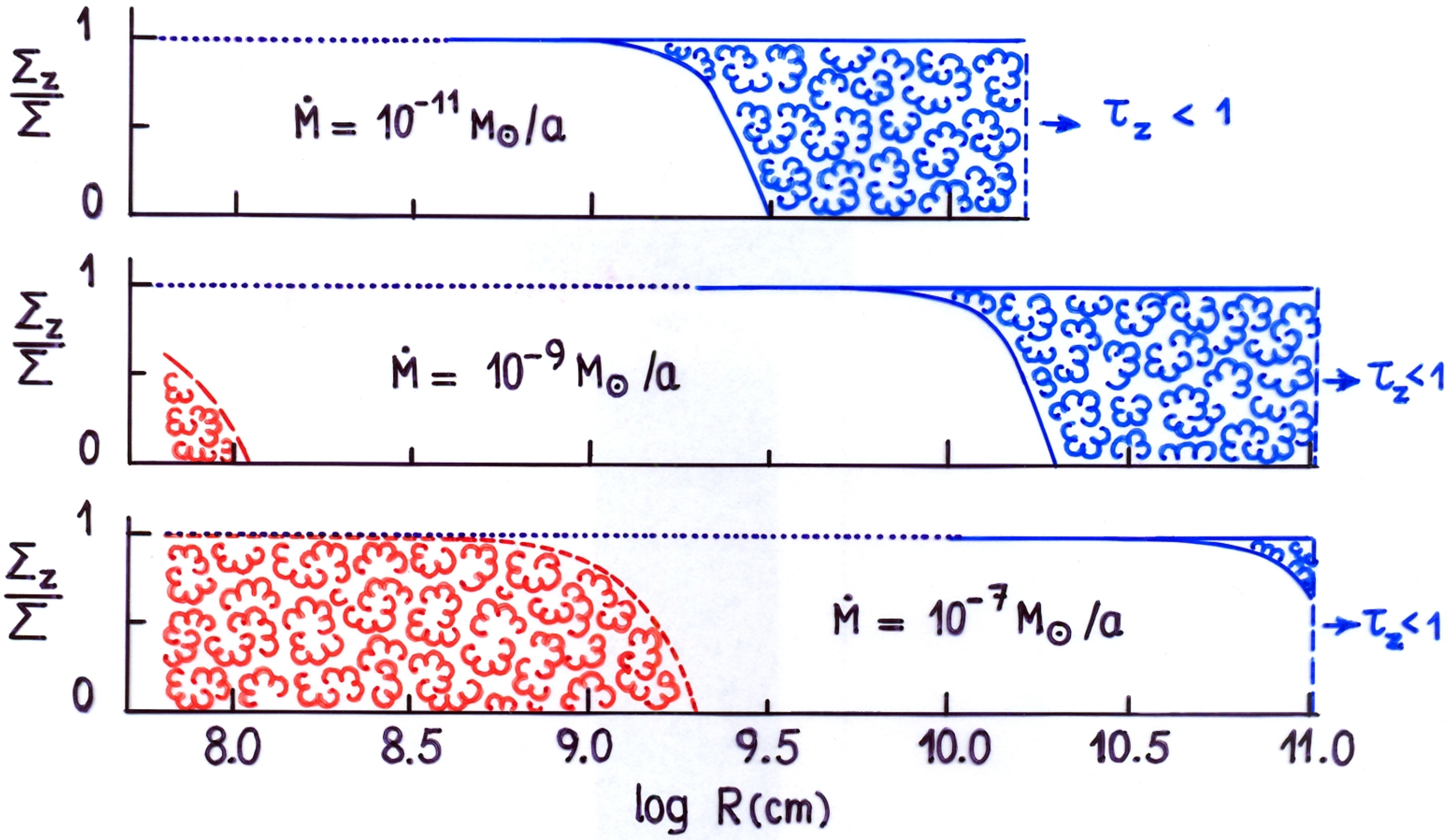
Bemerkung zu ε: $\varepsilon \hat{=} \alpha$ im 1-Zonen-Modell, wobei $\alpha \approx \frac{3}{2}\varepsilon$

$\rightarrow$ mit $\varepsilon = 1/30$, d.h. $\alpha \approx 0.05$ relativ geringe Viskosität

Vertikale Struktur von Akkretionsscheiben

(Meyer & Meyer-Hofmeister, 1982)

Verteilung der Konvektionszonen (für $M = 1 M_\odot$)



Def.: $\Sigma_z = \int_{-z}^{z} \varrho(\xi)\, d\xi$

Zone effektiver Konvektion, $\nabla_{conv} \approx \nabla_{ad} < \nabla_{rad}$

Zone ineffektiver Konvektion, $\nabla_{conv} \approx \nabla_{rad} > \nabla_{ad}$
Strahlungsdruck dominiert

·········· radiative Photosphäre

Einsetzen der Konvektion (äussere Konvektionszone)

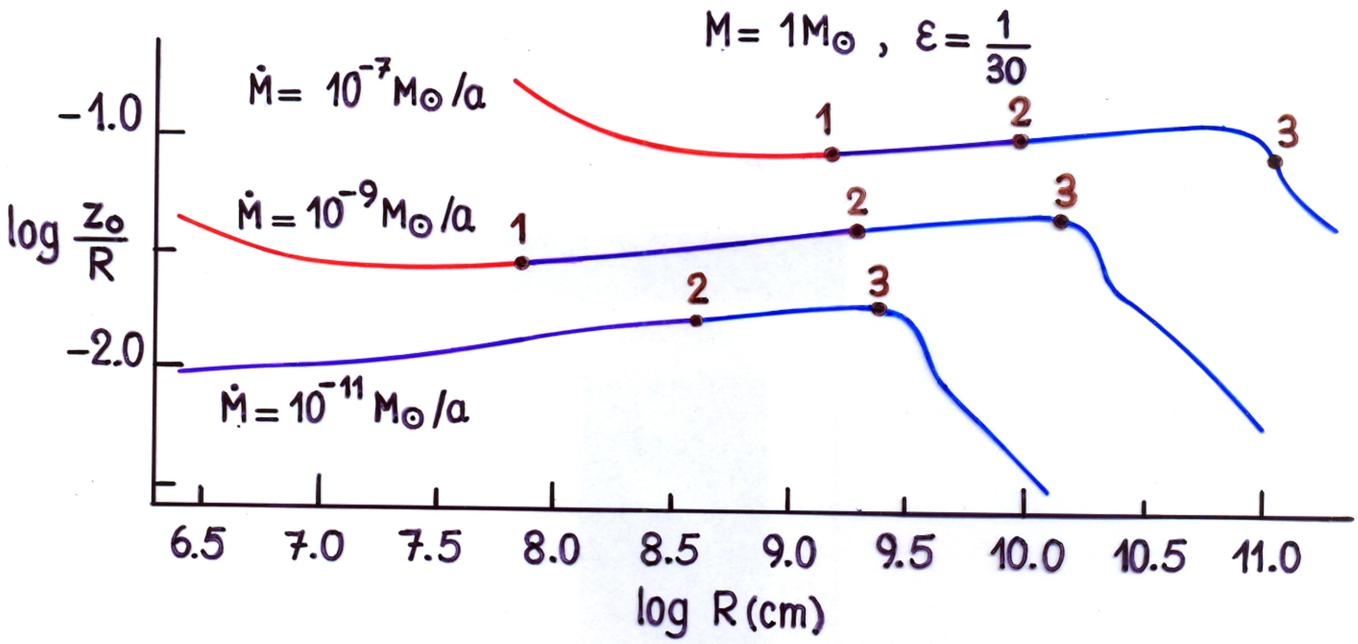
durch partielle Ionisation des Wasserstoffs für $T \lesssim 10^4$ K
$\to \varkappa \uparrow \to \nabla_{rad} \sim \varkappa \uparrow \to \nabla_{rad} > \nabla_{ad}$. Da $T_{eff}^4 \sim M\dot{M}R^{-3}$, verschiebt sich der Radius R_{conv}, wo die Konvektion einsetzt, gemäss

$$\log R_{conv} = \frac{1}{3} \log \dot{M} + \frac{1}{3} \log M + \underbrace{\frac{4}{3} \log T_{conv}}_{\approx \text{ const.}} + \text{const.}$$

Vertikale Struktur von Akkretionsscheiben

(Meyer & Meyer-Hofmeister, 1982)

Vertikale Dicke der Scheibe: Abhängigkeit von $\dot{M}$

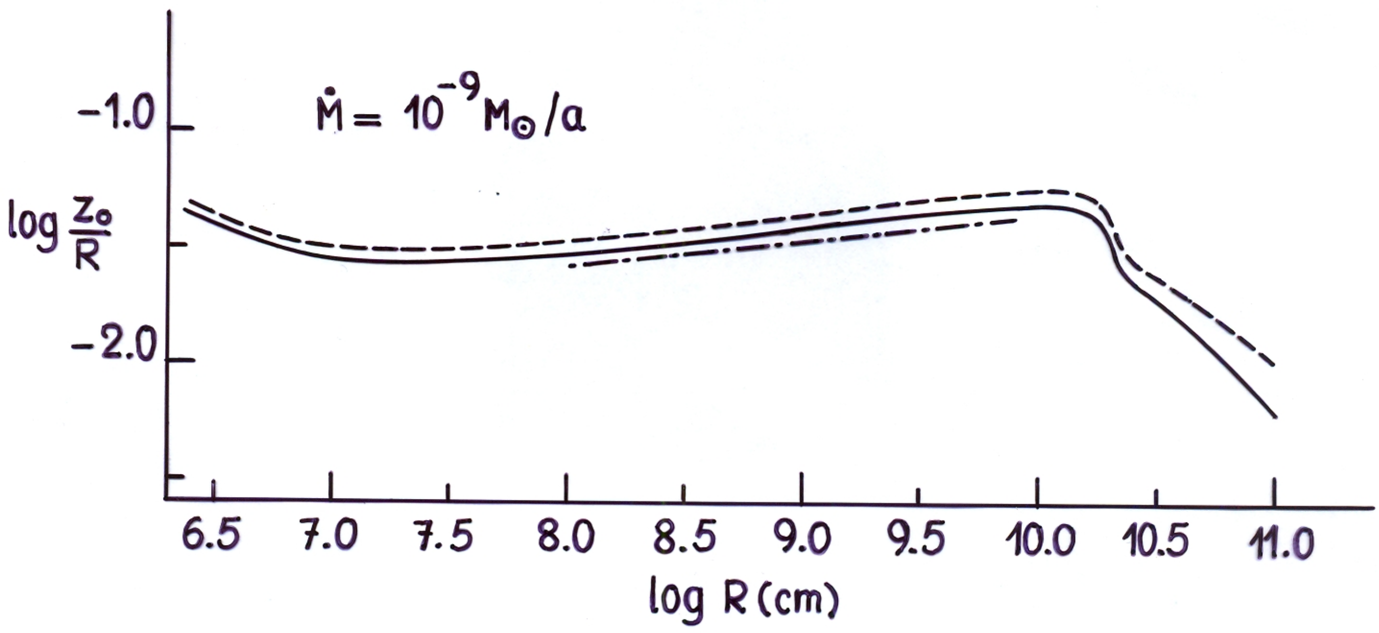


1 : durch Strahlungsdruck bedingte Konvektion erreicht $\Sigma_z/\Sigma = 1/2$

2 : Übergang radiative ↔ konvektive Photosphäre

3 : äussere Konvektionszone erreicht $\Sigma_z/\Sigma = 1/2$

Vertikale Dicke der Scheibe : Abhängigkeit von M & ε



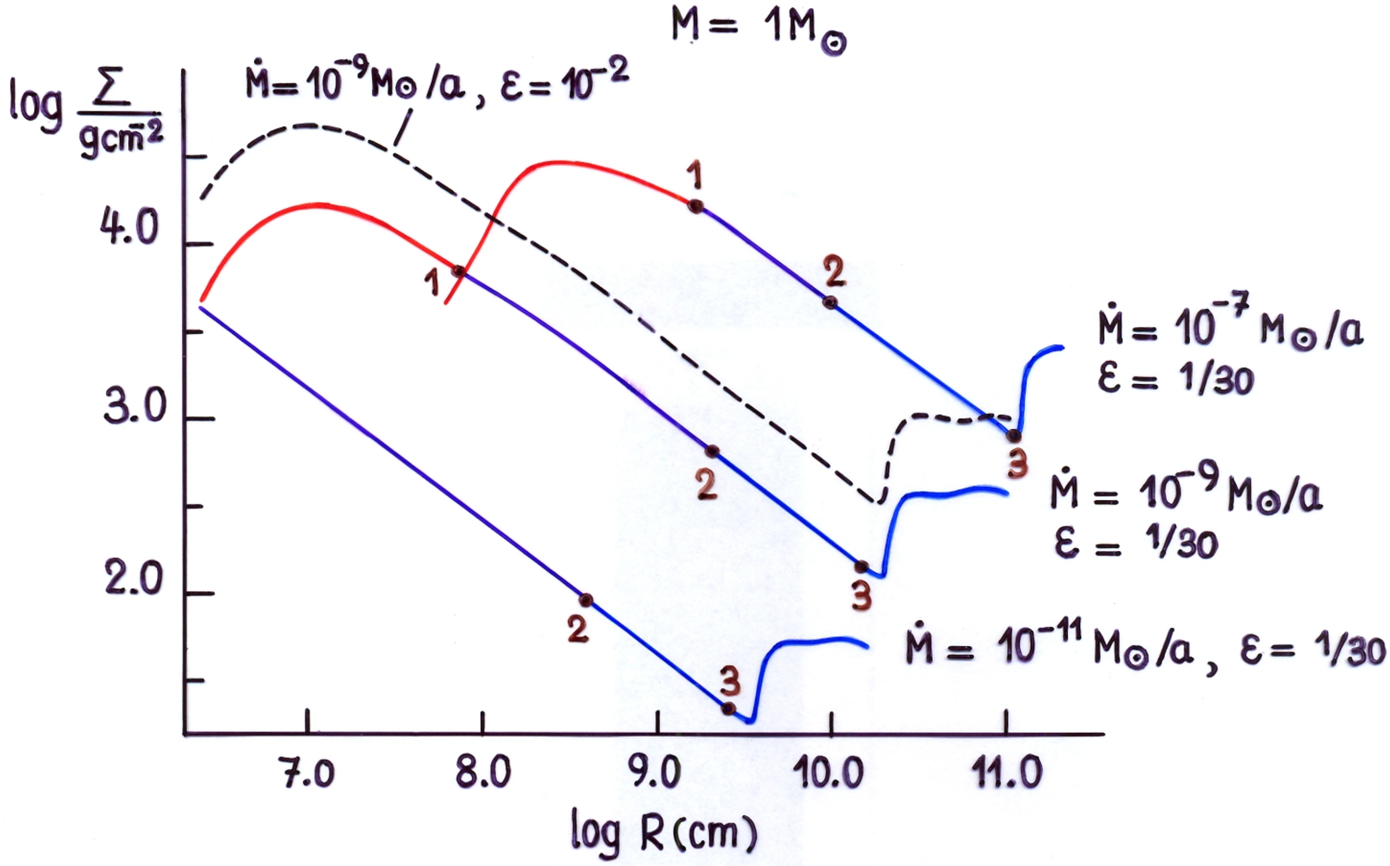
—— $M = 1M_\odot$, $\varepsilon = \frac{1}{30}$; ---- $M = 1M_\odot$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$

-·-·- $M = 1.4M_\odot$, $\varepsilon = \frac{1}{30}$

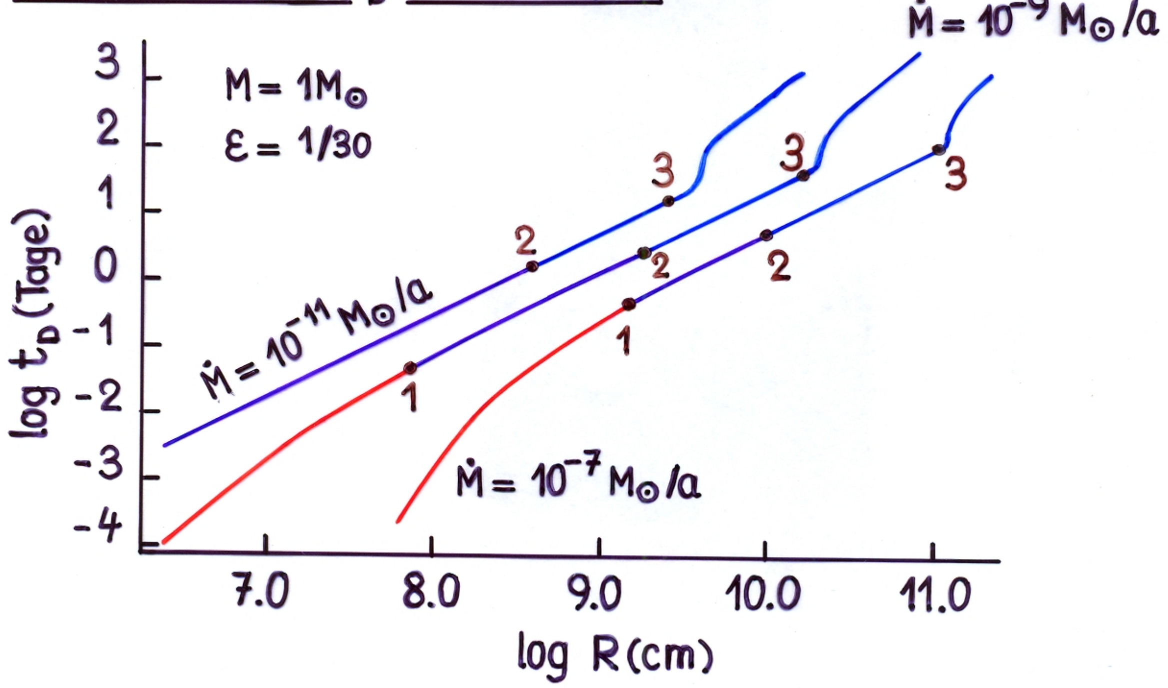
Vertikale Struktur von Akkretionsscheiben

(Meyer & Meyer-Hofmeister, 1982)

Flächendichte $\Sigma(R)$



Diffusionszeit $t_D = 2\pi R^2 \Sigma / \dot{M}$



1 : durch Strahlungsdruck bedingte Konvektion erreicht $\Sigma_z/\Sigma = 1/2$

2 : Übergang radiative ↔ konvektive Photosphäre

3 : äussere Konvektionszone erreicht $\Sigma_z/\Sigma = 1/2$

Die wichtigsten Ergebnisse: (→ Figuren)

1) Für $\dot{M} \lesssim 10^{-7} M_\odot/a$ ist $z_0/R \lesssim 0.1$, d.h. $(z_0/R)^2 \ll 1$ $\forall$ $R \gtrsim 10^8$cm
→ im interessierenden Parameterbereich sind die Scheiben geometrisch dünn

2) in radialer Richtung kann man grob 3 Zonen unterscheiden

Innenzone: Strahlungsdruck dominiert, $\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{z_0}{R}\right) < 0$
wegen Strahlungsdruck ist ∇_a klein
→ $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$ → (ineffektive) Konvektion mit $\nabla_{conv} \approx \nabla_{rad}$

▶ Diese Zone spielt bei Kataklysmischen Doppelsternen ($\dot{M} \lesssim 10^{-8} M_\odot/a$, $R \gtrsim 10^9$cm) keine Rolle

Mittelzone: Gasdruck dominiert, H (und He) vollst. ionisiert, Schichtung ist im wesentlichen radiativ, $\frac{\partial}{\partial R}(z_0/R) > 0$, → Scheibe ist konkav

Nach aussen hin: Einsetzen der unvollst. Ionisation von $z = z_0$ nach innen → oberflächennahe, dünne Konvektionszone

Aussenzone: Gasdruck dominiert, $T_{eff} \lesssim 6000$K, $\exists$ ausgedehnte Ionisationszonen, dort $\varkappa$ gross → $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$
→ ausgedehnte Konvektionszone, bis $z=0$ reichend, $\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{z_0}{R}\right) < 0$, $z_0 \approx$ const.

▶ für $R > R_{max}(M, \dot{M}, \varepsilon)$ wird $\tau_z < 1$: Scheibe wird optisch dünn

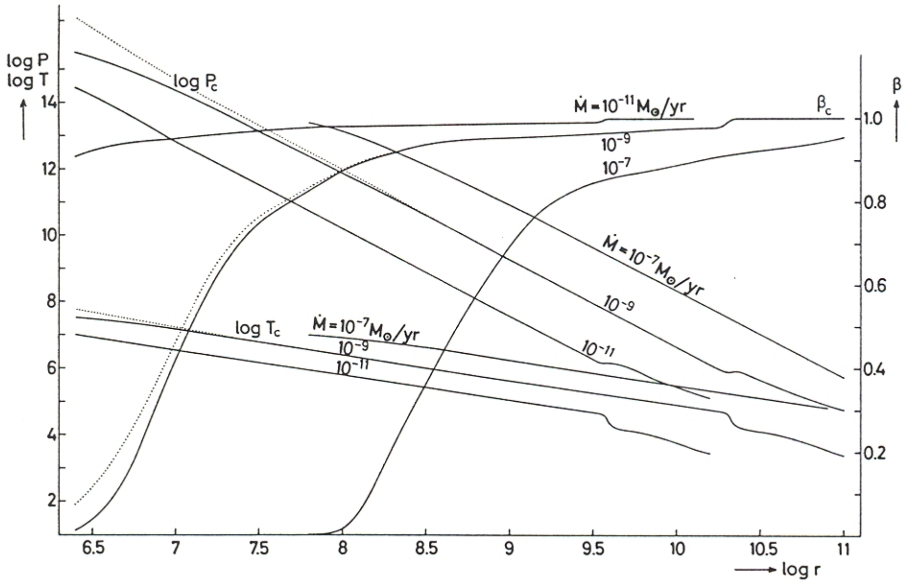
3) Verlauf von $\Sigma(R)$

in der Innenzone: $\frac{\partial \Sigma}{\partial R} > 0$ durch Strahlungsdruck, wenn $\nu \sim P_{tot}$
$\frac{\partial \Sigma}{\partial R} < 0$, wenn $\nu \sim P_{Gas}$

in der Mittelzone: $\frac{\partial \Sigma}{\partial R} < 0$, wobei $\frac{d\log\Sigma}{d\log R} \approx$ const.

Vertikale Struktur von Akkretionsscheiben

Meyer, F., Meyer-Hofmeister, E.: 1982, Astron. Astrophys. 106, 34



$M = 1 M_\odot$

$\varepsilon = \frac{1}{30}$

Fig. 5. Values of pressure, temperature and β in the central plane versus distance r from central object. Dotted lines vicosity proportional to gas pressure instead of total pressure

$\beta = \frac{P_{Gas}}{P_{tot}}$

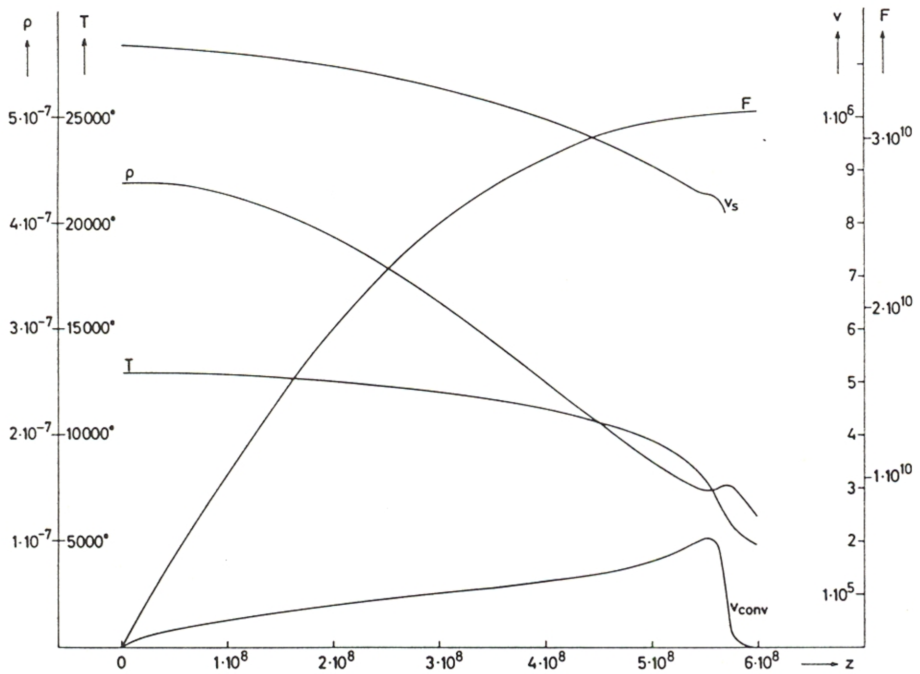


Fig. 6. Vertical disk structure for a typical convective region: density ϱ, temperature T, flux density F, convective velocity v_{conv} and sound velocity v_s for $\dot M = 10^{-9}\ M_\odot$/yr at distance log $r = 10.5$ from central object

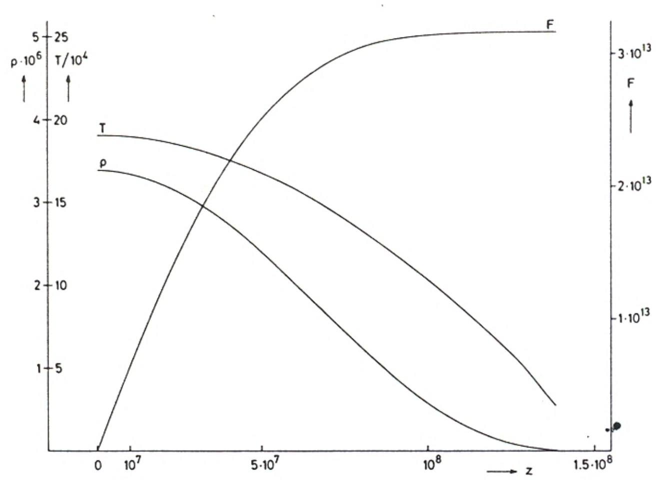


Fig. 7. Vertical disk structure for a typical radiative region: density ϱ, temperature T, flux density F for $\dot M = 10^{-9}\ M_\odot$/yr at distance log $r = 9.5$ from central object

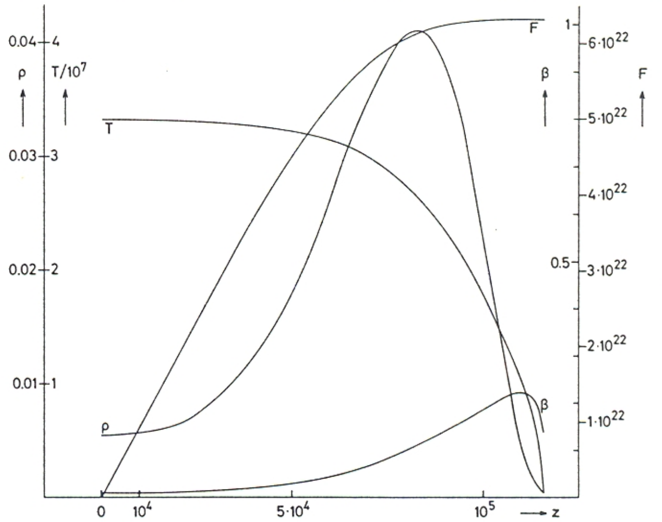


Fig. 8a. Vertical disk structure for a typical radiation pressure dominated region: density ϱ, temperature T, flux density F for $\dot M = 10^{-9}\ M_\odot$/yr at distance log $r = 6.4$ from central object. Viscosity proportional to total pressure

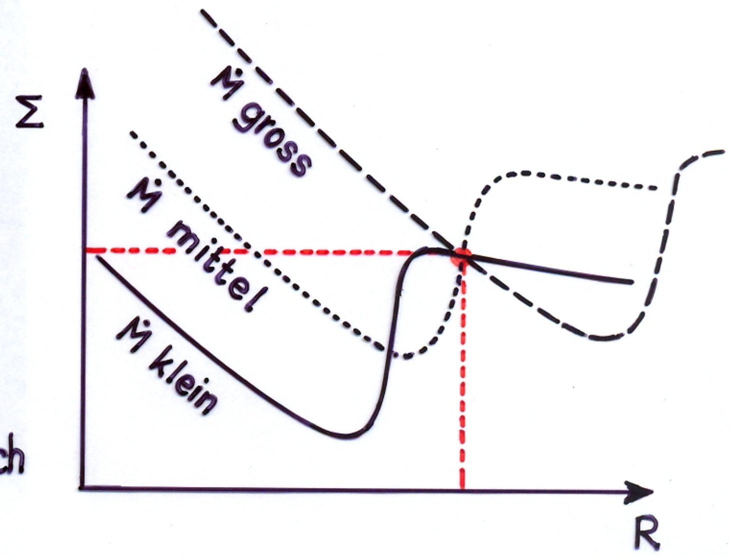
in der Aussenzone : mit dem Einsetzen der Konvektion wird $\frac{\partial \Sigma}{\partial R} > 0$,
in den vollkonvektiven Teilen : $\Sigma \approx$ const.

▶ Σ ist rel. gross in den konvektiven Teilen ! Warum ?

Erklärung : T_{eff} ist klein ($\lesssim 6000$ K)
$\nabla = \nabla_{conv} \approx \nabla_{ad} < \nabla_{rad}$
$\Big\}$ → T(z=0) ist kleiner als bei radiativer Schichtung

→ Wegen geringem T_c ist $\nu \sim T_c$ auch klein
→ Materie diffundiert langsamer ($v_R \sim \nu \sim T$) und staut sich auf → $\Sigma \uparrow$

4) Die f-Σ-Beziehung



Verlauf von $\Sigma(R)$ für verschiedene $\dot{M}$ ermöglicht Überschneidungen, d.h. verschiedene $\dot{M}$ bei gleichem $\Sigma(R)$ (→ Schema)

▶ In einem eingeschränkten Bereich von Σ (für geg. R) $\exists$ 3 mögliche Lösungen für $\dot{M}$:

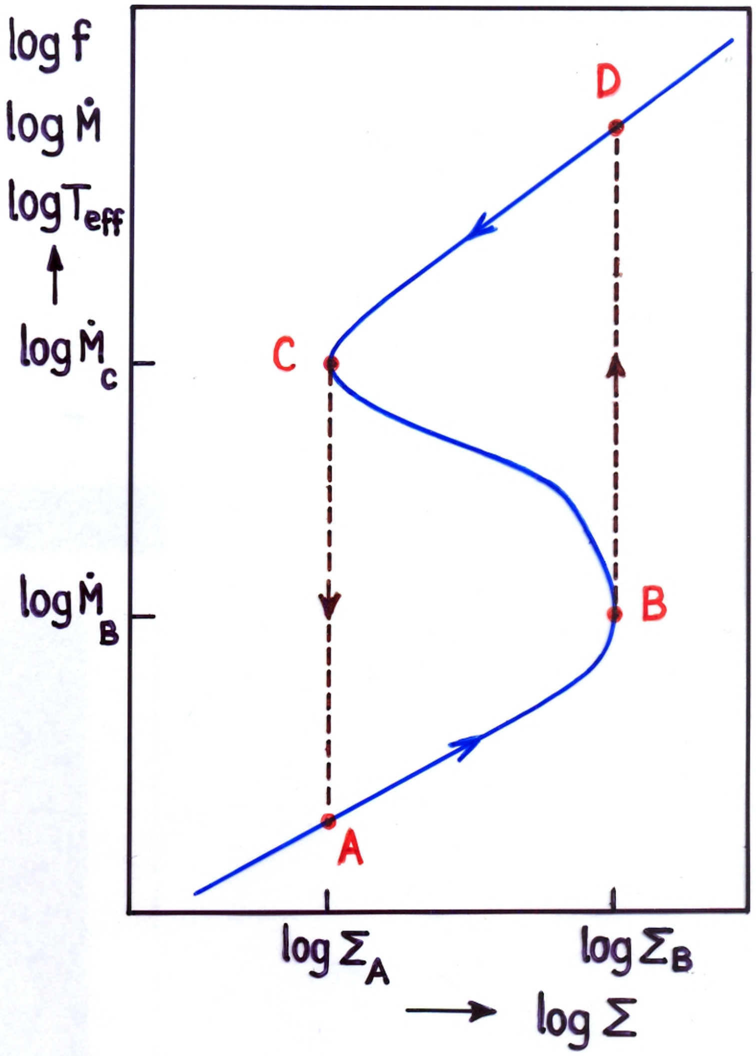
- $\dot{M}$ gross, d.h. ν gross, → Schichtung radiativ, $T_{eff} > 10^4$ K
- $\dot{M}$ klein, d.h. ν klein, → Schichtung vollkonvektiv, $T_{eff} \lesssim 6000$ K
- $\dot{M}$ mittel, d.h. ν mittel, → Schichtung teilweise radiativ, $6000\text{ K} \lesssim T_{eff} \lesssim 10^4$ K

▶ Mit $\dot{M} = 3\pi f \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]^{-1}$ folgt aus $\Sigma(\dot{M}, R)$ durch

Invertierung $f(\Sigma ; R)$

→ Erwarten in einem eingeschränkten Bereich von $\Sigma(R)$, dass es 3 mögliche $f(\Sigma)$ gibt :

$f(\Sigma)$ – Relation für
$R = 10^{10}$ cm und
$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3}$, d.h.
$\nu = \frac{P}{\varrho}\left(R\frac{d\Omega}{dR}\right)$



▶ Vertikale Struktur stationärer Scheiben erlaubt lokale diffusive (viskose) Instabilität, wenn $\dot{M}_B < \dot{M} < \dot{M}_C$

▶ ↝ Frage: Kann diese lokale Instabilität eine globale (kohärente) Instabilität auslösen?

7. Globale diffusive Instabilität

▶ Was passiert, wenn eine Scheibe lokal diffusiv instabil wird? Wie wirkt sich das auf die Nachbarzonen aus?

Angenommen bei $R = R_o$ sei gerade $\Sigma = \Sigma_B$ und $\dot{\Sigma} > 0$

↝ $f \uparrow$ von $f_B \to f_D$, d.h. $\dot{M} \uparrow$ von $\dot{M}_B \to \dot{M}_D$ mit $\tau \approx t_{th}$

↝ erhöhter Masseneinstrom (mit $\dot{M}_D$ statt $\dot{M}_B$) in den nächsten inneren Ring bei $R = R_o - \Delta R$. Vor der Störung waren $\Sigma(R_o - \Delta R) \approx \Sigma_B(R - \Delta R) - \delta\Sigma$ und $\dot{M}(R_o - \Delta R) = \dot{M}_B(R - \Delta R) - \delta\dot{M}$. Mit $\dot{M}(R_o - \Delta R) = \dot{M}_D(R_o)$ wird sehr schnell $\Sigma_B(R_o - \Delta R)$ erreicht

↝ die Instabilität pflanzt sich fort; Ausbreitung in Form von sog. Umwandlungsfronten (engl. transition fronts)

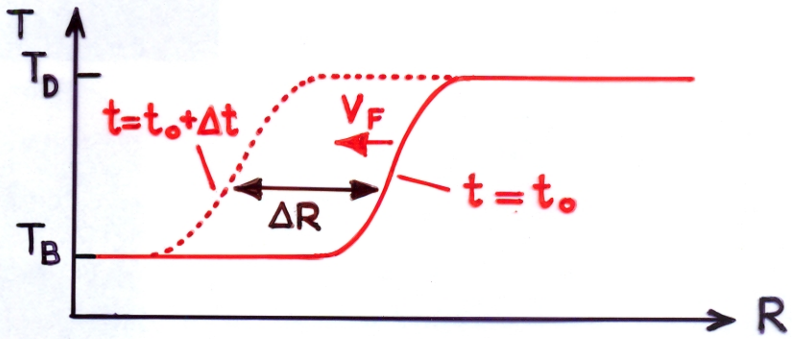
→ Meyer, F.: 1984, Astron. Astrophys. 131, 303

▶ ∃ 2 Arten von Umwandlungsfronten

- eine Heizungsfront : bringt das Gas vom Zustand B (kühl, $T=T_B$) in den Zustand D (heiss, $T=T_D$)
- eine Kühlungsfront : bringt das Gas vom Zustand C (heiss, $T=T_C$) in den Zustand A (kühl, $T=T_A$)

Abschätzung der Frontgeschwindigkeit

Umwandlung von $T_B \to T_D$ dauert $\Delta t \approx t_{th}$



Während der gleichen Zeit pflanzt sich die Störung (diffusiv) um ΔR fort, wobei

$$\Delta R = V_F \, \Delta t \quad \text{und} \quad \Delta t \approx t_{th} \approx t_{visc}(\Delta R) \approx \frac{\Delta R^2}{\nu} = \frac{(V_F \Delta t)^2}{\nu}$$

Mit $\nu = \alpha c_s H$ folgt $\underline{\underline{V_F \approx \alpha c_s}}$

▶ ↗ charakteristische Zeit t_F für die Umwandlung der ganzen Scheibe :

$$t_F \approx \frac{R}{V_F} \approx \frac{1}{\alpha}\frac{R}{c_s} = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{c_s}\frac{R}{H} = \frac{1}{\alpha}\frac{R}{H}\, t_{dyn}$$

d.h. $$\left(\frac{H}{R}\right)^2 t_{visc} \approx \left(\frac{H}{R}\right) t_F \approx t_{th}$$

oder $$t_F \approx (t_{th} \cdot t_{visc})^{1/2}$$

▶ Umwandlungsfronten gibt es nur im bistabilen Bereich, d.h. für geg. $\dot{M}$ in dem R-Bereich, wo $\dot{M}_B < \dot{M} < \dot{M}_C$ ist. Da in diesem Gebiet stationäre Lösungen instabil sind, müssen die Umwandlungsfronten an den Rändern des bistabilen Gebiets reflektiert werden. Dabei wird

Reflexion am Rand ↗ Heizungsfront ↘ Reflexion am Rand
↖ Kühlungsfront ↙

→ Damit durchläuft das bistabile Gebiet folgenden Zyklus:

heisser Zustand,
hohes ν, $\dot{M} > \dot{M}_C$
$\Sigma > \Sigma_C$, $\dot{\Sigma} < 0$

Heizungsfront
$V_F = \alpha\, c_s$
läuft langsam

Zykluszeit $\sim t_F \approx \frac{H}{R} t_{visc}$

Kühlungsfront
$V_F = \alpha\, c_s$
läuft (zu) schnell

kühler Zustand,
ν klein, $\dot{M} < \dot{M}_B$
$\Sigma < \Sigma_B$, $\dot{\Sigma} > 0$

▶ Problem: Wenn α im heissen und kühlen Zustand gleich ist, dann gibt es keinen langandauernden ($\tau \approx t_{visc}$) kohärenten Zustand mit hohem $\dot{M}$. Der Grund: Die Kühlungsfront läuft zu schnell.

→ Mit $\alpha =$ const.: Die Akkretionsrate oszilliert mit $\tau \approx t_F$ zwischen $\dot{M}_B$ und $\dot{M}_C$

▶ Numerische Rechnungen zeigen, dass es eine kohärente Instabilität mit $\tau \approx t_{visc}$ nur dann gibt, wenn α im heissen und kühlen Gebiet unterschiedlich ist, z.B. weil $\alpha = \alpha_0 \left(\frac{H}{R}\right)^p$ mit $p > 1$.

8. Nicht-axialsymmetrische Modelle von Akkretionsscheiben

a) Problemstellung und Rechenmethoden

▶ Roche-Potential ist nicht axialsymmetrisch bezüglich des akkretierenden Sterns!

↝ Scheiben im Roche-Potential sind nicht axialsymmetrisch!

▶ Wenn $\frac{\partial}{\partial \varphi} \neq 0$, ↝ 3-dim. zeitabhängiges hydrodynamisches Problem

↝ $\exists$ keine einfache analytische Theorie

↝ $\exists$ praktisch keine numerischen 3-D Modelle (zu grosser Rechenaufwand)

➡ Beschränkung auf 2 räumliche Koordinaten (r, φ) und Mittelung über die 3. Koordinate (z), d.h. $\forall$ Variablen x soll gelten

$$x(r,\varphi,z,t) \longrightarrow \bar{x}(r,\varphi,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(r,\varphi,z,t)\, g(r,\varphi,z,t)\, dz}{\int_{-\infty}^{\infty} g(r,\varphi,z,t)\, dz}$$

g : Gewichtsfunktion, z.B. $g \equiv \rho$ ↝ $\int_{-\infty}^{\infty} g\, dz = \Sigma$

▶ Auch 2-D nicht-axialsymmetrisches Problem ist zu kompliziert für analytische Theorie, sowohl stationärer als auch instationärer Scheiben.

↝ $\exists$ zur Zeit nur numerische Modellrechnungen für nicht-axialsymmetrische, zeitabhängige Scheiben

Zur Rechentechnik: $\exists$ im wesentlichen 2 Methoden:

1.) Lösung der hydrodynamischen Gleichungen für Strömung im Roche-Potential, meistens mit einfacher (polytroper) Zustandsgleichung und vereinfachtem Energietransports durch Festlegung von $\gamma = c_p/c_v$.

2.) Teilchensimulationen: Scheibe wird durch $N \approx 10^3 - 10^5$ Teilchen simuliert, deren Bewegung im Roche-Potential berechnet wird.
Rechentechniken:

a) smoothed particle hydrodynamics (SPH)

Strömung wird durch wechselwirkende (sich abstossende) Teilchen simuliert. Abstossung → Druck, Zähigkeit. Teilchen charakterisier durch Stärke und Reichweite der W.W. W.W.-Parameter müssen geeicht werden.

b) particle in cell Methode (PIC)

1. Schritt: ∀ Teilchen Integration der Bewegungsgleichungen des reduzierten 3-Körper-Problems:

$$\vec{r}_i(t) \rightarrow \vec{r}_i(t+\Delta t), \quad \dot{\vec{r}}_i(t) \rightarrow \dot{\vec{r}}_i(t+\Delta t), \quad i = 1, \dots, N$$

2. Schritt: Viskose W.W. der Teilchen = Impulsaustausch von benachbarten Teilchen, d.h. von Teilchen innerhalb einer Gitterzelle des Integrationsgebiets (Nebenbedingung: Impulserhaltung)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_i(t+\Delta t) \rightarrow \vec{r}_i(t+\Delta t) \\ \dot{\vec{r}}_i(t+\Delta t) \rightarrow \dot{\vec{r}}_i(t+\Delta t) + \delta\dot{\vec{r}}_i \end{array}\right\} \text{∀ Teilchen in einer Gitterzelle}$$

mit $\sum_{\text{Zelle}} m_i \delta\dot{\vec{r}}_i = 0$

	SPH	PIC
Vorteile:	vom Gitter unabhängige Viskosität	leicht zu rechnen, Simulation von Viskosität
Nachteile:	W.W. Parameter müssen geeicht werden	$N \lesssim 10^5$: ↗ geringe Auflösung, grosse numerische Viskosität $N \gtrsim 10^5$: ↗ sehr hoher Rechenaufwand

Vorlesung SS 2007: Akkretionsphänomene in kompakten Doppelsternen

Literatur: 2D- und 3D-Simulationen von Akkretionsscheiben

Geyer, F., Herold, H., Ruder, H. *Particle Simulations for Accretion Disks in Close Binary Systems*, in: *Accretion–Powered Compact Binaries*, C.W. Mauche, (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, pp. 307–310 (**1990**) (PIC–Rechnungen)

Hirose, M., Osaki, Y *Hydrodynamic Simulations of Accretion Disks in Cataclysmic Variables: Superhump Phenomenon in SU UMa Stars*, **1990**, PASJ 42, 135 (PIC–Rechnungen)

Kunze, S., Speith, R., Riffert, H. *Reproducing superhumps and γ–shifts of SU UMa stars with SPH simulations*, **1997**, MNRAS 289, 889 (SPH–Rechnungen)

Kunze, S., Speith, R., Hessman, F.V. *Substantial stream–disc overflow in three-dimensional SPH simulations of cataclysmic variables*, **2001**, MNRAS 322, 499 (SPH–Rechnungen)

Makita, M., Miykawa, K., Matsuda, T. *Two– and three–dimensional numerical simulations od accretion discs in a close binary system*, **2000**, MNRAS 316, 906 (hydrodynamische Rechnungen)

Matsuda, T., et al. *NUMERICAL SIMULATIONS OF ACCRETION DISCS IN CLOSE BINARY SYSTEMS AND DISCOVERY OF SPIRAL SHOCKS*, **2000**, A&SS 274, 259 (hydrodynamische Rechnungen)

Murray, J.R. *SPH simulations of tidally unstable accretion discs in cataclysmic variables*, **1996**, MNRAS 279, 402 (SPH–Rechnungen)

Spruit, H.C. *PHYSICS OF ACCRETION BY SPIRAL SHOCK WAVES*, in: *Theory of Accretion Disks*, F. Meyer, W.J. Duschl, J. Frank and E. Meyer–Hofmeister, (eds.), NATO ASI Series C, Vol. 290, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 325–340 (**1989**) (hydrodynamische Rechnungen)

Whitehurst, R. *Numerical simulations of accretion disks. I - Superhumps - A tidal phenomenon of accretion disks*, **1988**, MNRAS 232, 35 (PIC–Rechnungen)

Whitehurst, R. *Numerical simulations of accretion discs. II - Design and implementation of a new numerical method*, **1988**, MNRAS, 233, 529 (PIC–Rechnungen)

b) Beispiele numerischer Rechnungen

▶ ∃ zahlreiche Simulationen → Literaturliste für eine Auswahl

hier: nur wenige Beispiele:

1.) PIC Rechnungen von Geyer et al. (1990) (→ Abschnitt 1)
Hirose & Osaki (1990)
Whitehurst (1988)

▶ Ergebnisse :
- Scheiben können einen Aussenradius $R_D \approx R_{1,R}$ haben
- Scheiben können Spiralstruktur haben
- Bei einem plötzlich erhöhten Masseneinstrom in eine ~ stationäre Scheibe wird $R_D \downarrow$
- Bei grossen Werten von $q = M_1/M_2$ ($\gtrsim 4$) kann die Scheibe exzentrisch werden und im mit mitrotierenden System präzedieren
- Vor allem in den Aussenbereichen erhebliche Abweichungen von der Axialsymmetrie

2.) Hydrodynamische Rechnungen von Spruit (1989)
Makita et al. (2000)

▶ Ergebnisse :
- Gezeitenpotential $\phi_T = \phi_R - GM_1/r$ induziert spiralförmige Stosswelle(n)
- je kühler das Gas, desto enger sind die Stosswellen gewunden. Ausbreitungsgeschwindigkeit in R-Richtung $\sim c_s$.
- Die Stosswellen transportieren Drehimpuls nach aussen, allerdings mit geringer Effizienz (→ Abschnitt 4):

$$\alpha_{eff} \approx 10^{-2} \left(\frac{H}{R}\right)^{3/2} \ll 1 \qquad \text{(Spruit 1989)}$$

Numerische 2-D Simulationen von nicht-axialsymmetrischen Scheiben

Whitehurst, R.: 1988, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 233, 529

Rechnungen mit der "particle in cell" (PIC) Methode.

Entwicklung der Akkretionsscheibe nach einem weiteren Massentransferburst (85 Bahnumläufe nach dem ersten Massentransferburst).

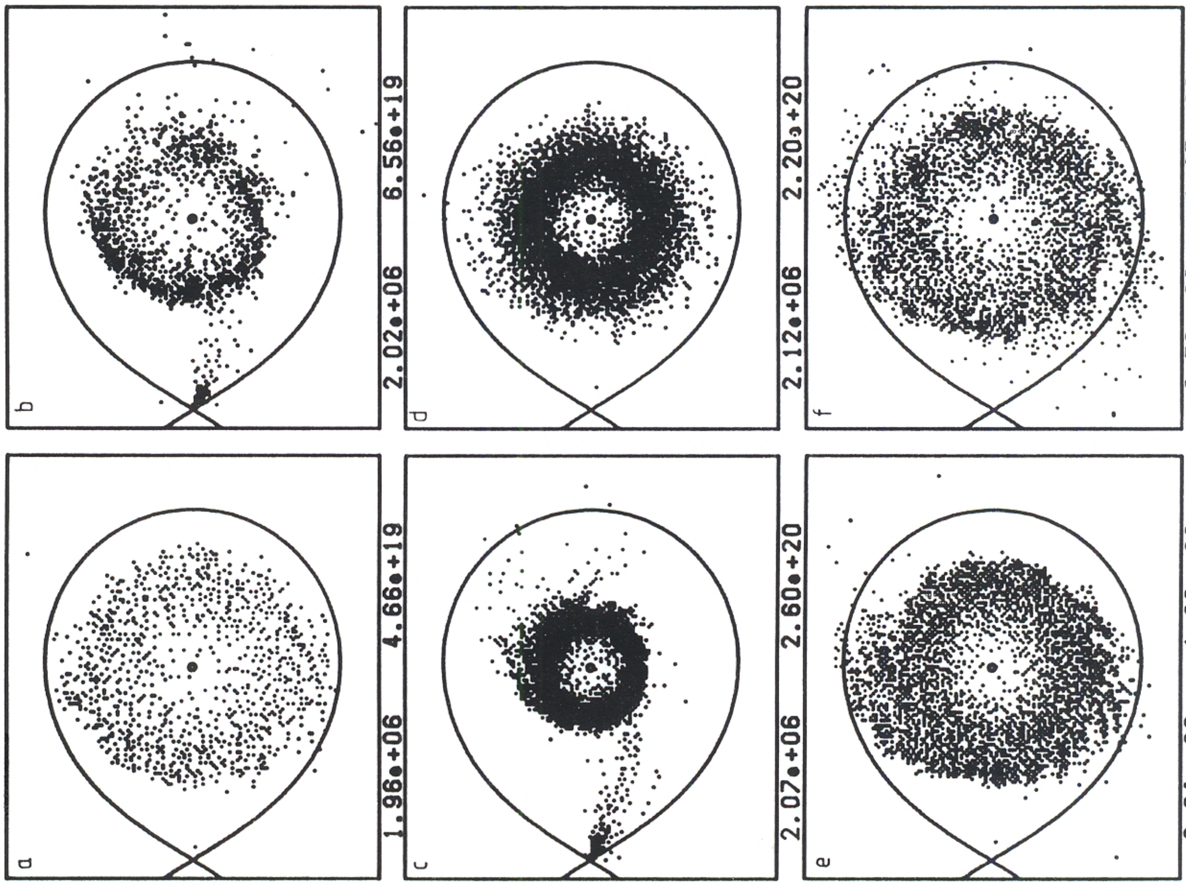


Figure 6. Particle distribution for the second SS Cygni simulation. (As for Fig. 3.)

Ausbildung und Entwicklung der Akkretionsscheibe nach einem ersten Massentransferburst.

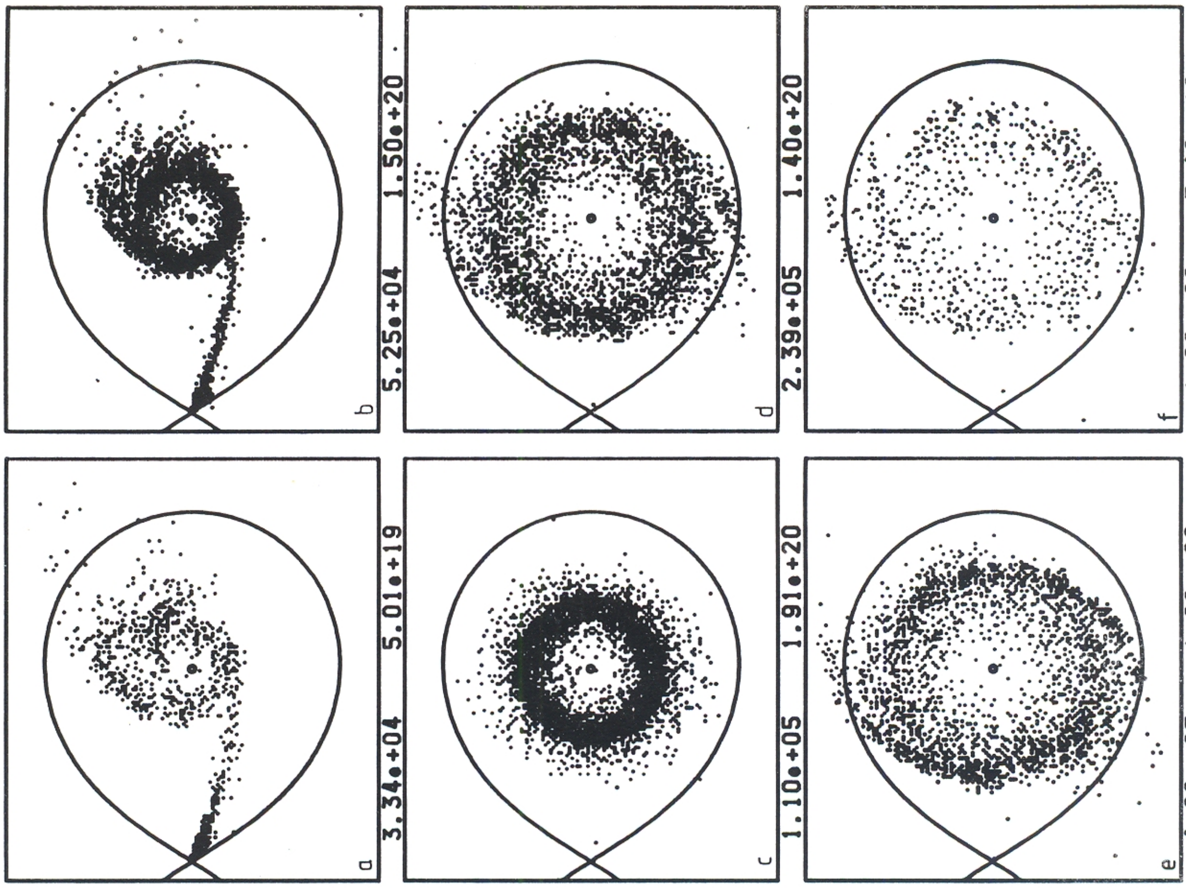


Figure 3. Particle distribution for the first SS Cygni simulation. Each snapshot is labelled by the time in seconds and mass in kilograms.

Numerische 2-D Simulationen von nicht-axialsymmetrischen Scheiben

Hirose, M., Osaki, Y.: 1990, Publ. Astron. Soc. Japan 42, 135

Rechnungen mit der "particle in cell" (PIC) Methode.

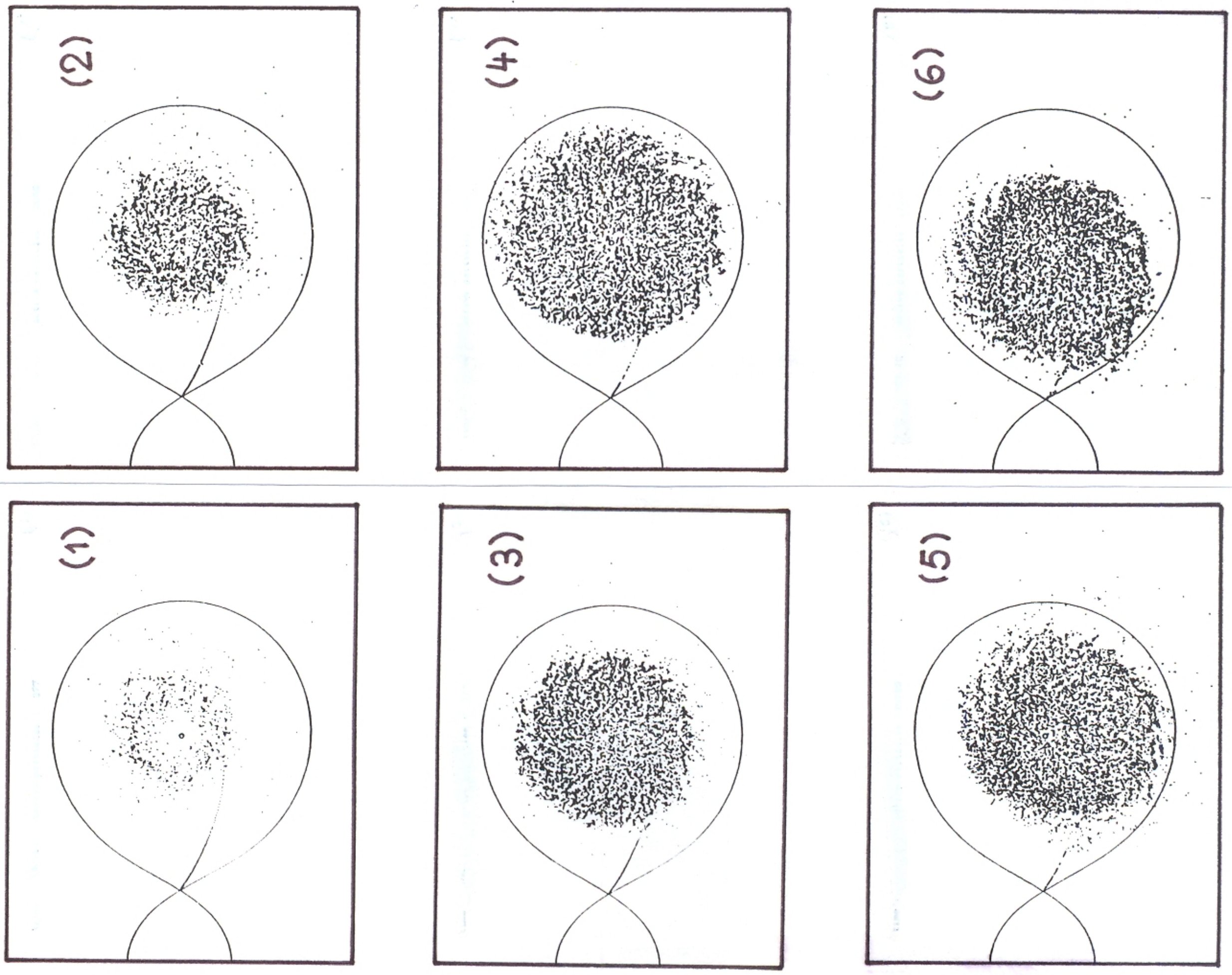


Fig. 6. Six snap shots for $q = 0.15$ at times indicated by arrows in figure 5. A ring initially formed is seen to spread into a disk and it then expands until the fourth frame. In the fifth and sixth frames, it is seen that the disk is deformed into an eccentric disk and it begins to rotate.

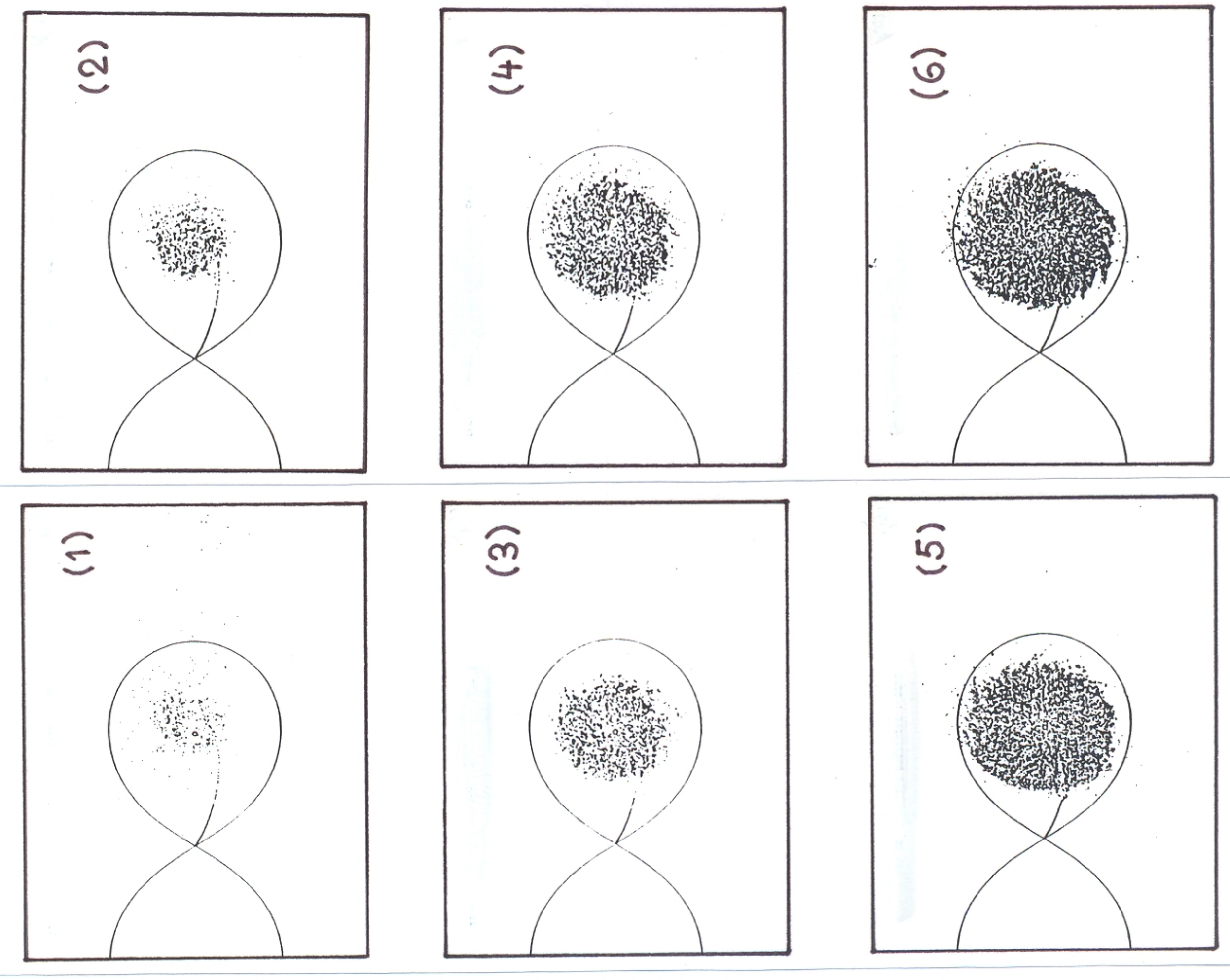


Fig. 1. Six snap shots of an accretion disk for a binary system with a mass ratio $q = 1.0$ at times shown by arrows in figure 2. The critical Roche lobe is shown by the solid line.

Numerische 2-D Simulationen von nicht-axialsymmetrischen Scheiben

Spruit, H. C.: 1990, in: Theory of Accretion Disks, eds. F. Meyer, W. J. Duschl, J. Frank, E. Meyer-Hofmeister, NATO ASI Series C, Vol. 290, Kluwer Academic Publ., p. 325

Hydrodynamische Rechnung, zeigt die Ausbildung von spiralförmigen Stosswellen in der Scheibe.

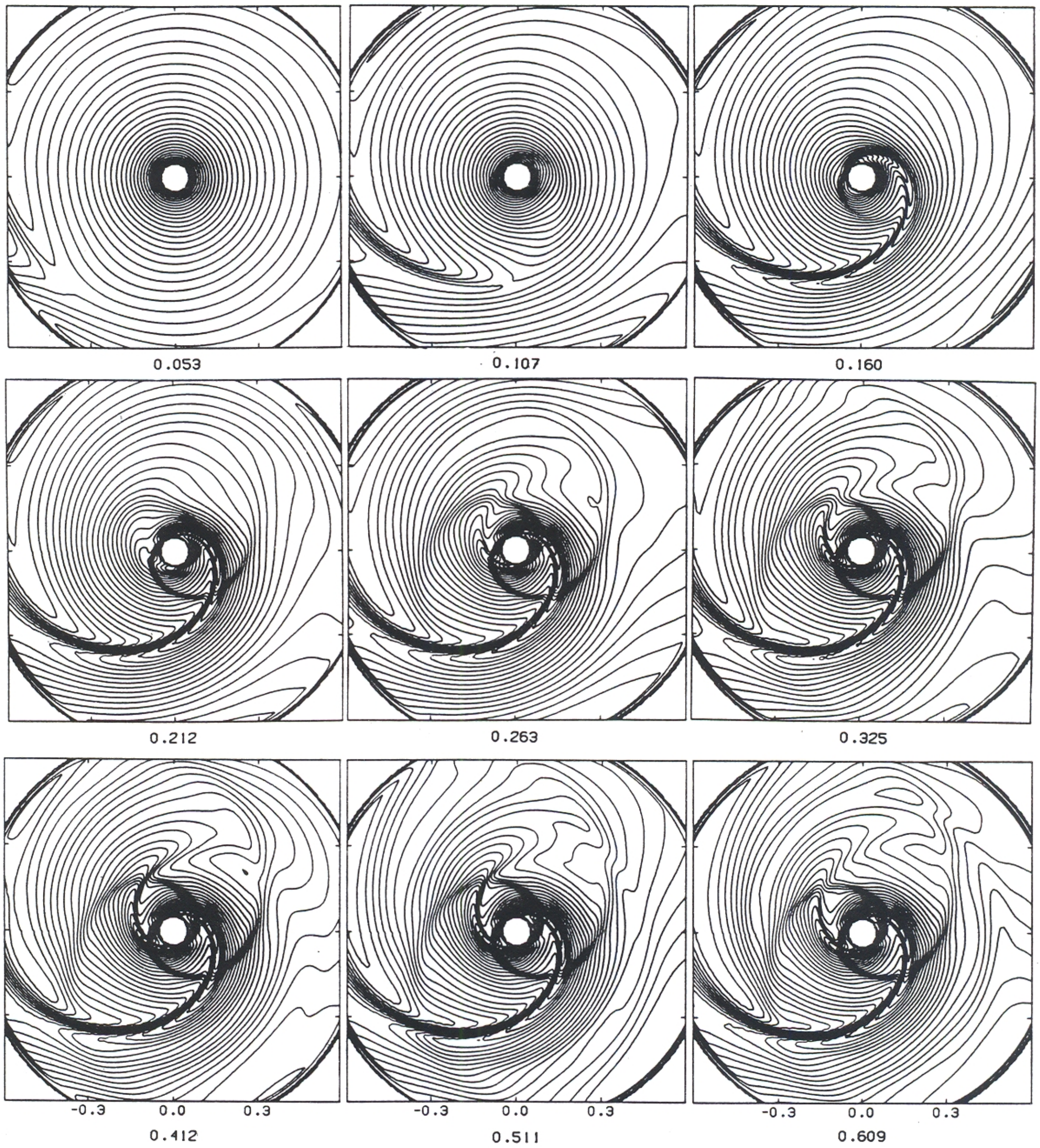


Figure 4: Development of spiral shock pattern from tidal perturbation. The disk has a temperature $T/T_{vir} = 0.1$, mass ratio is 0.1, companion is at the left at $R = 1$. Time sequence (time in units of the orbital period) shows inward propagation of the disturbance at the sound speed. The second arm forms from the weaker tidal perturbation on the opposite side and becomes visible only near the center. Reflection of the two waves at the center produces two additional leading spirals whose strength decreases outward.

Two- and three-dimensional numerical simulations of accretion discs in a close binary system
Makita, M., Miyawaki, K., Matsuda, T.: 2000, MNRAS 316, 906

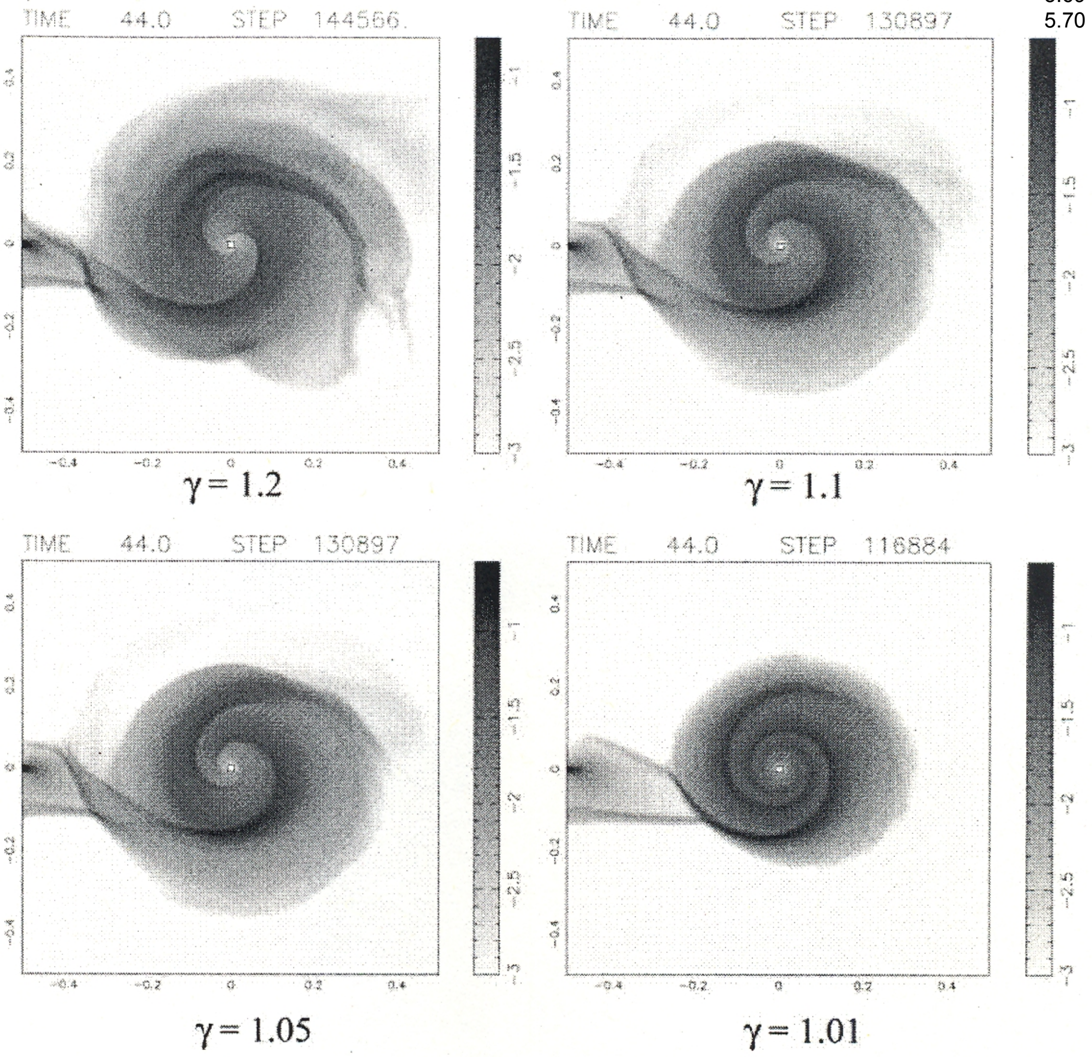


Figure 3. Grey-scale of the density distribution with a logarithmic scale after seven periods of revolution in the 2D calculations. The bar in the right-hand side shows the scale range.

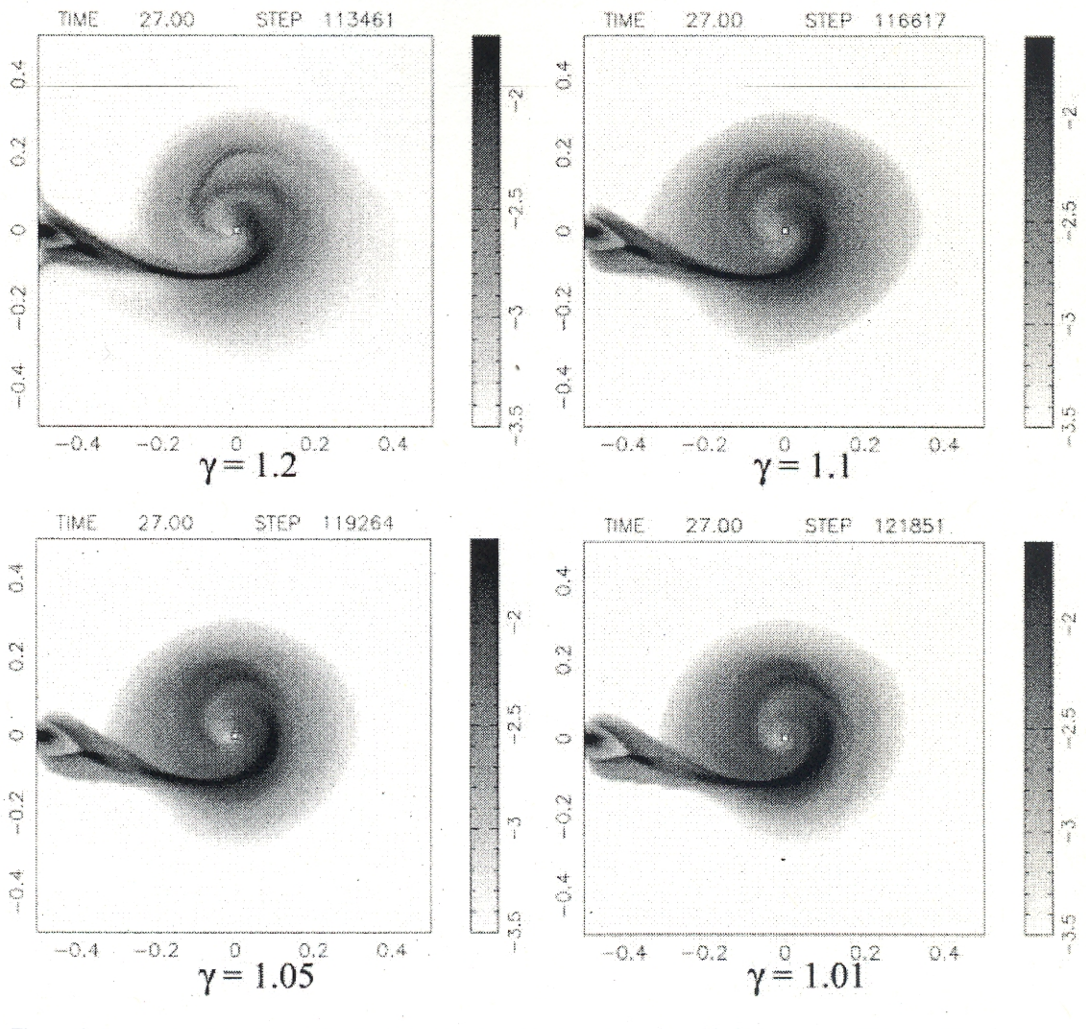


Figure 4. Grey-scale of the density distribution with a logarithmic scale in the orbital plane at $t = 27$ in the 3D calculations.