

2. Sphärisch symmetrische Akkretion

- Grundlagen
 - Grundgleichungen der Gasdynamik
 - Zustandsgleichung
 - Adiabatische Zustandsänderungen
 - Schallgeschwindigkeiten
- Stationäre, sphärisch symmetrische Akkretion
 - Ausgangsgleichungen
 - Lösungstypen
- Stationäre, adiabatische Akkretions-Stossfront
 - Die Rankine-Hugoniot-Stoss-Bedingungen
 - Lösung der Rankine-Hugoniot Bedingungen
- Maximale Akkretionsrate, Eddington-Leuchtkraft

Vorlesung SS 2007: Akkretionsphänomene in kompakten Doppelsternen

Sphärisch symmetrische Akkretion

Ergänzende Literatur

Frank, J., King, A.R., Raine, D.J.: **Accretion Power in Astrophysics**, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge (2002), ISBN: 0-5216-2957-8, Kapitel 2

Shapiro, S.L., Teukolsky, S.A.: **Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars**, J. Wiley & Sons, New York (1983), ISBN: 0-471-87316-0, Kapitel 14.1 - 14.3

Sphärisch symmetrische Akkretion

Grundgleichungen der Gasdynamik

1) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \begin{array}{l} \rho = \text{Dichte} \\ \vec{v} = \text{Geschwindigkeits-Vektor} \end{array}$$

2) Impulsgleichung (Euler-Gleichung)

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = -\operatorname{grad} P + \vec{f}, \quad \begin{array}{l} P = \text{Druck} \\ \vec{f} = \text{äussere Kraft, z.B.} \\ \vec{f}_{\text{grav}} = \rho \vec{g} \end{array}$$

3) Energiegleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) + \operatorname{div} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u + P \right) \vec{v} \right] = \vec{f} \cdot \vec{v} - \operatorname{div} \vec{F}_{\text{rad}} - \operatorname{div} \vec{q},$$

u = innere Energie pro Masseneinheit

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \int dv \int d\Omega \vec{n} I_{\nu}(\vec{n}, r) = \text{Vektor des Strahlungsflusses}$$

$\vec{n} I_{\nu}$ = Intensität in Richtung \vec{n}

$$\vec{q} \sim \operatorname{grad} T = \text{Vektor des Wärmeleitungsflusses}$$

Zustandsgleichung

Hier: nur ideales Gas (ohne Strahlung):

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T$$

R = Gaskonstante

$$u = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$$

μ = mittleres Molekulargewicht

T = Temperatur

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

C_p = spez. Wärme bei konst. P

C_v = spez. Wärme bei konst. ρ

► einatomiges ideales Gas: $\gamma = \frac{5}{3}$, $C_p = \frac{5}{2} R$, $C_v = \frac{3}{2} R$

Adiabatische Zustandsänderungen

1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$dQ = du + P d\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad Q = \text{Energieinhalt pro Masseneinheit}$$

► adiabatische Änderung: $dQ = 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow P &= K \rho^\gamma, & K &= \text{Polytropenkonstante} \\ T &= \frac{\mu}{Q} K \rho^{\gamma-1}, & \gamma &= \frac{C_P}{C_V} \end{aligned}$$

Schallgeschwindigkeiten

► adiabatische Schallgeschwindigkeit

$$c_s^{\text{ad}} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\text{ad}}^{1/2} = \left(\gamma \frac{Q}{\mu} T\right)^{1/2} = \left(\gamma \frac{P}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\gamma K \rho^{\gamma-1}\right)^{1/2}$$

► isotherme Schallgeschwindigkeit

$$c_s^{\text{iso}} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T^{1/2} = \left(\frac{Q}{\mu} T\right)^{1/2} = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2}$$

Stationäre, sphärisch symmetrische Akkretion

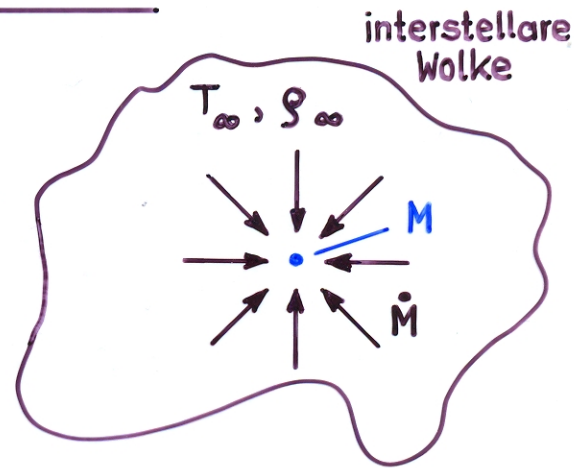
Stationarität: $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

sphärische Symmetrie:

in sphärischen Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) :

$$\vec{V} = (v, 0, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{d}{dr}$$



► **Gesucht:** $\dot{M}(T_\infty, \rho_\infty)$

Ausgangsgleichungen

1) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0 \quad (1) \quad \rightarrow \quad r^2 \rho v = \text{const.}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\dot{M} = 4\pi r^2 \rho (-v)} \quad (2), \quad \dot{M} = \text{Akkretionsrate}$$

2) Euler-Gleichung

$$\vec{f} = (f, 0, 0) \quad \text{mit} \quad f = -\frac{GM}{r^2} \rho$$

$$\rightarrow \quad v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (3)$$

3) An Stelle der Energiegleichung: Setzen Polytropenbeziehung

$$P = K \rho^\gamma \quad (4), \quad \text{wobei} \quad 1 < \gamma \leq 5/3$$

4) Zustandsgleichung: $P = \frac{Q}{\mu} \rho T \quad (5)$

Umformung von Gl. (3)

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}, \quad c_s = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{1/2} = \text{Schallgeschwindigkeit}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = c_s^2 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad (6)$$

$$\text{aus (1) folgt: } \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = - \frac{1}{vr^2} \frac{d}{dr} (vr^2) \quad (7)$$

$$(7) \text{ in (3) ergibt: } v \frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2} \frac{d}{dr} (vr^2) + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (8)$$

oder ausdifferenziert:

$$\underline{\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr} \left[1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right] = - \frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{2c_s^2 r}{GM} \right]} \quad (9)$$

Lösungstypen

► Die transformierte Euler-Gleichung (9) erlaubt es, die möglichen Lösungen in verschiedene Klassen einzuteilen:

► Nebenbedingungen:

1) für grosse r ist $-\frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{2c_s^2 r}{GM} \right] > 0$, da $c_s^2 < \infty$

2) es muss $\frac{dv^2}{dr} < 0$ sein, da $v(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ und $-v(r=R_*) > 0$

► Folgerungen:

a) aus 1) und 2) folgt: $v^2 < c_s^2$ für grosse r

→ Unterschallströmung weit weg vom akkretierenden Stern

Mit $r \downarrow$ $\left[1 - \frac{2c_s^2 r}{GM} \right] \uparrow$ bis für $r = r_s$: $\left[1 - \frac{2c_s^2(r_s)r_s}{GM} \right] = 0$

→ $r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)} = \frac{\mu GM}{2\gamma Q T(r_s)} \approx 7.5 \cdot 10^{13} \text{ cm} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{T(r_s)}{10^4 \text{ K}} \right)^{-1} \gg R_* \quad (10)$

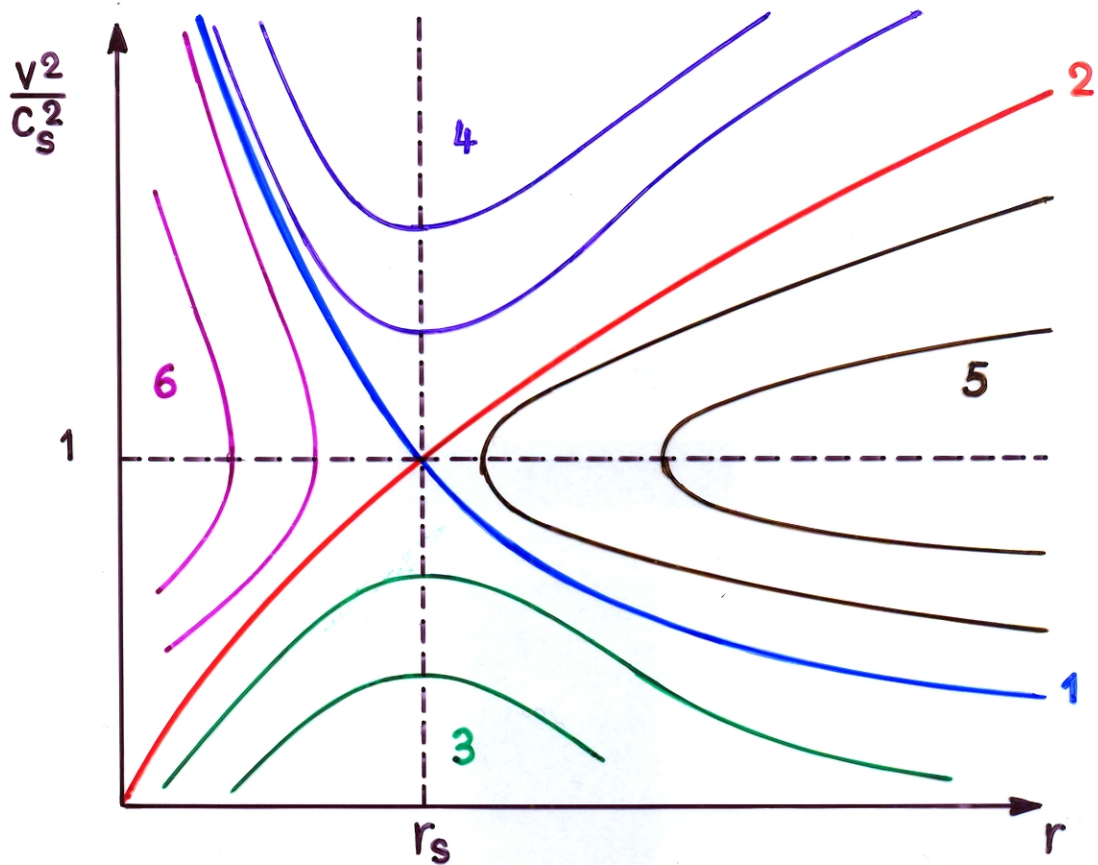
b) für $r < r_s$ muss $v^2 > c_s^2$ sein → Überschallströmung

c) bei $r = r_s$ muss gelten:

entweder $v^2 = c_s^2 \quad (11a)$

oder $\frac{dv^2}{dr} = 0 \quad (11b)$

► Damit können die möglichen Lösungen aufgrund ihrer Eigenschaften bei $r = r_s$ klassifiziert werden:



Typ 1: $v^2(r_s) = C_s^2(r_s)$, $v^2 \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$
 $v^2 \geq C_s^2$ für $r \geq r_s$

Typ 2: $v^2(r_s) = C_s^2(r_s)$, $v^2 \rightarrow 0$ für $r \rightarrow 0$
 $v^2 \geq C_s^2$ für $r \geq r_s$

transsonische
Strömungen

Typ 3: $v^2 < C_s^2 \forall r$, $\frac{dv^2}{dr} = 0$ bei $r = r_s$

reine Unterschall-
strömung

Typ 4: $v^2 > C_s^2 \forall r$, $\frac{dv^2}{dr} = 0$ bei $r = r_s$

reine Überschall-
strömung

Typ 5: $\frac{dv^2}{dr} = \infty$, wenn $v^2 = C_s^2(r)$; nur $r > r_s$

Typ 6: $\frac{dv^2}{dr} = \infty$, wenn $v^2 = C_s^2(r)$; nur $r < r_s$

Lösungen existieren
nicht im ganzen
r-Bereich

∃ nur je eine Lösung vom Typ 1 und 2, sog. transsonische Lösungen
(Übergang von Unterschall- zu Überschallströmung bei $r = r_s$;
 r_s : Schallpunkt der Strömung)

∃ Lösungs-Scharen für Lösungen vom Typ 3-6.

- Einzige, für Akkretion in Frage kommende Lösung ist die vom Typ 1.
 → ∃ nur eine Lösung.

Lösung der Euler-Gleichung (3)

Integration von (3) entlang einer Stromlinie

$$\int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} \right\} dr = \frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{GM}{r} = \text{const.} \quad (12)$$

(12): verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung

- Betrachten im folgenden nur den Fall $\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1$

→ aus (4):
$$\int \frac{dP}{\rho} = \gamma K \int \rho^{\gamma-2} d\rho = \frac{\gamma}{\gamma-1} K \rho^{\gamma-1}$$

→
$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} K \rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \frac{v^2}{2} + \frac{C_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = C = \text{const.} \quad (13)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten C: nehmen (13) für $r \rightarrow \infty$.

→ $v \rightarrow 0$, $C_s = C_s(\infty)$

→
$$C = \frac{C_s^2(\infty)}{\gamma-1} \quad (14)$$

Mit (10) und (11) gilt nun bei $r = r_s$:

$$\frac{C_s^2(r_s)}{2} + \frac{C_s^2(r_s)}{\gamma-1} - \frac{GM}{r_s} = \frac{C_s^2(r_s)}{2} + \frac{C_s^2(r_s)}{\gamma-1} - 2C_s^2(r_s) = \frac{C_s^2(\infty)}{\gamma-1},$$

oder

$$\underline{C_s(r_s) = C_s(\infty) \left(\frac{2}{5-3\gamma} \right)^{1/2}}, \quad 1 < \gamma < 5/3 \quad (15)$$

Da $C_s^2 \sim \rho^{\gamma-1}$ →
$$\underline{\rho(r_s) = \rho(\infty) \left(\frac{C_s(r_s)}{C_s(\infty)} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}} \quad (16)$$

Da
$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) (-v(r)) = 4\pi r_s^2 \rho(r_s) C_s(r_s) \quad (17)$$

ergibt (10), (15) und (16) in (17) eingesetzt:

$$\dot{M} = \frac{\pi G^2 M^2}{c_s^3(\infty)} \rho(\infty) \left[\frac{2}{5-3\gamma} \right]^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}} \quad (18)$$

$$\dot{M} \approx 2 \cdot 10^{-15} \frac{M_\odot}{a} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\rho(\infty)}{10^{-24} \text{gcm}^{-3}} \right) \left(\frac{c_s(\infty)}{10 \text{km s}^{-1}} \right)^{-3} \quad \text{für } \gamma = 1.4$$

→ Bei Akkretion aus dem interstellaren Gas sehr kleines \dot{M} !

Bestimmung von $v(r)$, $\rho(r)$, $c_s(r)$, etc.

(18) in (17) eingesetzt ergibt

$$-v = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(r)} = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(\infty)} \left[\frac{c_s(\infty)}{c_s(r)} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (19)$$

(19) in (13) eingesetzt ergibt eine algebr. Gleichung mit i.a. gebrochenen Exponenten für $c_s(r)$, die numerisch gelöst werden muss.

Qualitatives Verhalten der Lösung

a) weit weg vom Stern: $r \gg r_s$, $c_s(r) \approx c_s(\infty)$

$$\rightarrow \text{aus (13) und (14): } \frac{v^2}{2} \approx \frac{GM}{r} \rightarrow v(r) \approx \left(\frac{2GM}{r} \right)^{1/2} \ll c_s(r)$$

mit $r \downarrow$ $v \uparrow$. → $v(r) \rightarrow c_s(r) \approx c_s(\infty)$ für

$$r = r_{\text{acc}} \approx \frac{2GM}{c_s^2(\infty)} \quad : \quad \text{Akkretionsradius}$$

Bedeutung von r_{acc} :

$$\frac{\text{thermische Energie pro Masseneinheit}}{\text{Gravitationsenergie pro Masseneinheit}} = \frac{c_s^2(r)}{2} \left(\frac{GM}{r} \right)^{-1} \approx \frac{r}{r_{\text{acc}}} \quad \text{für } r \gtrsim r_{\text{acc}}$$

→ thermische Energie dominiert, Gravitation hat geringen Einfluss für $r \gg r_{\text{acc}}$.

► N.B. grossenordnungsmässig ist $\dot{M} \approx \pi r_{\text{acc}}^2 \rho(\infty) c_s(\infty)$

b) innerhalb des Schallpunkts : $r < r_s$, $v^2 > c_s^2$

→ Materie im wesentl. im freien Fall , Gravitation dominiert , Druck ist unwichtig.

$$\text{Wenn } v^2(r) \gg c_s^2(r) > c_s^2(\infty) : \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \approx 0$$

$$\rightarrow v^2(r) \approx v_{\text{ff}}^2(r) = \frac{2GM}{r} \gg c_s^2(r) \text{ für } r < r_s$$

$$\text{Aus (1) : } r^2 v \varrho = \text{const.} = r^2 \left(\frac{2GM}{r} \right)^{1/2} \varrho = \text{const.} r^{3/2} \varrho$$

$$\rightarrow \underline{\varrho(r) \approx \varrho(r_s) \left(\frac{r_s}{r} \right)^{3/2}} \quad r < r_s$$

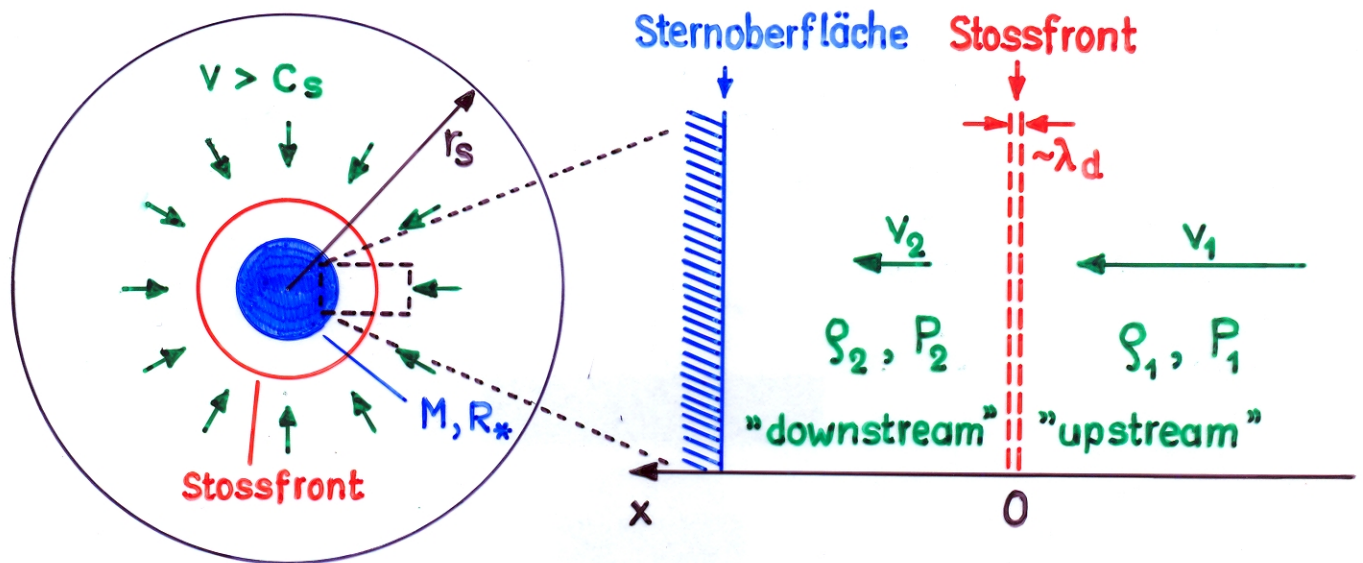
Zusammenfassung

1. Die stationäre Akkretionsrate wird durch die Bedingungen bei $r \rightarrow \infty$ sowie eine Zusatzbedingung in der Nähe der Sternoberfläche (z.B. $v^2 > c_s^2$ für kleine r) bestimmt.
2. Gravitation ist wichtig nur für $r < r_{\text{acc}}$
3. Stationäre Akkretion mit der durch Gl. 18 gegebenen oder einer höheren Rate muss durch einen Schallpunkt gehen. In der Nähe der Sternoberfläche ist die Strömung eine Überschallströmung.

Konsequenz von Punkt 3:

Bevor die Materie die Sternoberfläche erreichen kann, muss sie durch eine Stoßfront, in der sie auf Unterschallgeschwindigkeit abgebremst wird.

Die stationäre, adiabatische Akkretions - Stossfront



Vereinfachungen

- betrachten ebene Stossfront : $r \rightarrow x$
- Strömung senkrecht zur Stossfront
- Die Stossfront sei ∞ dünn (d.h. mittl. freie Weglänge der Teilchen $\lambda_d \ll dx/d \ln P, dx/d \ln \rho, dx/d \ln v$, d.h. als die makroskopischen Längenskalen beiderseits der Stossfront)
- adiabatischer Stoss, d.h. keine Energieverluste beim Stoss
- stationäre Strömung $\rightarrow \partial/\partial t = 0$

Die Rankine - Hugoniot Stoss - Bedingungen

- Die Beziehungen zwischen (ρ_1, v_1, P_1) und (ρ_2, v_2, P_2) ergeben sich durch Integration der **Erhaltungssätze** über die Stossfront.

1) Kontinuitätsgleichung : $\frac{d}{dx} (\rho v) = 0$

$\rightarrow \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = J = \text{Massenstrom}$ (1)

2) Impulsgleichung (Euler - Gleichung):

$$\rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dP}{dx} = f_x \Leftrightarrow \frac{d}{dx} (P + \rho v^2) = f_x$$

Integration über die Stossfront ergibt

$$(P_1 + \rho_1 v_1^2) - (P_2 + \rho_2 v_2^2) = \lim_{dx \rightarrow 0} \int_{-dx}^{dx} f_x dx = 0, \text{ da } f_x < \infty \text{ in der Stossfront und } f_x = 0 \text{ ausserhalb}$$

$$\rightarrow P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2 = I = \text{Impulsfluss} \quad (2)$$

$$3) \text{ Energiegleichung: } \frac{d}{dx} \left[v \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u + P \right) \right] = f_x v$$

$$\text{Mit} \quad u = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho}{\mu} \frac{P}{\rho}$$

$$\text{und} \quad \rho v = J = \text{const.}$$

folgt:

$$\frac{d}{dx} \left[v \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u + P \right) \right] = \rho v \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \right] = f_x v$$

Integration über die Stossfront ergibt (da $\lim_{dx \rightarrow 0} \int_{-dx}^{dx} v f_x dx = 0$):

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} = E = \text{spez. Energie} \quad (3)$$

► (1) - (3): sog. Rankine-Hugoniot-Bedingungen

Lösung der Rankine-Hugoniot-Bedingungen

$$\frac{I}{Jv} = \frac{P}{\rho v^2} + 1 \quad (4)$$

$$\text{► Def.: Mach-Zahl } \mathcal{M}: \quad \mathcal{M}^2 = \frac{v^2}{(c_s^{\text{ad}})^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho v^2}{P} \quad (5)$$

aus (4) und (5) folgt

$$\frac{I}{Jv} = \frac{1}{\gamma \mathcal{M}^2} + 1 \quad (6)$$

(4) in (3) eingesetzt ergibt:

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\frac{Iv}{J} - v^2 \right] \Leftrightarrow \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} v^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{I}{J} v + E = 0 \quad (7)$$

(7) ist eine quadr. Gleichung für v mit den Lösungen v_1 und v_2 , wobei

$$v_1 + v_2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{I}{J} \quad (8)$$

oder
$$1 + \frac{v_2}{v_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{I}{Jv_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{1}{\gamma \mathcal{M}_1^2} + 1 \right], \quad (9)$$

wobei $\mathcal{M}_1 = v_1 / c_s^{\text{ad}}(1)$ die Mach-Zahl vor der Stossfront ("upstream") ist.

Der Grenzfall $\mathcal{M}_1 \gg 1$: sog. starker Stoss

Mit $\mathcal{M}_1 \gg 1$ folgt:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad \left(= \frac{1}{4} \text{ für } \gamma = \frac{5}{3} \right)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad \left(= 4 \text{ für } \gamma = \frac{5}{3} \right)$$

$$I = \rho_1 v_1^2 \left(\frac{1}{\gamma \mathcal{M}_1^2} + 1 \right) \approx \rho_1 v_1^2$$

$$P_1 = I - \rho_1 v_1^2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{\gamma \mathcal{M}_1^2} \ll \rho_1 v_1^2$$

→ vor dem Stoss ist der Gasdruck P_1 gegenüber dem Staudruck $\rho_1 v_1^2$ vernachlässigbar.

Der Gasdruck hinter der Stossfront P_2 wird

$$P_2 = I - \rho_2 v_2^2 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 v_1^2 \quad \left(= \frac{3}{4} \rho_1 v_1^2 \text{ für } \gamma = \frac{5}{3} \right)$$

→ Dissipation in der Stossfront wandelt den grössten Teil der geordneten kinetischen Energie der Überschallströmung in Wärme um. → Die Temperatur T_2 des Gases hinter der Stossfront ist dadurch so hoch, dass die Strömung eine Unterschallströmung ist.

$$c_s^{\text{ad}}(2) = \left(\gamma \frac{P_2}{\rho_2} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1} v_1$$

→
$$\mathcal{M}_2 = \frac{v_2}{c_s^{\text{ad}}(2)} = \left[\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{1/2} < 1 \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ für } \gamma = \frac{5}{3} \right)$$

Die Temperatur hinter der Stossfront wird

$$T_2 = \frac{\mu}{\mathcal{Q}} \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{\mu}{\mathcal{Q}} v_1^2$$

Unter der Annahme, dass

$$v_1^2 \approx v_{\text{ff}}^2 = \frac{2GM}{R_*}$$

wird $T_2 \approx \frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{GM\mu}{\mathcal{Q} R_*} \quad \left(= \frac{3}{8} \frac{GM\mu}{\mathcal{Q} R_*} \text{ für } \gamma = \frac{5}{3} \right)$

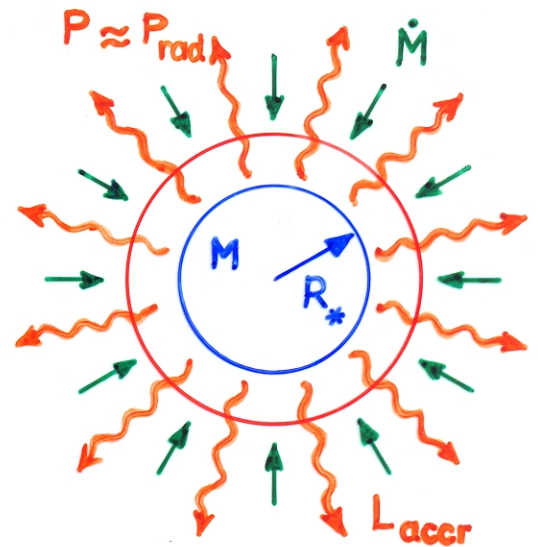
\approx Virialtemperatur des akkretierenden Sterns

Die maximale Akkretionsrate; die Eddington-Leuchtkraft

- Betrachten sphärisch symmetrische Akkretion mit Rate \dot{M} auf Stern mit Masse M und Radius R_* .

→ Akkretionsleuchtkraft

$$L_{\text{accr}} \approx \frac{GM\dot{M}}{R_*} \quad (1)$$



- → Strahlungsdruck P_{rad} → Rückwirkung auf Masseneinstrom!

- Wie gross darf L_{accr} bzw. \dot{M} max. werden, damit Akkretion noch möglich ist?

Betrachten dazu die Euler-Gleichung:

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (2)$$

Verlangen: $\frac{dv^2}{dr} < 0$ (beschleunigte Strömung auf den Stern)

$$\rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} < \frac{GM}{r^2} \quad (3)$$

Annahme: $P = P_G + P_{\text{rad}} \approx P_{\text{rad}} \Leftrightarrow P_G \ll P_{\text{rad}}$

$$\rightarrow \frac{dP}{dr} \approx \frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\pi}{c} \int_{\nu} \kappa_{\nu} F_{\nu} d\nu, \quad (4)$$

wobei $\vec{F}_{\nu} = \int_{\Omega} \vec{I}_{\nu} \vec{n} d\Omega = \text{Strahlungsfluss}; I_{\nu} = \text{Intensität}$

- Voraussetzung: akkretiertes Plasma ist vollständig ionisiert, (ρ, T) so dass $\kappa_{\nu} = \kappa_{es}$ (Elektronenstreuung dominiert):

$$\kappa_{\nu} = \kappa_{es} = n_e \sigma_T = \frac{\rho}{m_p \mu_e} \sigma_T; \quad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = \text{Thomson-Querschnitt}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dr} \approx -\frac{\pi}{c} \frac{\rho}{m_p \mu_e} \sigma_T \int_{\nu} F_{\nu} d\nu = -(\pi F) \frac{\rho \sigma_T}{m_p \mu_e} = -\frac{L}{4\pi r^2} \frac{\rho \sigma_T}{m_p c \mu_e} \quad (5)$$

(5) in (3) eingesetzt ergibt:

$$\blacktriangleright L \lesssim \frac{4\pi GMc \varrho}{\sigma_T n_e} = \frac{4\pi GM m_p c}{\sigma_T} \mu_e = L_E \mu_e \quad (6)$$

$$\underline{\underline{L_E = \frac{4\pi GM m_p c}{\sigma_T} : \text{Eddington - Leuchtkraft}}}$$

$$L_E \approx 1.3 \cdot 10^{38} \text{ erg s}^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \approx 3.4 \cdot 10^4 L_\odot \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$$

aus (1) und (6) folgt:

$$\blacktriangleright \dot{M} \approx \frac{L R_*}{GM} \lesssim \frac{4\pi R_* m_p c}{\sigma_T} \mu_e = \dot{M}_E \mu_e \quad (7)$$

$$\underline{\underline{\dot{M}_E = \frac{4\pi R_* m_p c}{\sigma_T} : \text{Eddington - Akkretionsrate}}}$$

$$\dot{M}_E \approx 9.5 \cdot 10^{17} \text{ g s}^{-1} \left(\frac{R_*}{10^6 \text{ cm}} \right) \approx 1.5 \cdot 10^{-8} M_\odot / \text{a} \left(\frac{R_*}{10^6 \text{ cm}} \right)$$

- ▶ Bei $L_* \gtrsim L_E$ oder $L_{\text{accr}} \gtrsim L_E$ bzw. $\dot{M} \gtrsim \dot{M}_E$ wird die Akkretion durch den Strahlungsdruck be-(ver-)hindert! Dies gilt qualitativ auch für nicht sphärisch symmetrische Akkretion.