

5. Akkretionsscheiben

- Vorkommen von Akkretionsscheiben
- Bildung von Akkretionsscheiben durch Massentransfer über L_1
- Grundlagen zur Theorie geometrisch dünner Scheiben
 - Erhaltungssätze für Masse und Drehimpuls
 - Die Diffusionsgleichung
 - Lösung der Diffusionsgleichung für einen einfachen Fall
- Stationäre, geometrisch dünne Akkretionsscheiben
 - Radiale Struktur und innere Randbedingung
 - Energiedissipation und Leuchtkraft
 - Vertikale Struktur
 - Oberflächentemperatur und emittiertes Spektrum
 - Maximale Akkretionsrate, die Eddington–Grenze
- Zur Viskosität
 - Mögliche Quellen der Viskosität
 - Der α -Ansatz
- Stabilität der stationären Lösungen
 - Zeitskalen
 - Stabilitätsanalyse, thermische und viskose Instabilität
- Vertikale Struktur von Akkretionsscheiben
 - Grundgleichungen
 - Ergebnisse numerischer Rechnungen
 - Die $f - \Sigma$ - Beziehung
 - Globale diffusive Instabilität
- Nicht axialsymmetrische Modelle von Akkretionsscheiben

Ergänzende und weiterführende Literatur zur Physik der Akkretionsscheiben

- Meyer–Hofmeister, E., Ritter, H.** *ACCRETION DISKS IN CLOSE BINARIES*, in: *The Realm of Interacting Binary Stars*, J. Sahade, G.E. McCluskey, and Y. Kondo, (eds.), Astrophys. Space Sci. Library Vol. 177, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, pp. 143–168 (1993)
- Papalouizou, J.C.B., Lin, D.N.C.** *THEORY OF ACCRETION DISKS I: Angular Momentum Transport Processes*, 1995, ARA&A 33, 505
- Lin, D.N.C., Papalouizou, J.C.B.** *THEORY OF ACCRETION DISKS II: Application to Observed Systems*, 1996, ARA&A 34, 703
- Balbus, S.H., Hawley, J.F.** *INSTABILITY, TURBULENCE, AND ENHANCED TRANSPORT IN ACCRETION DISKS*, 1998, Rev. Mod. Phys. 70, 1
- Spruit, H.** *ACCRETION DISKS*, in: *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*, P. Murdin (ed.), Bristol: Institute of Physics Publishing, article 2124 (2000); URL: <http://eaa.iop.org/abstract/0333750888/2124> = astro-ph/0003144
- Spruit, H.** *RADIATIVELY INEFFICIENT ACCRETION DISKS*, in: *The Neutron Star Black Hole Connection*, C. Kouveliotou, J. Ventura, E.P.J. van den Heuvel (eds.), NATO Science Series II, Vol. 567, Kluwer, Dordrecht, p. 141 (2001); erweiterte Version als astro-ph/0003143v2
- Kolb, U.** *INTERACTING BINARY STARS*, S381 Block 3, *The Energetic Universe*, The Open University (2002), ISBN:0-7492-9765-4

Akkretionsscheiben

- Vorkommen:
- Protostellare Scheiben (selbstgravitierend)
 - Protoplanetare Scheiben (nicht selbstgravitierend)
 - Zentren von AGNs (nicht selbstgravitierend)
 - - enge Doppelsternsysteme (nicht selbstgravitierend)
 - Röntgendoppelsterne
 - Kataklysmische Doppelsterne
 - Symbiotische Doppelsterne
 - Algol-Systeme

▶ Hier: Akkretionsscheiben in engen Doppelsternsystemen

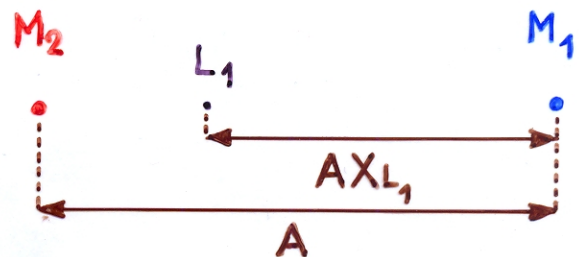
(wesentlicher Unterschied zu anderen Scheiben: äussere Randbedingungen: a) laufende Massenzufuhr, b) Drehimpulsabfluss (Gezeitenwechselwirkung))

1. Bildung von Akkretionsscheiben durch Massentransfer über L_1

(Flannery, B.P.: 1975, MNRAS 170, 325; Lubow, S.H., Shu, F.H.: 1975, ApJ 198, 383)

- ▶ Materie, die von M_2 über L_1 zu M_1 strömt, hat bei L_1 Drehimpuls bezügl. M_1 ; pro Masseneinheit

$$j_{L_1, M_1} = X_{L_1}^2 A^2 \Omega$$



- ▶ Aber: j ist im eingeschränkten Dreikörperproblem kein Integral der Bewegung (statt dessen \exists das Jacobi-Integral $C_J = \frac{1}{2} v^2 + \phi_R$, v im Inertialsystem)

→ j bleibt beim Fall zu M_1 nur näherungsweise erhalten (→ Flannery, 1975; Lubow & Shu, 1975)

- ▶ Da $j \approx j_{L_1, M_1} > 0$: Materie (Probeteilchen mit Masse $m \ll M_1 + M_2$ gelangt in eine Umlaufbahn um M_1 , sofern $R_1 < R_{\min}$ (→ Figur).

Abschätzung von R_{\min}

$R_{\min} = \text{Max}(R_1)$, ohne dass der Materiestrom mit dem Primärstern kollidiert.

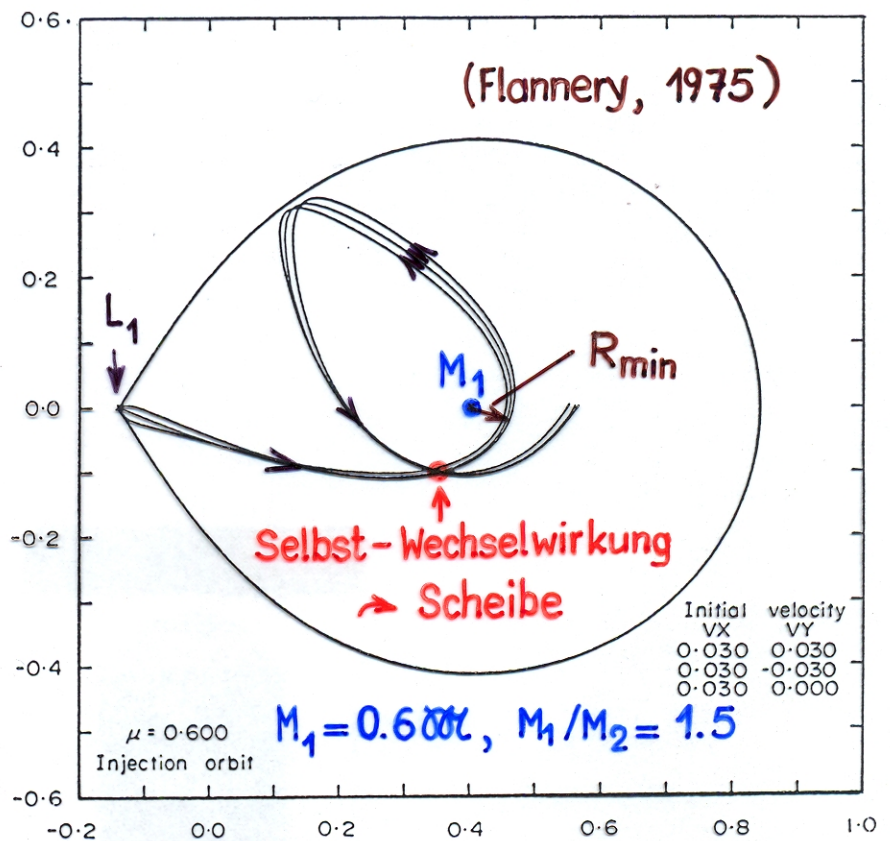


FIG. 4. Particle trajectories in the orbital plane corresponding to thermal evaporation from the inner Lagrangian point for a mass fraction of 0.6. The bounding curve represents the Roche equipotential through L_1 . Note that the trajectories cross before reaching the region of hot spot formation, which is $r_a = 0.10$ for this mass fraction.

$$\dot{j}(R_{\min}) \approx \Omega_K(R_{\min}) R_{\min}^2 = (GM_1 R_{\min})^{1/2} \approx \mathcal{f} \cdot \dot{j}_{L_1, M_1} = \mathcal{f} X_{L_1, M_1}^2 A^2 \Omega_B$$

$$\rightarrow \frac{R_{\min}}{A} \approx \frac{\mathcal{f}^2 X_{L_1, M_1}^4 (1+q)}{q} \approx \mathcal{f}^2 \frac{(0.5 + 0.227 \log q)^4 (1+q)}{q} \approx 0.05$$

wobei $\mathcal{f} \approx 0.8 - 0.9$ (\rightarrow Flannery, 1975; Lubow & Shu, 1975)

► Da $R_1 \ll R_{\min}$ ($R_1 = R_{WZ} \approx 0.01A$ in CVs, $R_1 = R_{NS} \approx 10\text{km}$ in LMXBs, d.h. $R_1 \lesssim 10^{-5}A$)

\rightarrow \exists keine Kollision des Materiestroms mit dem Primärstern

\rightarrow \exists Selbst-Wechselwirkung des Materiestroms \rightarrow Zirkularisierung der Teilchenbahnen (Kreisbahn hat geringste Energie für ein geg. j) \rightarrow \exists Materierung mit $R \approx R_{\min}$ um den Primärstern

► \exists dissipative Prozesse (Stosswellen, Viskosität, ect.) \rightarrow Energieverlust
 \rightarrow Materie spiralt nach innen \leftrightarrow Drehimpulstransport nach aussen
 (\rightarrow Diskussion von Lynden-Bell & Pringle, 1974, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 168, 603)

PARTICLE SIMULATIONS FOR ACCRETION DISKS IN CLOSE BINARY SYSTEMS

Geyer, F., Herold, H., Ruder, H.: 1990, in: Accretion-Powered Compact Binaries, C. W. Mauche (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, p. 307

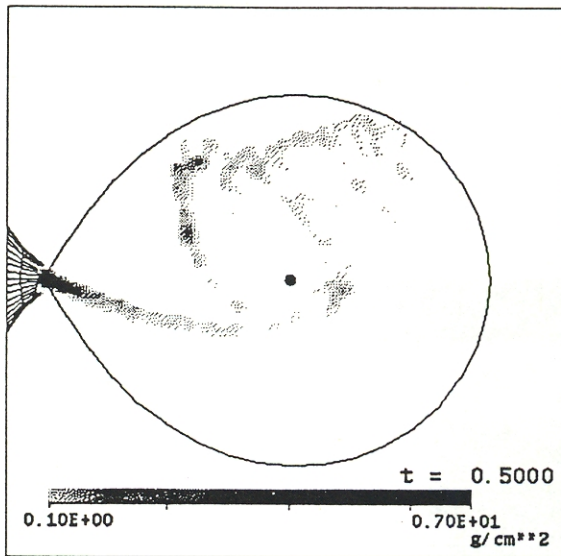


Fig. 1

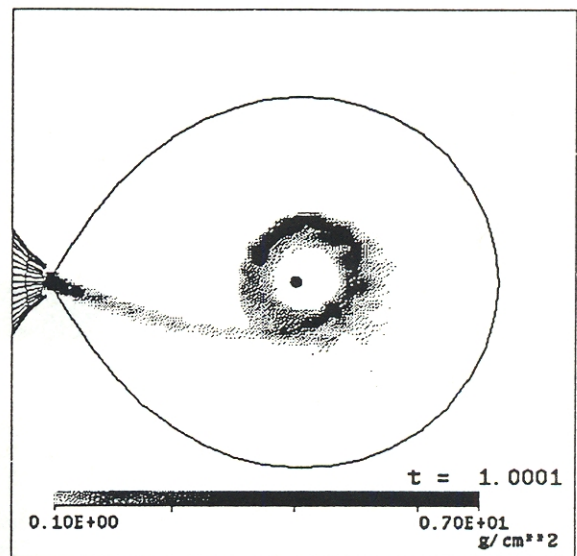


Fig. 2

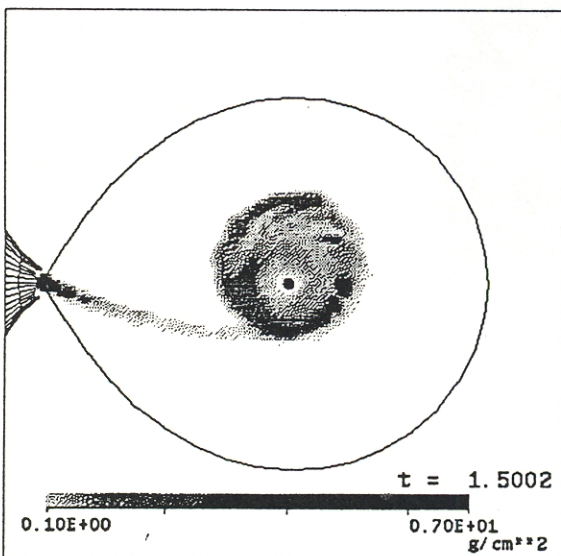


Fig. 3

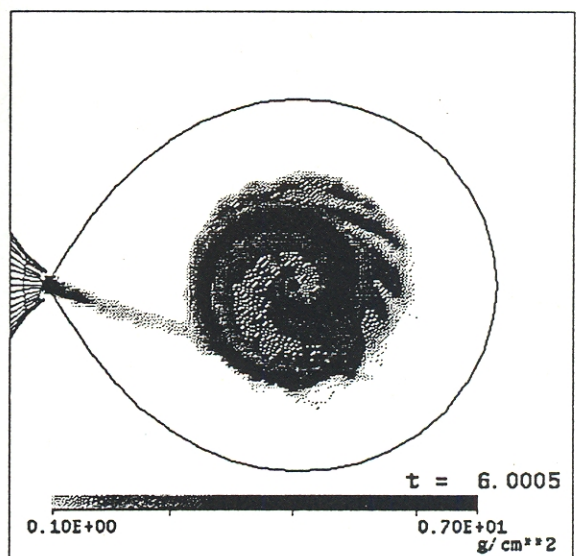


Fig. 4

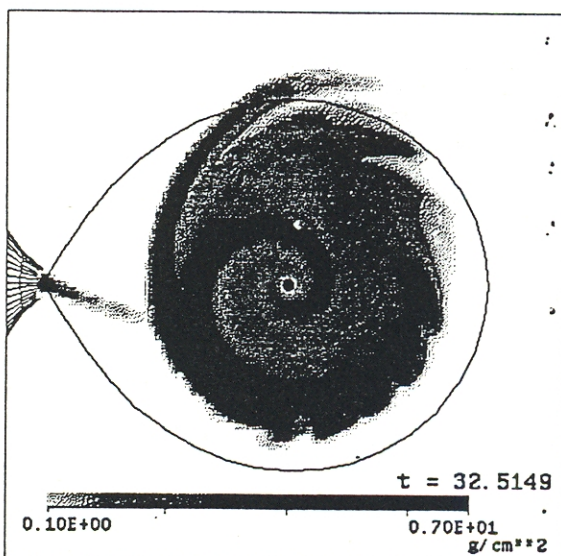


Fig. 5

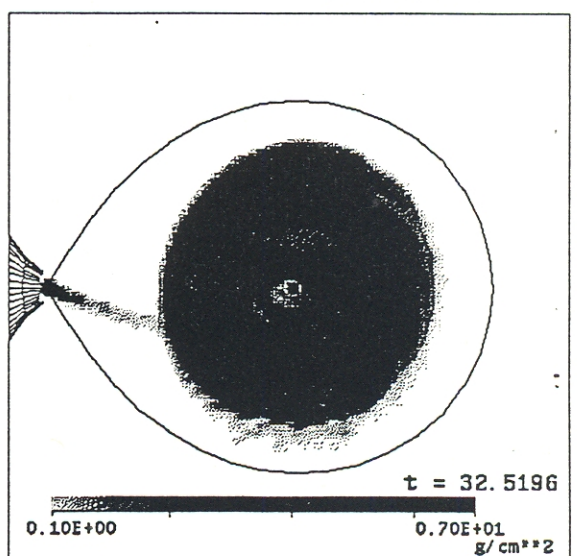


Fig. 7

- ▶ Materietransport nach innen, Drehimpuls- (+ Materie-)transport nach aussen : Materierung \longrightarrow Akkretionsscheibe
(\rightarrow Bsp: Geyer, Herold & Ruder 1990)

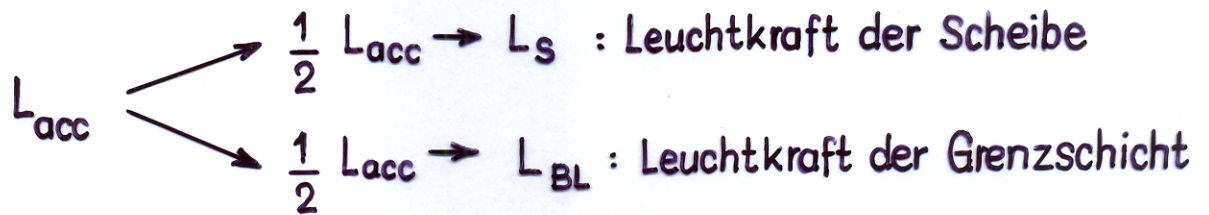
Energiebilanz: Bindungsenergie pro Masseneinheit von Materie, die mit $\Omega = \Omega_K$ bis $R = R_1$ kommt:

$$BE = -\frac{1}{2} \frac{GM_1}{R_1}$$

\rightarrow Leuchtkraft der Scheibe (= dissipierte BE pro Zeiteinheit)

$$L_s = \frac{1}{2} GM_1 \dot{M}_a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_a} \right) \approx \frac{GM_1 \dot{M}_a}{2R_1} \approx \frac{1}{2} L_{acc}$$

$L_{acc} \hat{=}$ totale Akkretionsenergie



Drehimpulsbilanz: Da $j = \Omega_K(R) R^2 \sim R^{1/2}$ und $R_1 \ll R_a$

\rightarrow Materie muss, um von $R_a \rightarrow R_1$ zu kommen, praktisch allen Drehimpuls verlieren (durch viskoses Drehmoment)

- ▶ Am äusseren Scheibenrand ($R = R_a$) \exists Drehimpulssenke durch die Gezeitenwechselwirkung des Begleitsterns. \rightarrow Rotationsdrehimpuls der Scheibe \longrightarrow Bahndrehimpuls

\rightarrow Begrenzung von R_a : $R_a \approx 0.8-0.9 R_R$

(\rightarrow Papaloizou, J.C.B., Pringle, J.E.: 1977, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 181, 441 sowie numerische Simulationen, z.B. Hensler, G.: 1982, Astron. Astrophys. 114, 319; Whitehurst, R.: 1988, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 232, 35; Hirose, M., Osaki, Y.: 1990, Publ. Astron. Soc. Japan 42, 135; Beispiel von Geyer, Herold & Ruder 1990)

2. Grundlagen zur Theorie geometrisch dünner Scheiben

a) Definitionen, Problemstellung

Betrachten zeitabhängige, achsialsymmetrische Gasströmung ($\partial/\partial\varphi = 0$) um ein Zentralobjekt mit Masse M .

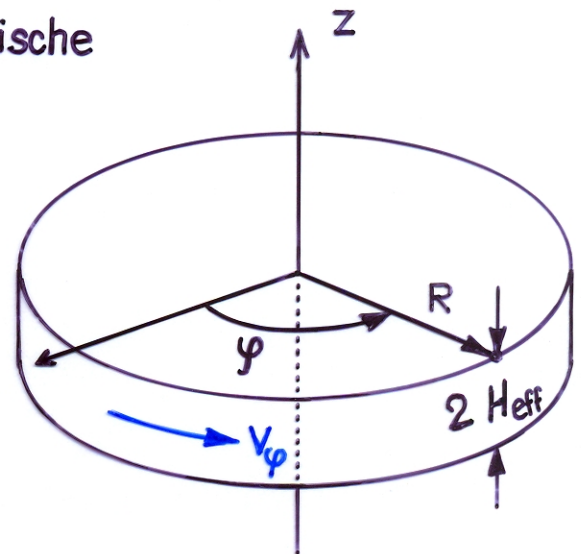
Voraussetzungen:

1) Gas nicht selbstgravitierend

$$\rightarrow \phi(R) = -\frac{GM}{R}$$

$$\Omega(R) = \Omega_k(R) = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}$$

$$v_\varphi(R) = R\Omega(R) = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2}$$



2) Strömung sei geometrisch dünn, d.h. $z \ll R$, genauer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) dz \equiv \Sigma = 2H_{\text{eff}}(R) \rho(R, z=0) \quad ; \quad \Sigma : \text{Flächendichte}$$

$2H_{\text{eff}}$: effektive vertikale Dicke der Strömung

► geometrisch dünn: $\frac{H_{\text{eff}}}{R} \ll 1$

3) \exists innere Reibung, charakterisiert durch eine kinematische Viskosität ν

► Problemstellung: Bestimmung von $\Sigma(R,t)$, $v_R(R,t)$, ... für geg ν und $\Sigma(R,t=0)$

► Vereinfachung: Einzonenmodell in vertikaler Richtung, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) x(z) dz = \bar{x} \Sigma \quad \forall x$$

b) Radiale Struktur der Scheibe: Die Grundgleichungen

Ausgangspunkt: Erhaltungssätze für Masse und Drehimpuls.

1) Massenerhaltung: (Kontinuitätsgleichung)

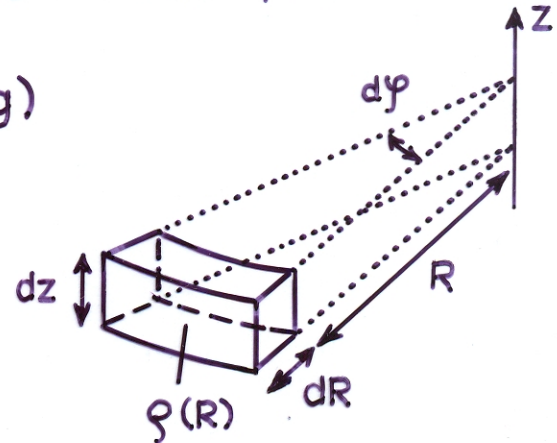
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Mit $\vec{v} = (v_\varphi(R), v_R(R), 0)$

und $\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$ folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \rho v_R) = 0 \quad \Bigg| \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

$$\rightarrow \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0 \quad (1)$$



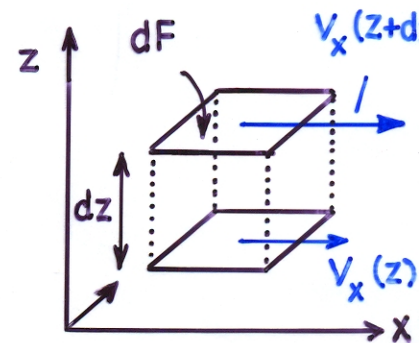
2) Drehimpulserhaltung:

Betrachten zuerst die ebene Scherströmung:

$$\vec{v} = (v_x(z), 0, 0)$$

→ Kraft dK durch viskose Reibung in x-Richtung

$$\underline{dK_x = \eta \frac{dv}{dz} dF = \nu \rho \frac{dv}{dz} dF}, \quad \begin{array}{l} \eta = \text{dynamische Viskosität} \\ \nu = \text{kinematische Viskosität} \end{array}$$

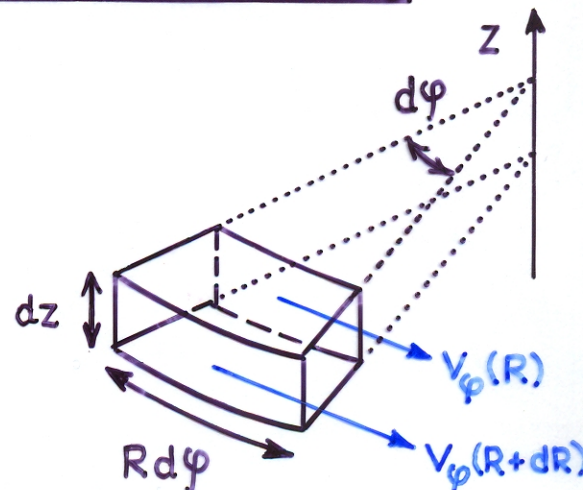


Betrachten jetzt eine differentiell rotierende Zylinderströmung

Viskosität → Spannung in φ-Richtung

$$\rightarrow dK_\varphi = \nu \rho R d\varphi dz \underbrace{\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial R} - \frac{v_\varphi}{R} \right)}_{\text{Scherung}}$$

→ Drehmoment $dG_z = R dK_\varphi$
(in z-Richtung)



$$\rightarrow dG = dG_z = \nu \varrho R^2 d\varphi dz \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial R} - \frac{v_\varphi}{R} \right) = \nu \varrho R^2 d\varphi dz R \frac{\partial \Omega}{\partial R}$$

$$\rightarrow G = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu \varrho R^3 \frac{\partial \Omega}{\partial R} dz d\varphi = 2\pi \nu R^3 \frac{\partial \Omega}{\partial R} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho dz$$

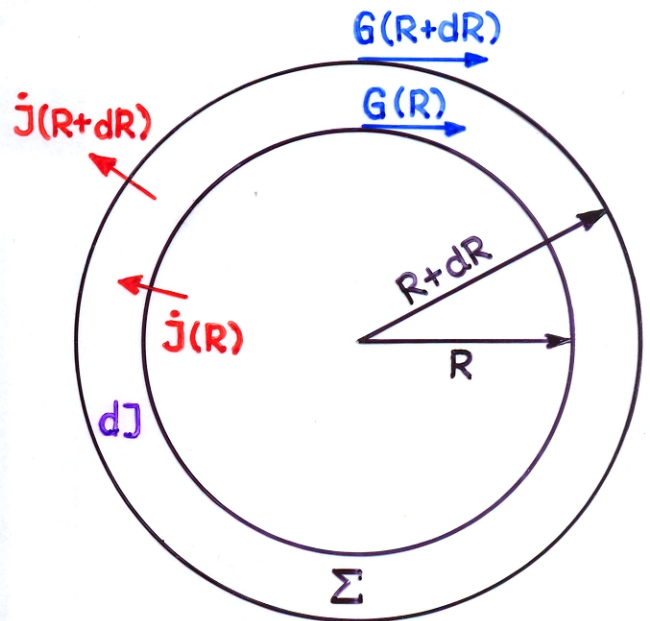
viskoses Drehmoment

$$\underline{\underline{G = 2\pi R^3 \nu \Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial R}}}$$

Drehimpulserhaltung

Drehimpuls im Ring $R, \dots, R+dR$:

$$\begin{aligned} dJ &= \underbrace{2\pi R dR \Sigma}_{\text{Masse } dm} \underbrace{\Omega R^2}_{\text{spez. Drehimpuls}} \\ &= 2\pi R^3 dR \Sigma \Omega \end{aligned}$$



Advektierter Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \underbrace{2\pi R \Sigma v_R}_{\text{Massenstrom}} \underbrace{\Omega R^2}_{\text{spez. Drehimpuls}} = 2\pi R^3 \Sigma v_R \Omega \end{aligned}$$

Drehimpulsbilanz für den Ring $R, \dots, R+dR$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (dJ) + \frac{\partial}{\partial R} (\dot{J}) dR = \frac{\partial}{\partial R} (G) dR$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (2\pi R^3 \Sigma \Omega) + \frac{\partial}{\partial R} (2\pi R^3 \Sigma v_R \Omega) = \frac{\partial}{\partial R} (2\pi R^3 \nu \Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial R})$$

$$\rightarrow \underline{\underline{R \frac{\partial}{\partial t} (R^2 \Sigma \Omega) + \frac{\partial}{\partial R} (R^3 \Sigma v_R \Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} (R^3 \nu \Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial R})}} \quad (2)$$

c) Radiale Struktur der Scheibe: Die Diffusionsgleichung

Ausgangspunkt: Erhaltungssätze für Masse und Drehimpuls

1) Massenerhaltung:

$$\underline{R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0} \quad (1) \quad ; \quad v_R = \text{radiale Driftgeschwindigkeit}$$

2) Drehimpulserhaltung:

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R R^2 \Omega) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R}}_{\text{Quellterm durch}} \quad (2) \quad , \quad \text{wobei}$$

$$G(R,t) = 2\pi R \nu R^2 \Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial R} \quad (3) \quad \text{viskoses Drehmoment } G$$

$G(R) dR$ = Drehmoment, das vom Materiering $(R, \dots, R+dR)$ auf den Materiering $(R-dR, R)$ ausgeübt wird

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R} = R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega), \quad (4)$$

Eliminierung von v_R aus (1) mit Hilfe von (4) ergibt:

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = - \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{2\pi (R^2 \Omega)} \frac{\partial G}{\partial R} \right] \quad (5)$$

oder:

$$\underline{\underline{\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{1}{\partial(R^2 \Omega) / \partial R} \frac{\partial}{\partial R} (R^3 \nu \Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial R}) \right\}}} \quad (6)$$

Bisher: Haben noch keine Voraussetzung über Ω gemacht

► Verwenden jetzt: $\Omega(R) = \Omega_k(R) = (GMR^{-3})^{1/2}$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}) \right\}}} \quad (7)$$

- (7) ist eine nichtlineare Diffusionsgleichung für $\Sigma(R,t)$.
(Diffusion deswegen, weil der viskose Drehimpulstransport ein diffusiver Prozess ist)

Mit $\Sigma(R,t)$ folgt aus (4):

$$\underline{\underline{v_R(R,t) = \frac{1}{\Sigma R d(R^2 \Omega)/dR} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ R^3 v \Sigma \frac{d\Omega}{dR} \right\} = -\frac{3}{\Sigma R^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} (v \Sigma R^{1/2})}} \quad (8)$$

- Lösung von (7) & (8) nur möglich, wenn v gegeben

d) Die Green'sche Funktion für $v \sim R^p$

- (7) wird eine lineare Diffusionsgleichung, wenn $\frac{\partial v}{\partial \Sigma} = 0$

Betrachten nun ein einfaches Beispiel, wo $\partial v / \partial z = 0$:

Sei
$$\underline{v = v(R) = v_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{n/2}} \quad (9)$$

Damit folgt aus (7)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3v_0}{R_0^{n/2}} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} \left(\Sigma R^{\frac{n+1}{2}} \right) \right\}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial t} \left(\Sigma R^{\frac{n+1}{2}} \right) = \frac{3v_0}{R_0^{n/2}} R^{\frac{n-2}{2}} \left(R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} \right)^2 \left(\Sigma R^{\frac{n+1}{2}} \right)}}$$

Neue räumliche Variable : $s = 2 R^{1/2}$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial t} \left(\Sigma R^{\frac{n+1}{2}} \right) = \frac{3v_0}{R_0^{n/2}} \left(\frac{s}{2} \right)^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\Sigma R^{\frac{n+1}{2}} \right)}} \quad (10)$$

Lösung von (10) durch Separationsansatz: $\Sigma R^{\frac{n+1}{2}} = T(t) \cdot S(s)$

$$\rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{3\nu_0}{2^{n-2} R_0^{n/2}} s^{n-2} \frac{S''}{S} = -\lambda^2 = \text{const.} \quad (11)$$

$$\rightarrow : T(t) \sim e^{-\lambda^2 t}$$

$S(s) =$ modifizierte Bessel-Funktion

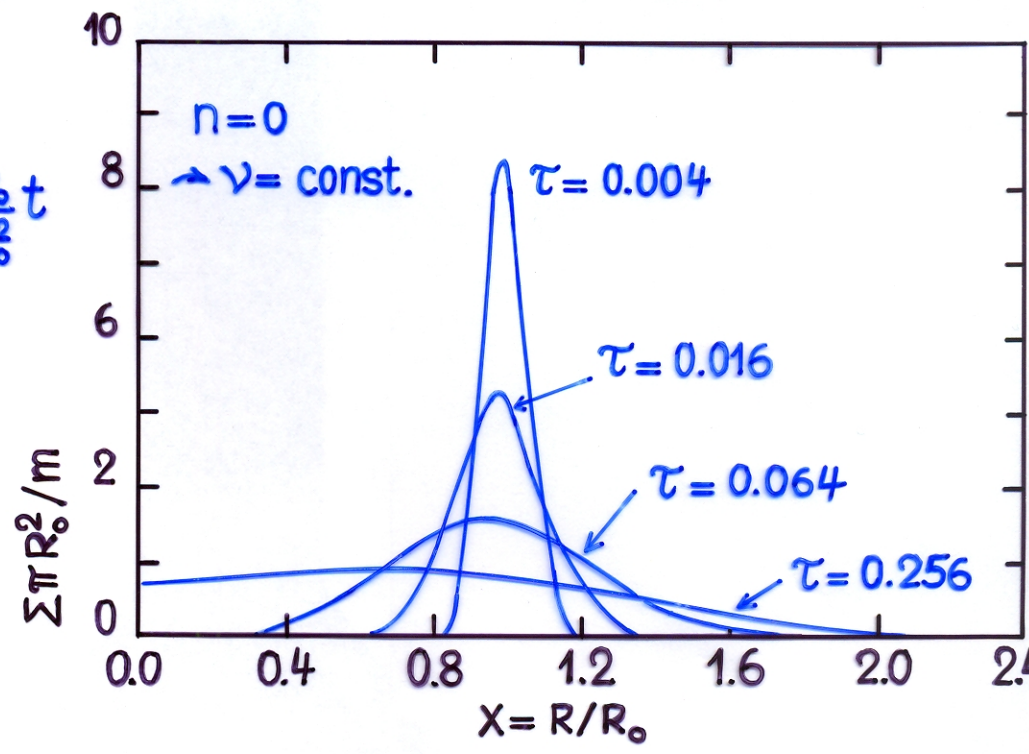
Die Green'sche Funktion

ist die Lösung von (11) für $\Sigma(R, t=0) = \frac{m}{2\pi R_0} \delta(R-R_0)$

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{(4-n)m}{4\pi R_0^2} \frac{x^{-\frac{2n+1}{4}}}{\tau} \exp\left(-\frac{x^{\frac{4-n}{2}+1}}{\tau}\right) I_{\frac{1}{4-n}}\left(\frac{2x^{\frac{4-n}{4}}}{\tau}\right) \quad (12)$$

mit $x = \frac{R}{R_0}$

und $\tau = \frac{3(4-n)^2 \nu_0 t}{4 R_0^2}$



► Die Viskosität führt zur Verschmierung der Anfangsmassenverteilung (hier eine δ -Funktion)

Charakteristische Zeitskala der Entwicklung : $\frac{x^{\frac{4-n}{2}+1}}{\tau} \approx \frac{x^2}{\tau} \approx 1$

$$\rightarrow \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2-\frac{n}{2}} \approx \frac{3(4-n)^2}{4} \frac{\nu(R)}{R_0^2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\frac{n}{2}} t_{\text{visc}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{t_{\text{visc}} \approx \frac{4}{3(4-n)^2} \frac{R^2}{\nu(R)}}} : \underline{\underline{t_{\text{visc}} = \text{viskose Zeitskala}}}$$

Entwicklung viskoser Akkretionsscheiben

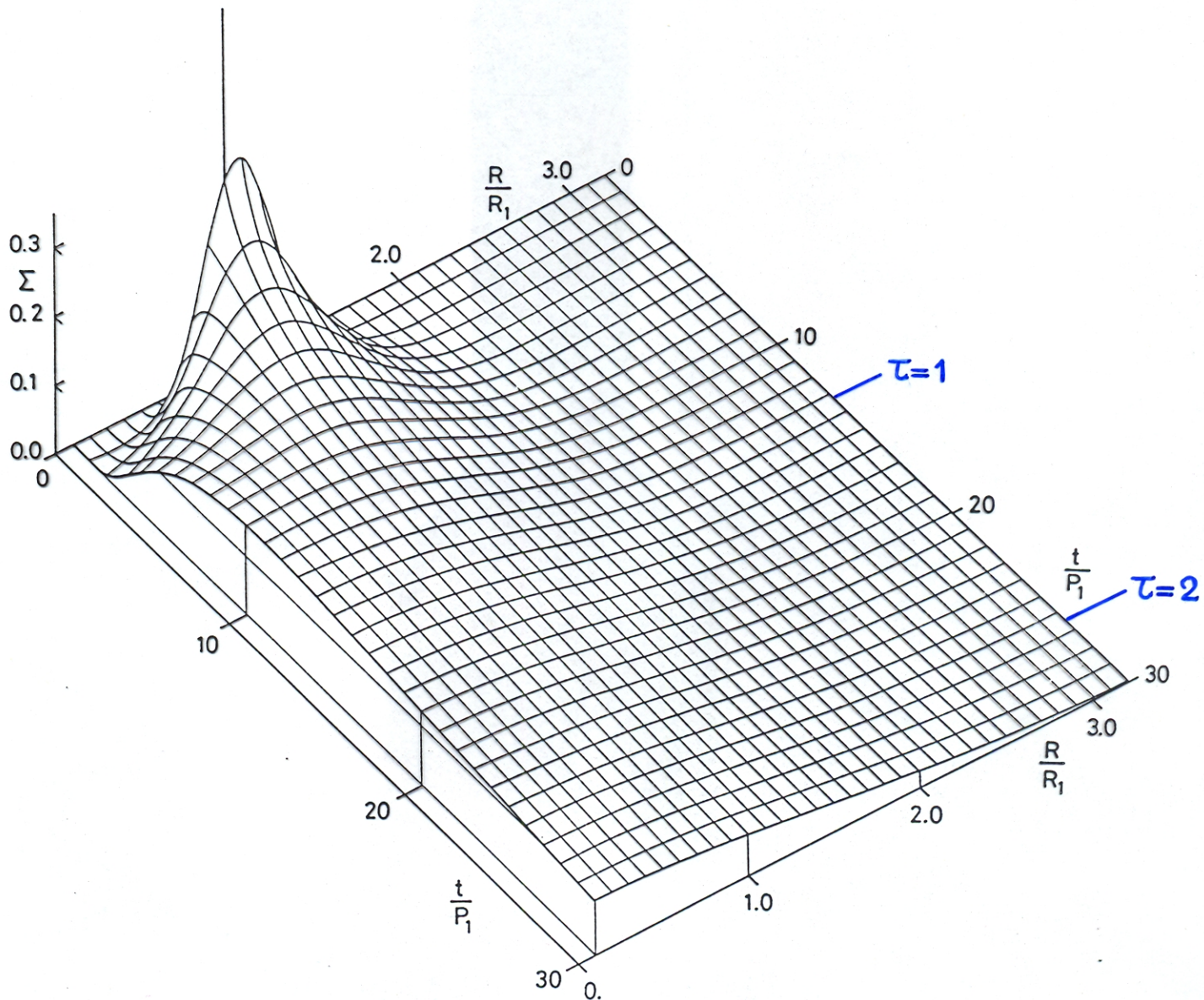
Green'sche Funktion für $n=0$, d.h. $\nu = \text{const.}$

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{m}{\pi R_1^2} x^{-1/4} \tau^{-1} \exp\left(-\frac{x^2+1}{\tau}\right) I_{1/4}\left(\frac{2x}{\tau}\right)$$

mit $x = \frac{R}{R_1}$ und $\tau = \frac{12\nu t}{R_1^2}$

Graphische Darstellung für $\nu = \nu(R_1) = 10^{-3} \Omega_K(R_1) R_1^2$

$$\rightarrow \frac{t}{P_1} = \frac{\Omega_K(R_1) t}{2\pi} = \frac{10^3}{24\pi} \tau = 13.26 \tau$$



(aus : Ritter, H. : 1977, Diss., Hamburg)

Entwicklung viskoser Akkretionsscheiben

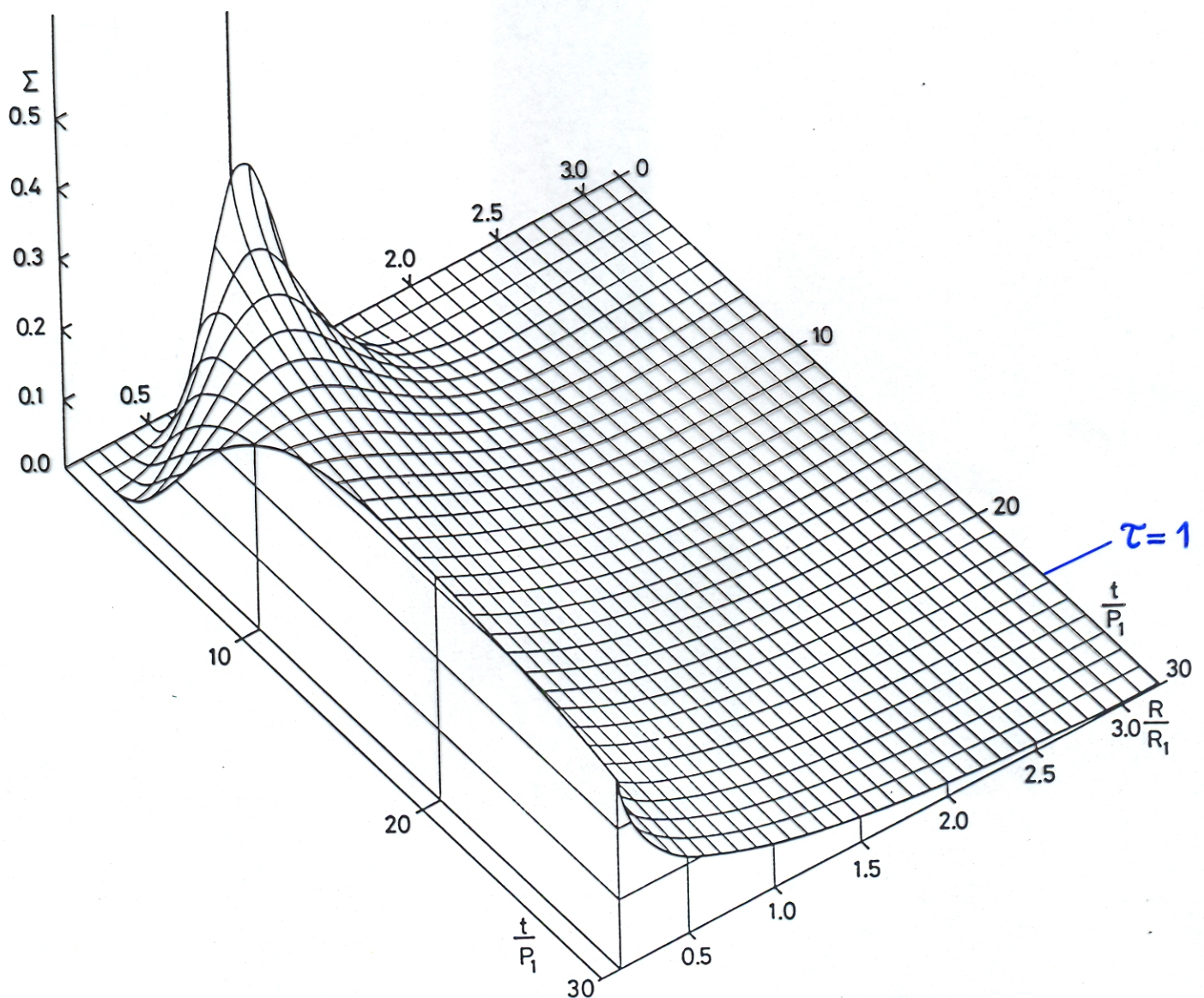
Green'sche Funktion für $n=1$

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{3m}{4\pi R_1^2} x^{-3/4} \tau^{-1} \exp\left(-\frac{x^{3/2} + 1}{\tau}\right) I_{1/3}\left(\frac{2x^{3/4}}{\tau}\right)$$

mit $x = \frac{R}{R_1}$ und $\tau = \frac{27}{4} \frac{\nu(R_1)}{R_1^2} t$

Graphische Darstellung für $\nu(R_1) = 10^{-3} \Omega_K(R_1) R_1^2$

$$\rightarrow \frac{t}{P_1} = \frac{\Omega_K(R_1) t}{2\pi} = \frac{2 \cdot 10^3}{27\pi} \tau = 23.6 \tau$$



(aus: Ritter, H.: 1977, Diss., Hamburg)

Entwicklung viskoser Akkretionsscheiben

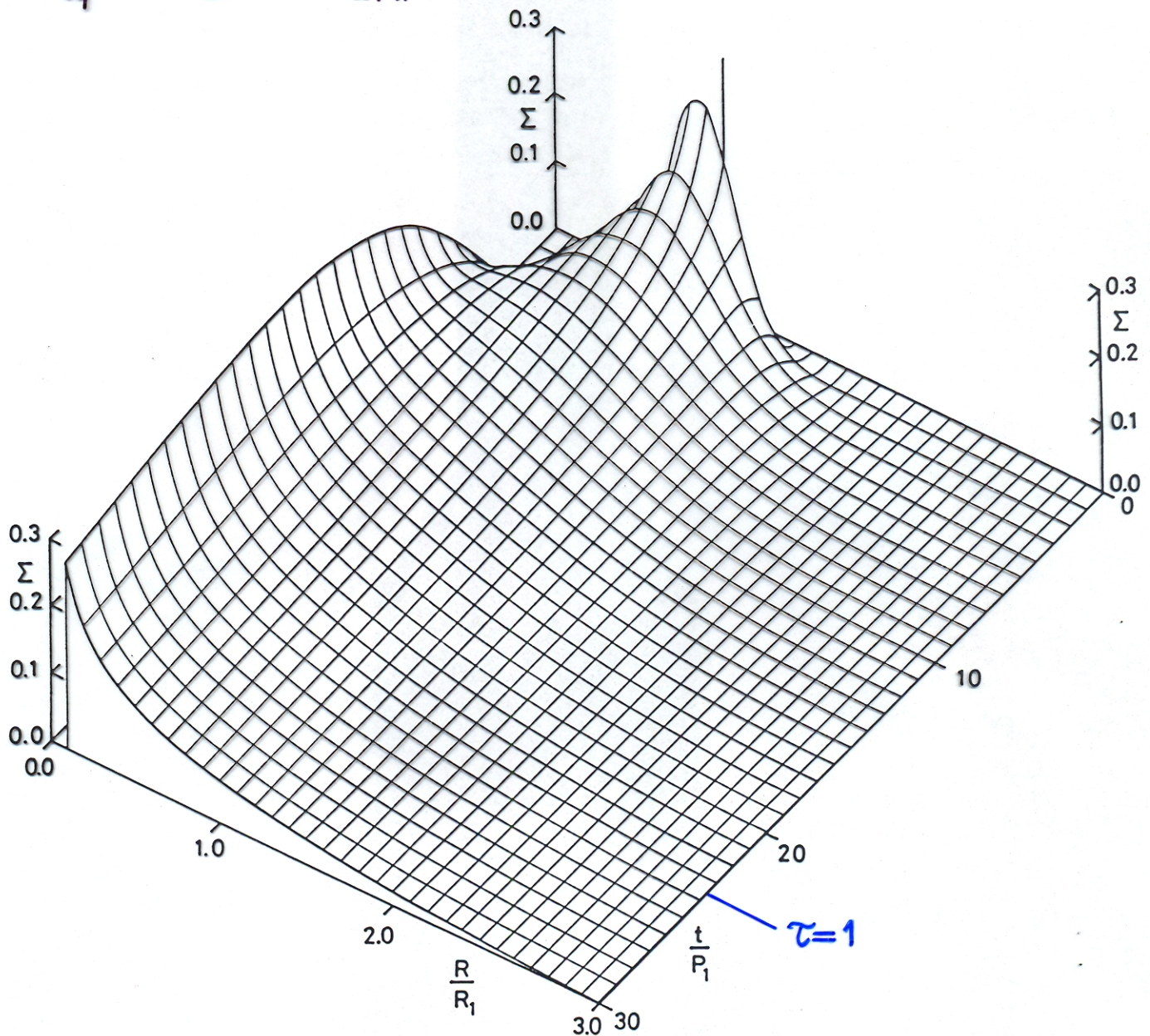
Green'sche Funktion für $n=1$

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{3m}{4\pi R_1^2} x^{-3/4} \tau^{-1} \exp\left(-\frac{x^{3/2} + 1}{\tau}\right) I_{1/3}\left(\frac{2x^{3/4}}{\tau}\right)$$

mit $x = \frac{R}{R_1}$ und $\tau = \frac{27}{4} \frac{\nu(R_1)}{R_1^2} t$

Graphische Darstellung für $\nu(R_1) = 10^{-3} \Omega_K(R_1) R_1^2$

$$\rightarrow \frac{t}{P_1} = \frac{t \Omega_K(R_1)}{2\pi} = \frac{2 \cdot 10^3}{27\pi} \tau = 23.6 \tau$$



(aus: Ritter, H.: 1977, Diss., Hamburg)

Radiale Driftgeschwindigkeit: Mit (8) und $v(R) = v_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n/2}$ folgt

$$v_R = - \frac{3}{\sum R^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} (v \sum R^{1/2}) = - \frac{3v_0}{R_0^{n/2}} R^{n/2-1} \underbrace{\frac{\partial \ln(\sum R^{n/2})}{\partial \ln R}}_{\text{Zahl von der Grössenordnung 1}} \approx - 3 \frac{v(R)}{R}$$

$$\blacktriangleright \quad v_R \approx - 3 \frac{v(R)}{R} \quad \rightarrow \quad t_{\text{visc}} = \frac{4}{3(4-n)^2} \frac{R^2}{v} \approx - \frac{4}{(4-n)^2} \frac{R}{v_R} \approx - \frac{R}{v_R}$$

viskose Zeitskala \approx radiale Driftzeitskala

Asymptotisches Verhalten von v_R

$$v_R = - 3v(R) \frac{\partial}{\partial R} (\ln \sum R^{n/2}) = - \frac{3v(R)}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \ln \left(\sum x^{n/2} \right) \right\}$$

$$\sum x^{n/2} = \text{const.} \cdot x^{1/4} \exp\left(-\frac{x^{4-n}}{\tau}\right) I_{\frac{1}{4-n}}\left(\frac{2x^{4-n}}{\tau}\right)$$

asymptotisches Verhalten von $I_\nu(z)$:

$$I_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \quad \text{für } z \ll 1$$

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \quad \text{für } z \gg 1$$

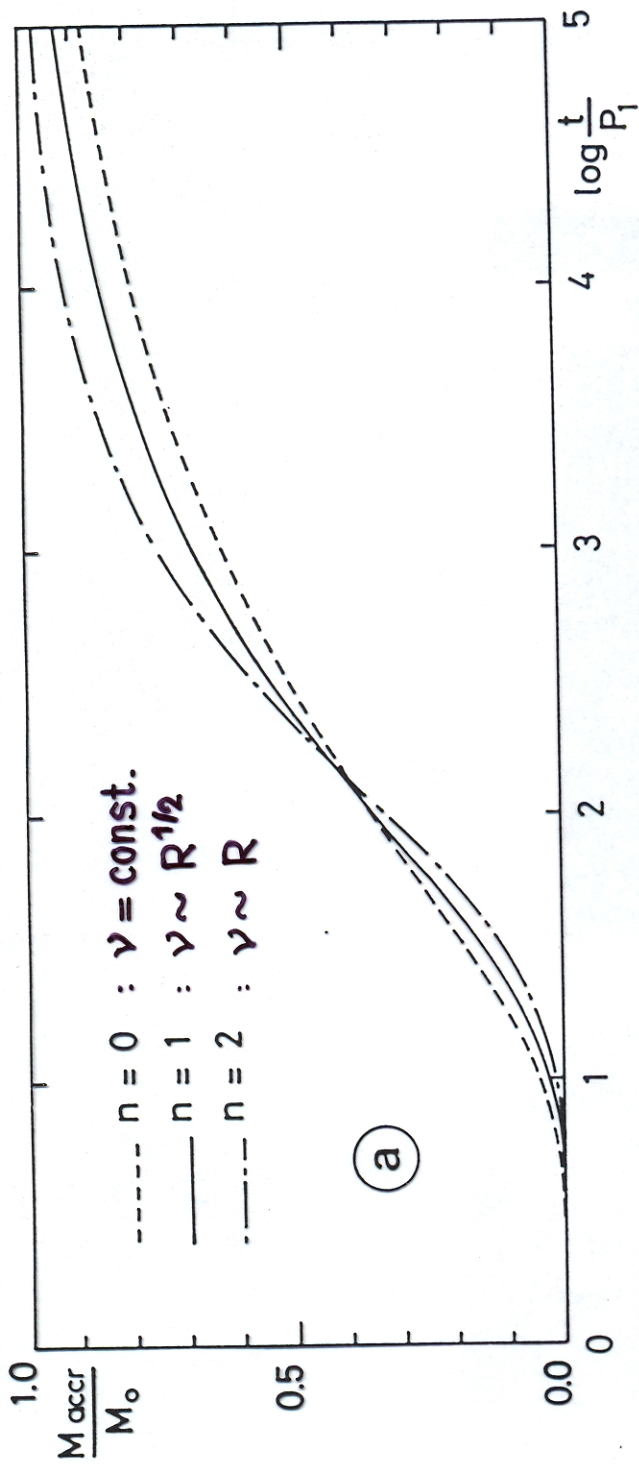
$$\rightarrow \quad v_R \approx - \frac{3v(R)}{R_0} \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{(4-n)x^{2-n}}{2\tau} \right\} < 0 \quad \text{für } 2x^{4-n} \ll \tau$$

und

$$v_R \approx \frac{3v(R)}{R_0} \left\{ \frac{2-n}{8x} + \frac{(4-n)x^{2-n}}{2\tau} \right\} > 0 \quad \text{für } 2x^{4-n} \gg \tau$$

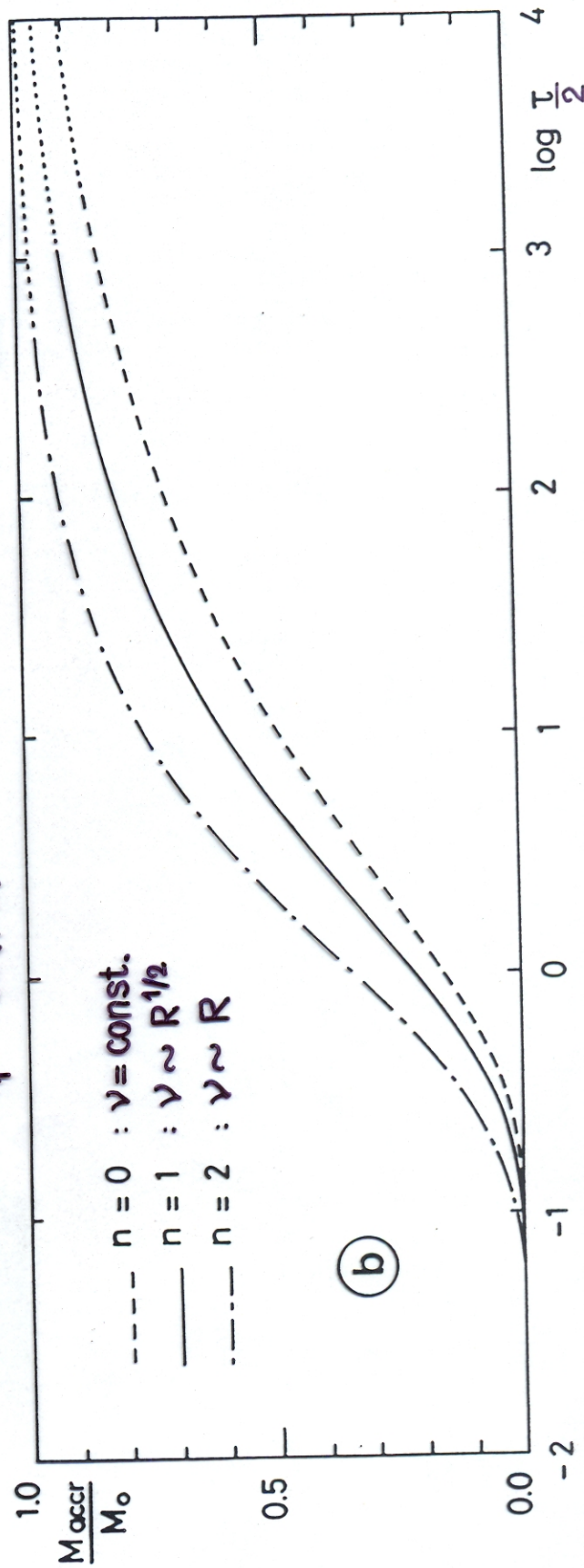
- \blacktriangleright $v_R < 0$ im Innenbereich der Scheibe
 $v_R > 0$ im Aussenbereich der Scheibe

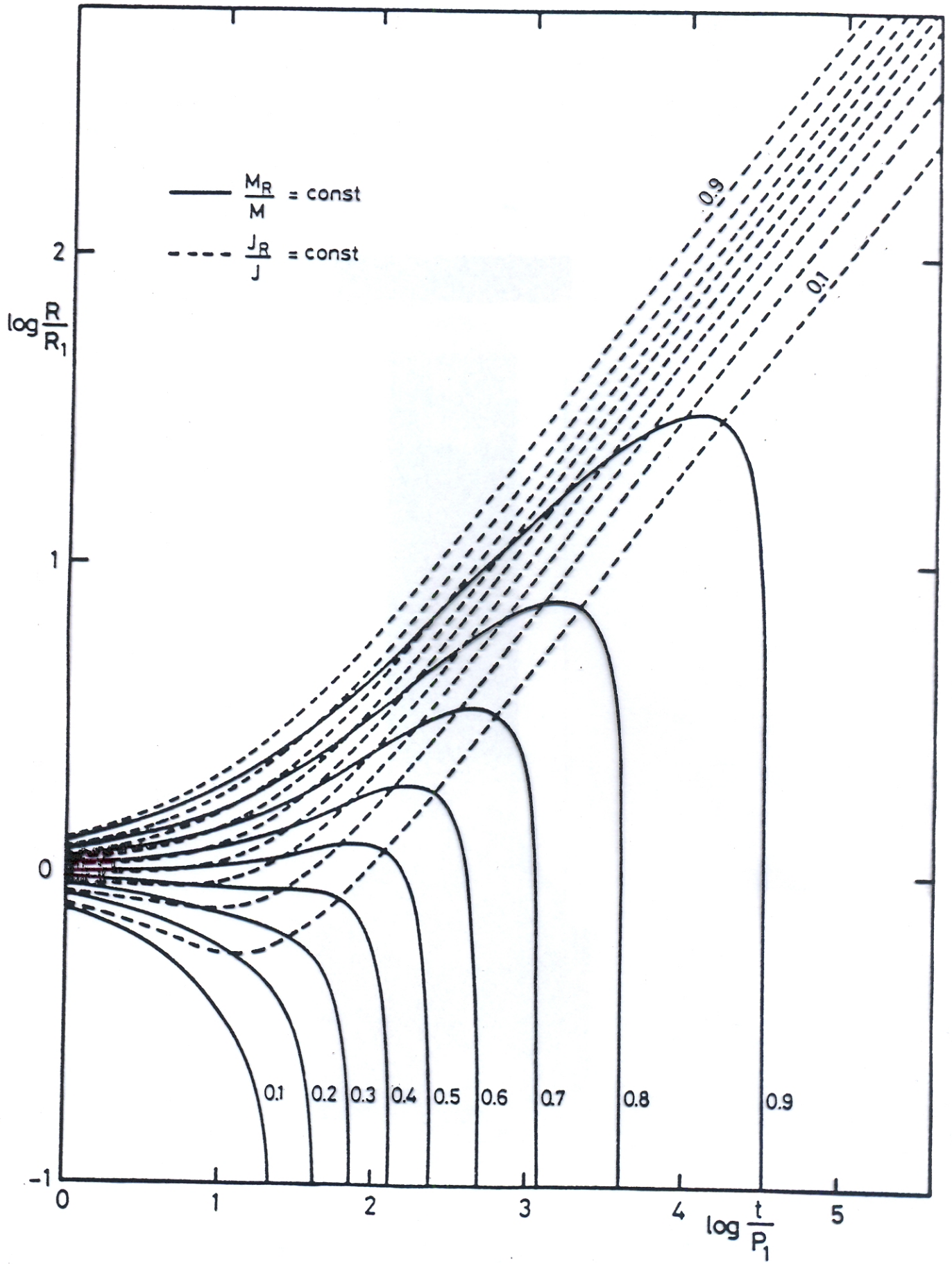
Entwicklung viskoser Akkretionsscheiben : Green'sche Funktion



Relativer Anteil der nach Ablauf der Zeit t (bzw. τ) akkretierten Materie, wobei $\tau = \frac{3(4-n)^2 \nu(R_1) t}{4R_1^2}$

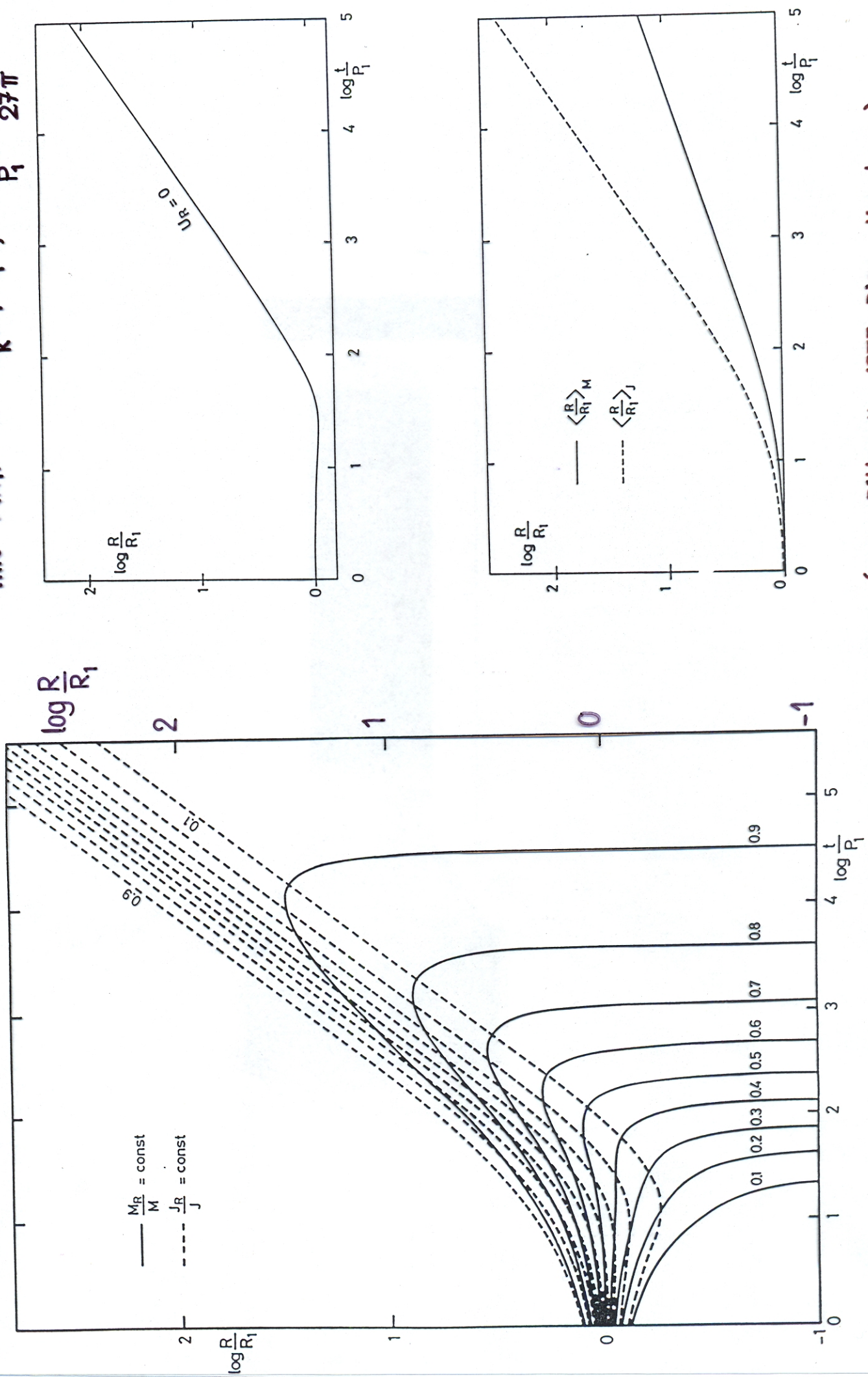
und $\nu(R_1) = 10^{-3} \Omega_K(R_1) R_1^2 \cdot \rightarrow \frac{t}{P_1} = \frac{2 \cdot 10^3}{3\pi(4-n)^2} \tau$





Entwicklung von viskosen Akkretionsscheiben : Green'sche Funktion für $n=1$

mit $\nu(R_1) = 10^{-3} \Omega_k (R_1) R_1^2$, $\rightarrow \frac{t}{P_1} = \frac{210^3 \tau}{27\pi}$



- ▶ $v_R = 0$ für $\tau \approx 2 \times \frac{4-n}{4}$, d.h. bei

$$\underline{\underline{R(t; v_R=0) \approx R_0 \left\{ \frac{3(4-n)^2 v_0 t}{8 R_0^2} \right\}^{\frac{4}{4-n}}}}$$

Mit $n=0$, $v = \text{const.}$ \rightarrow $\underline{\underline{R(t; v_R=0) \approx \frac{6vt}{R_0}}}$

- ▶ Mit $t \uparrow$ wächst der Anteil der Scheibe, in dem $v_R < 0$
(\rightarrow Figuren mit $R(t; v_R=0)$, $R(t; M_r = \text{const.})$ & $R(t; J_r = \text{const.})$)
- ▶ Für $t \rightarrow \infty$: praktisch alle Materie im Zentrum; sehr wenig Materie mit praktisch allem Drehimpuls strömt nach aussen!

3. Stationäre, geometrisch dünne Akkretionsscheiben

- ▶ Zeitskala, mit der sich Stationarität (d.h. $\partial/\partial t = 0$) einstellen kann, ist

$$t_{\text{visc}} \approx \frac{R^2}{\nu}$$

- \rightarrow Stationarität \rightarrow Bedingung an die Konstanz der Rate, mit der Materie in die Scheibe einströmt.

$$\tau_{\dot{M}} = \frac{dt}{d \ln \dot{M}} \gg t_{\text{visc}}$$

(N.B. diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend)

- ▶ Beobachtungen an CVs und LMXBs zeigen, dass t_{visc} in vielen Fällen kurz genug ist, damit die Scheibe \sim stationär sein kann bzw. ist. (\rightarrow Abschnitt zur Viskosität)

\rightarrow Es ist also sinnvoll, stationäre Lösungen zu studieren

(N.B.: Stationäre Modelle sind auch wichtig für die später folgenden Stabilitätsbetrachtungen)

a) Radiale Struktur der Scheibe

Ausgangspunkt : Gleichungen für Massen- und Drehimpulserhaltung mit $\partial/\partial t = 0$

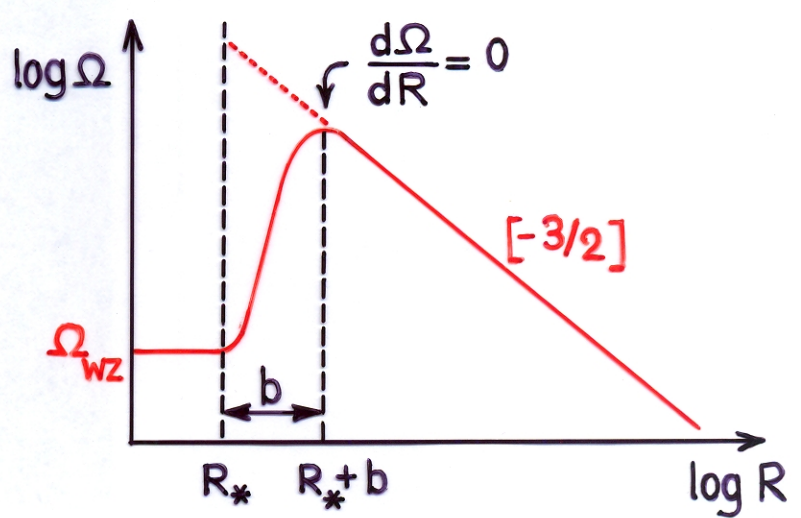
Kontinuitätsgleichung: $\dot{M} = -2\pi R \Sigma v_R = \text{const.} \quad (13)$

Drehimpulserhaltung: $R \Sigma v_R R^2 \Omega = \frac{1}{2\pi} (G+C) = \frac{1}{2\pi} \left[2\pi R v \Sigma R^2 \frac{d\Omega}{dR} + C \right]$

$\rightarrow -v \Sigma \frac{d\Omega}{dR} = \Sigma (-v_R) \Omega + \frac{C}{2\pi R^3} \quad (14)$, C : Integrationskonstante

► Bestimmung von C durch innere Randbedingung

∃ Übergangzone von einer Scheibe mit $\Omega(R) = \Omega_K(R)$ zum WZ mit $\Omega(R_*) = \Omega_{WZ}$ ($\Omega_{WZ} < \Omega_K(R_*)$). Dicke der Übergangzone (Grenzschicht, eng. boundary layer) von der Grössenordnung b, wobei



$\left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R_*+b} = 0$: Def. für b

► Werden später zeigen, dass $b \ll R_*$, wenn $\Omega_{WZ} < \Omega_K(R_*)$

$\rightarrow \Omega(R_*+b) = \Omega_K(R_*) \left[1 + O\left(\frac{b}{R_*}\right) \right] = \left(\frac{GM}{R_*^3} \right)^{1/2} \left[1 + O\left(\frac{b}{R_*}\right) \right] \quad (15)$

(15) in (14) eingesetzt ergibt

$$C(R_*+b) = 2\pi (R_*+b)^3 \left\{ \underbrace{-v \frac{d\Omega}{dR} \Big|_{R_*+b}}_{=0} \Sigma - \Sigma (-v_R) \Omega(R_*+b) \right\}$$

$$= 2\pi (R_*+b)^3 \Sigma v_R \Omega(R_*+b) = \underbrace{-2\pi (R_*+b) \Sigma (-v_R)}_{=-\dot{M}} \cdot (R_*+b)^2 \Omega(R_*+b)$$

$\rightarrow -C(R_*+b) =$ über (R_*+b) advektierter Drehimpuls

$$\rightarrow \underline{\underline{C(R_*+b) = -\dot{M} R_*^2 \Omega_K(R_*) \left[1 + O\left(\frac{b}{R_*}\right)\right] \left[1 + \left(\frac{b}{R_*}\right)^2\right] \approx -\dot{M} (GMR_*)^{1/2}} \quad (16)$$

► Bedeutung von C : = der pro Zeiteinheit akkretierte Drehimpuls

$$(13), (14) \text{ und } (16) \text{ ergeben } \underline{\underline{v\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]}} \quad (17)$$

b) Energiedissipation & Leuchtkraft der Scheibe

► Viskoses Drehmoment G deponiert in Kreisring $(R, \dots, R+dR)$ die Energie $G(\Omega(R+dR) - \Omega(R))$

→ Dissipationsrate pro Flächeneinheit der Scheibe

$$D(R) = \frac{G[\Omega(R+dR) - \Omega(R)]}{2 \cdot 2\pi R dR} = \frac{G \frac{d\Omega}{dR} dR}{4\pi R dR} = \frac{G \Omega'}{4\pi R} = \frac{1}{2} v\Sigma (R\Omega')^2$$

$$\text{Mit } \Omega = \Omega_K \text{ folgt : } \underline{\underline{D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]}} \quad (18)$$

► N.B. $D(R)$ ist unabhängig von v !

Leuchtkraft der Scheibe :

$$\begin{aligned} L(R_1 < R < R_2) &= \int_{R_1}^{R_2} D(R) \cdot 2 \cdot 2\pi R dR = \frac{3GM\dot{M}}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right] \frac{dR}{R^2} \\ &= \frac{3GM\dot{M}}{2} \left\{ \frac{1}{R_1} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{R_*}{R_1}\right)^{1/2}\right] - \frac{1}{R_2} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{R_*}{R_2}\right)^{1/2}\right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Mit } R_1 = R_* \text{ und } R_2 \rightarrow \infty \text{ folgt : } \underline{\underline{L = \frac{GM\dot{M}}{2R_*} = \frac{1}{2} L_{\text{akkr}}}}$$

Woher stammt die lokal dissipierte Energie ?

Im Kreisring mit Radius $(R, \dots, R+dR)$ dissipierte Energie :

$$2 \cdot 2\pi R dR \cdot D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{2R^2} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2} \right] dR$$

lokal frei werdende Bindungsenergie : $\frac{d}{dR} \left(-\frac{GM}{2R} \right) \dot{M} dR = \frac{GM\dot{M}}{2R^2} dR$

Die Differenz = $\frac{GM\dot{M}}{R^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2} \right\}$ ist auf die viskose Kopplung der Scheibe zurückzuführen.

- für $R > \frac{9}{4} R_*$: lokal dissipierte Energie ist grösser als die lokal frei werdende Bindungsenergie
- für $R < \frac{9}{4} R_*$: ist es umgekehrt

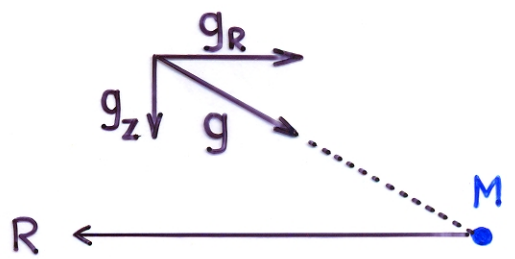
c) Die viskose Zeitskala

$$V_R = -\frac{3}{\Sigma R^{1/2}} \frac{d}{dR} (\nu \Sigma R^{1/2}) = -\frac{3\nu}{2R} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2} \right]^{-1}$$

→ für $R \gg R_*$: $V_R = -\frac{3\nu}{2R} \rightarrow t_{\text{visc}} \approx \frac{R}{-V_R} = \frac{2}{3} \frac{R^2}{\nu}$

d) Vertikale Struktur

Die Verhältnisse sind besonders einfach, wenn $z/R \ll 1$, d.h. wenn $H/R \ll 1$



Hydrostatisches Gleichgewicht in z-Richtung:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g_z, \text{ wobei für } z \ll R \quad g_z \approx \frac{z}{R} g \approx \frac{GM}{R^2} \frac{z}{R}$$

→ $\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GM}{R^3} \rho z \quad (19)$

Abschätzung für H: nehmen an, dass $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

Zustandsgleichung : $P = \underbrace{\frac{Q}{\mu} \varrho T}_{P_G} + \underbrace{\frac{4\sigma}{3c} T^4}_{P_{\text{rad}}}$: ideales Gas + Strahlung

$$\rightarrow \frac{1}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\varrho} \frac{QT}{\mu} \frac{\partial \varrho}{\partial z} = -\frac{GM}{R^3} z \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varrho}{\varrho} = -\frac{\mu GM}{QT R^3} z \partial z$$

$$\rightarrow \underline{\varrho(z) = \varrho(0) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{H}\right)^2}}$$

wobei $H = \left(\frac{QT R^3}{\mu GM}\right)^{1/2}$ $\left\{ \begin{array}{l} = \text{isotherme Skalenhöhe} \\ \approx \text{halbe Dicke der Scheibe} \end{array} \right.$

Mit $\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(z) dz = 2 \varrho(0) H_{\text{eff}}$ folgt $\varrho(z=0) = \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi} H}$ und $H_{\text{eff}} = H \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$\left(\frac{QT}{\mu}\right)^{1/2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \varrho}\right)_T^{1/2} = c_s = \text{isotherme Schallgeschwindigkeit}$$

$$\left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2} = \Omega_K(R) = \frac{v_\varphi}{R}$$

► $\rightarrow H = \frac{c_s R}{v_\varphi} \quad \leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{H}{R} = \frac{c_s}{v_\varphi} = \mathcal{M}^{-1}}}$; $\mathcal{M} = \text{Mach-Zahl der Strömung}$

► in Wirklichkeit ist $\frac{\partial T}{\partial z} \neq 0 \rightarrow \text{Energietransport in z-Richtung}$

Energietransport (durch Strahlung)

► $\frac{\partial T}{\partial z} \gg \frac{\partial T}{\partial R}$, da optische Tiefe in z-Richtung viel kleiner als in R-Richtung

\rightarrow Energietransport erfolgt vorwiegend in z-Richtung

Strahlungstransport : $F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\bar{\kappa}_R \varrho} \frac{\partial T}{\partial z}$ (20) , $\bar{\kappa}_R = \text{Rosseland-Mittel der Opazität}$

(20) gilt nur, wenn $\tau_z = \int_0^\infty \bar{\kappa}_R(z) \varrho(z) dz$
 $\approx \bar{\kappa}_R \int_0^\infty \varrho(z) dz = \bar{\kappa}_R \frac{\Sigma}{2} \gg 1$

Energieerhaltung: $\text{div } F \approx \frac{\partial F}{\partial z} = Q^+$ ↑ pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte (= dissipierte) Energie

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial F}{\partial z} dz = \underbrace{F(\infty)}_{= F(H)} - \underbrace{F(0)}_{= 0} = \int_0^{\infty} Q^+(z) dz = D$$

$$\text{mit } F(H) = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R \varrho} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = -\frac{4\sigma}{3\kappa_R \varrho} \left. \frac{\partial (T^4)}{\partial z} \right|_{z=H} \approx \frac{4\sigma}{3\kappa_R \varrho} \frac{T(z=0)^4 - T(z=H)^4}{H}$$

$$\approx \frac{4\sigma}{3\tau_z} T_c^4 = \frac{4\sigma}{3\tau_z} T_c^4 \quad ; \quad T_c = \text{Temperatur bei } z=0$$

▶ folgt
$$\frac{4\sigma}{3\tau_z} T_c^4 = D = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \quad (21)$$

Für $R \gg R_*$ gilt:
$$T_c^4 = \frac{9GM\dot{M}\tau_z}{32\pi\sigma R^3}$$

$$\rightarrow \frac{H}{R} = \left(\frac{QT_c R}{\mu GM} \right)^{1/2} = \left(\frac{Q}{\mu GM} \right)^{1/2} \left(\frac{9GM\dot{M}}{32\pi\sigma} \right)^{1/8} R^{1/8} \tau_z^{1/8}$$

$$\rightarrow \text{Scheibe ist konkav, sofern } \frac{\partial \ln \tau_z}{\partial \ln R} > -9$$

e) Zusammenstellung der Grundgleichungen

$$1) \varrho_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Sigma}{H}$$

$$5) \frac{4\sigma}{3\tau_z} T_c^4 = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]$$

$$2) H = \frac{RC_s}{v_\varphi}$$

$$6) \tau_z = \int_0^{\infty} \kappa_R \varrho dz = \bar{\kappa}_R \frac{\Sigma}{2}$$

$$3) c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \varrho} = \frac{P_c}{\varrho_c}$$

$$7) v\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]$$

$$4) P_c = \frac{QT_c}{\mu} \varrho_c + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4$$

$$8) v = v(\varrho_c, T_c, \Sigma, \dots)$$

→ ∃ 8 Gleichungen für die 8 Unbekannten $\varrho_c, \Sigma, H, c_s, P_c, T_c, \tau_z$ und v als Funktion von M, \dot{M}, R und ev. weiteren Parametern

f) Oberflächentemperatur und emittiertes Spektrum

► Energiesatz : $\rightarrow \sigma T_{\text{eff}}^4 = D(R)$

$\rightarrow T_{\text{eff}}(R) = \left\{ \frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/4}$ (22) , $T_{\text{eff}} = \text{lokale Effektivtemp.}$

Für $R \gg R_*$: $T_{\text{eff}}(R) \sim R^{-3/4}$

Für $R = \frac{49}{36} R_*$: T_{eff} hat Maximum

$\text{Max}(T_{\text{eff}}) = T_{\text{eff}}\left(\frac{49}{36} R_*\right) = 0.488 \left\{ \frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma R_*^3} \right\}^{1/4}$

emittiertes Spektrum:

Approximation: jeder Kreisring $(R, \dots, R+dR)$ strahle wie ein Schwarzer Körper mit $T(R) = T_{\text{eff}}(R)$

$\rightarrow I_\nu(R) = B_\nu(T(R)) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[e^{h\nu/kT(R)} - 1 \right]^{-1}$

\rightarrow Fluss F_ν von einer Scheibe mit Inklination i und Entfernung d :

$F_\nu = \frac{2\pi \cos i}{d^2} \int_{R_i}^{R_a} I_\nu(R) R dR = \frac{4\pi h \nu^3}{c^2 d^2} \cos i \int_{R_i}^{R_a} \frac{R dR}{e^{h\nu/kT(R)} - 1}$

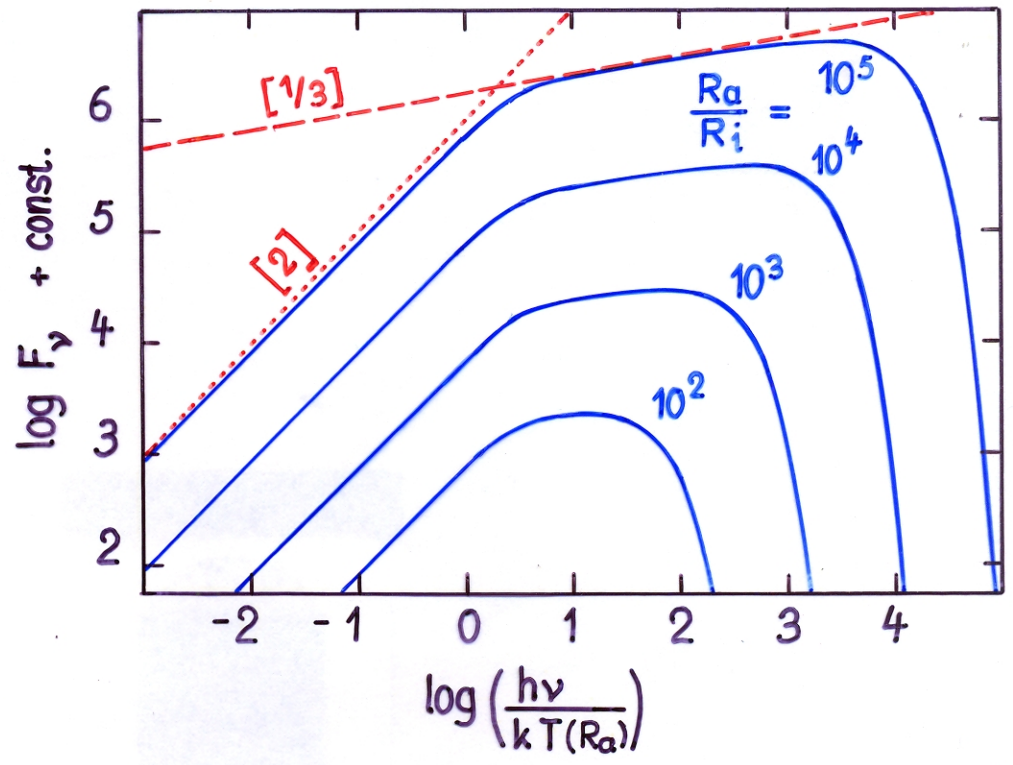
► F_ν ist unabhängig von der Viskosität ν ! \rightarrow Man kann aus Beobachtungen stationärer Scheiben nichts über ν lernen.

Spektrum sehr ausgedehnter Scheiben: $R_i \rightarrow 0$, $R_a \rightarrow \infty$

$\rightarrow F_\nu \sim \nu^{1/3} \int_0^\infty \frac{x^{5/3}}{e^x - 1} dx \sim \nu^{1/3}$, wobei $x = \frac{h\nu}{kT(R)}$

► $F_\nu \sim \nu^{1/3}$ nur, sofern $\frac{kT(R_a)}{h} \ll \nu \ll \frac{kT(R_i)}{h}$

Theoretische Spektren
 von stationären
 Scheiben mit
 $I_\nu(R) = B_\nu(T_{\text{eff}}(R))$
 in Abhängigkeit
 von R_a/R_i



► $\frac{d \ln F_\nu}{d \ln \nu} \approx \frac{1}{3}$ über einen weiten Frequenzbereich gilt nur, wenn $\frac{R_a}{R_i} > \text{einige } 10^2!$

g) Maximale Akkretionsrate, die Eddington-Grenze

► Je grösser \dot{M} , desto heisser die Scheibe bei einem festen R, desto wichtiger wird der Strahlungsdruck

Abhängigkeit von P_{rad}/P_G von \dot{M}

$$P_G = \frac{Q T_c}{\mu} \rho \quad ; \quad P_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{3c} T_c^4 \quad \rightarrow \quad \frac{P_{\text{rad}}}{P_G} = \frac{4\sigma\mu}{3cQ} \frac{T_c^3}{\rho} \sim \frac{T_c^3}{\rho}$$

$$\frac{T_c^3}{\rho} \sim \frac{T_c^3 H}{\Sigma} \sim \frac{T_c^{7/2}}{\Sigma}$$

Gleichung (17): $\Sigma \sim \frac{\dot{M}}{\nu}$

Gleichung (21): $T_c^4 \sim \dot{M} \tau_z \sim \dot{M} \bar{\kappa}_R \Sigma \sim \dot{M}^2 \frac{\bar{\kappa}_R}{\nu}$

→ $\frac{P_{\text{rad}}}{P_G} \sim \dot{M}^{3/4} \bar{\kappa}_R^{7/8} \nu^{1/8}$

Betrachten nun den Extremfall, dass $P_{rad} \gg P_G$:

$$P_c \approx P_{rad} = \frac{4\sigma}{3c} T_c^4 \quad \rightarrow \quad c_s^2 = \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{4\sigma}{3c\rho_c} T_c^4 = \frac{3GM\dot{\tau}_z}{8\pi R^3 \rho_c} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

► Opazität: Elektronenstreuung, $\kappa_{es} = \frac{\sigma_T}{m_p} = 0.2 (1+X) \text{ cm}^2\text{g}^{-1}$

$$\rightarrow \tau_z = \frac{\Sigma}{2} \kappa_{es} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_c H \kappa_{es}$$

$$\rightarrow c_s^2 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3GM\dot{M}\sigma_T}{8\pi R^3 m_p c} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right] = H^2 \Omega^2 = \frac{GMH^2}{R^3}$$

► $\rightarrow H \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sigma_T \dot{M}}{8\pi m_p c} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$: Für $R \gg R_*$ wird H unabhängig von R!

► Maximale Akkretionsrate (bei sphärischer Akkretion) gegeben durch die Bedingung $L_{acc}(\dot{M}) \leq L_{Edd}$, wobei

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GM m_p c}{\sigma_T} = \text{sog. Eddington-Leuchtkraft}$$

$$\rightarrow \dot{M} < \dot{M}_{crit} = \frac{L_{Edd} R_*}{GM} = \frac{4\pi R_* m_p c}{\sigma_T}$$

$$\rightarrow H \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} R_* \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{crit}}\right) \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]; \quad \frac{H}{R} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{crit}}\right) \frac{R_*}{R} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

$$\rightarrow \text{Max} \left(\frac{H}{R}\right) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{9} \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{crit}}\right) \quad \text{bei } R = \frac{9}{4} R_*$$

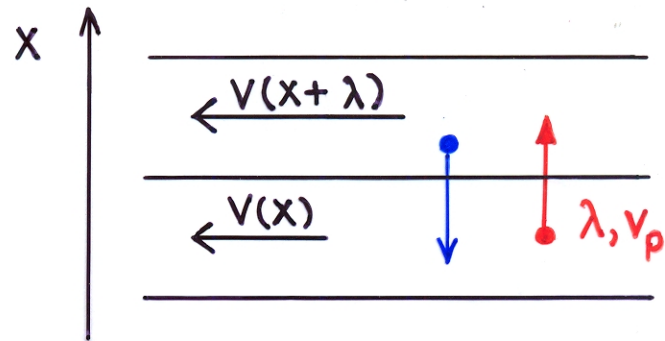
► Wenn $\dot{M} \approx \dot{M}_{crit}$, ist die Scheibe nicht mehr überall geometrisch dünn.

► Selbstkonsistenz : $\dot{M} < \dot{M}_{crit} \approx 1.8 \cdot 10^{-5} M_\odot/a (R_*/10^9\text{cm}), \hat{=} \text{WZ}$
 $\approx 1.8 \cdot 10^{-8} M_\odot/a (R_*/10^6\text{cm}), \hat{=} \text{NS}$

4. Zur Viskosität

Viskosität : mikroskopisch :

Impulsaustausch zwischen angrenzenden Schichten mit unterschiedlichem V (bei Scheiben mit unterschiedlichem v_φ).



Der Impulstransport ist charakterisiert durch

\bar{v}_p = mittlere Pekuliargeschwindigkeit der Teilchen

λ = mittlere freie Weglänge " "

► kinematische Viskosität
$$\underline{\underline{\nu = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}_p}} \quad (23)$$

Die Reynolds - Zahl:

$$Re = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kräfte}} = \frac{L V}{\nu} \quad ; \quad \begin{array}{l} L = \text{charakteristische Länge} \\ V = \text{charakteristische} \\ \text{Geschwindigkeit der} \\ \text{Strömung} \end{array}$$

► Für Scheiben :
$$\underline{\underline{Re = \frac{R v_\varphi}{\nu}}} \quad (24)$$

Bedeutung : $Re \gg 1$: viskose Kräfte sind dynamisch unwichtig

$Re \ll 1$: viskose Kräfte dominieren

Aus (23) & (24) folgt :
$$\underline{\underline{Re = 3 \frac{R}{\lambda} \frac{v_\varphi}{\bar{v}_p}}}$$