

# Hydrodynamik von Punktexplosionen

Martin Obergaullinger

7. 6. 2002

# Hydrodynamik von Punktexplosionen

- Punktexplosion im idealen Gas
- Stoßwellen
- Ähnlichkeitsströmung und Sedov-Lösung
- Rayleigh-Taylor - Instabilitäten

# Punktexplosion

- Energiequelle gemäß

$$E \propto \delta(\vec{x}) \cdot \delta(t)$$

- Die sich ergebende Stoßwelle wird als sphärisch-symmetrisch und stark betrachtet
- Das umgebende Medium wird als ideale Flüssigkeit und als ideales Gas betrachtet

# Ideales Gas

- Zustandsgleichung  $PV = \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$
- Schallgeschwindigkeit  $c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$  mit  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$
- Innere Energie, Enthalpie und Entropie  
 $\varepsilon = \frac{P}{\rho(\gamma-1)}$       $w = \frac{\gamma P}{\rho(\gamma-1)}$       $s = c_V \ln \frac{P}{\rho^\gamma}$
- Polytrope Zustandsgleichung

$$P = \kappa \rho^\gamma$$

# Unstetigkeitsflächen

Stetigkeitsbedingungen an der Diskontinuität

Massenerhaltung

$$[\rho v_n] = 0$$

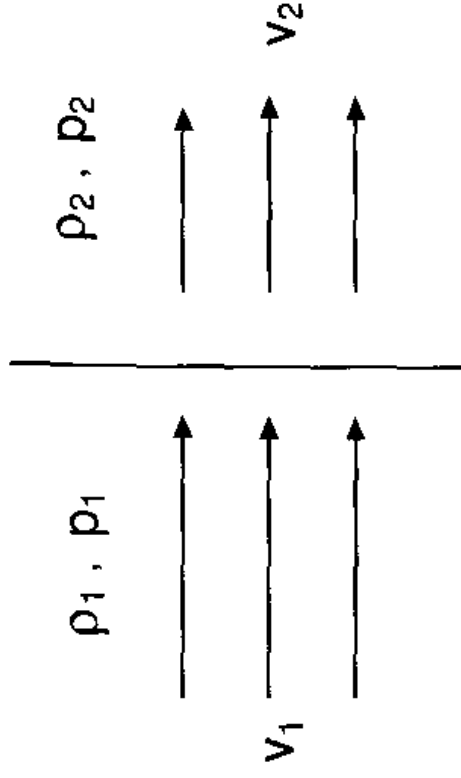
Energieerhaltung

$$[\rho v_n (\frac{1}{2}v^2 + w)] = 0$$

Impulserhaltung

$$[p + \rho v_n^2] = 0 \quad [\rho v_n v_t] = 0$$

mit  $[x] = x_2 - x_1$ , n: normal, t: tangential zur Diskontinuität



# Typen von Unstetigkeitsflächen

- Tangentiale Unstetigkeitsflächen: kein Massenstrom

$$v_{1,n} = 0 = v_{2,n} \quad [p] = 0$$

- **Stoßwellen:** Massenstrom ungleich Null

$$[\rho v_n] = 0 \quad \left[ \frac{v_n^2}{2} + w \right] = 0$$

$$[p + \rho v_n^2] = 0$$

Massenstrom durch eine Stoßwelle

$$j^2 = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}$$

# Stoßwellen

- Folgerung: Unstetiger Verlauf von Dichte, Druck und abgeleiteten Größen
- Näherung: Stoßwelle als dünne Schicht für starke Stöße durchaus gerechtfertigt
- Voraussetzung: Überschallgeschwindigkeit
- Ansonsten: Möglichkeit des Ausgleichs und der Schallwellenabstrahlung
- Erzeugung:
  - Explosionen
  - Störung einer Überschallströmung

## Stoßwellen

- Änderungsrichtung der thermodynamischen Größen

$$s_2 > s_1 \quad p_2 > p_1 \quad \rho_2 > \rho_1$$

$$v_1 > v_2 \quad v_1 > c_1 \quad v_2 < c_2$$

- Überschallströmung
- Entropiezuwachs
  - Irreversibilität
  - Potential- wird zu Wirbelströmung
- Druck- und Dichtegradient haben gleiche Richtung
  - Stabilitätsanalyse

## Stoßwellen

- Beziehungen für die thermodynamischen Größen: exakt und in der Näherung für starke Stoßwellen:

$$P_2(\gamma - 1) \gg P_1(\gamma + 1)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_2}{(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2} \Downarrow \cong \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

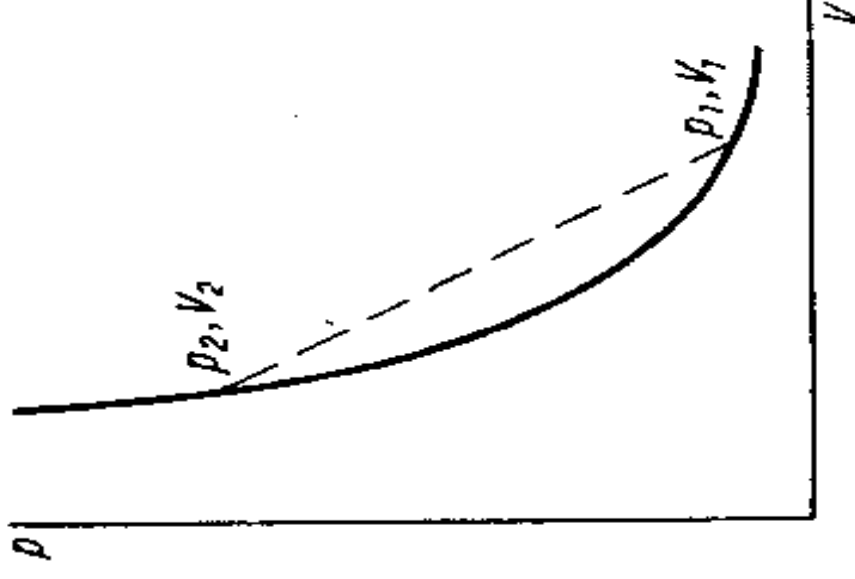
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{(\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_2}{(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2} \cong \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{P_2}{P_1}$$

- Geschwindigkeiten vor / hinter einer starken Stoßwelle

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \frac{P_2}{\rho_1}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} \frac{P_2}{\rho_1}}$$

## Stoßwellen

Es gibt eine eindeutige Funktion des Verhältnisses der Dichten vor / hinter dem Stoß in Abhängigkeit vom Verhältnis der Drücke, die Hugoniotische oder Stoßadiabate. Aus dem Schnitt dieser Funktion, mit der durch den Massenfluß gegebenen Gerade läßt sich der Zustand hinter dem Stoß bestimmen. Dann beschreibt ein Parameter die Stoßwelle vollständig.



## Stoßwellen

Ausgedrückt durch die Mach-Zahlen:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{(\gamma - 1)Ma_1^2 + 2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 2 \frac{\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

$$Ma_1 = \frac{v_1}{c_1}$$

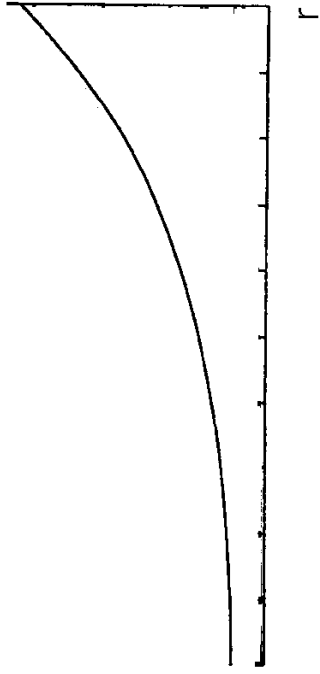
## Stoßwellen

- Für Stöße großer Intensität strebt das Verhältnis der Dichten vor / hinter dem Stoß gegen eine Konstante, das der Temperaturen wächst unbegrenzt.
- Für den Grenzfall der Propagation mit Schallgeschwindigkeit verschwindet der Stoß.

# Ähnlichkeitsströmung

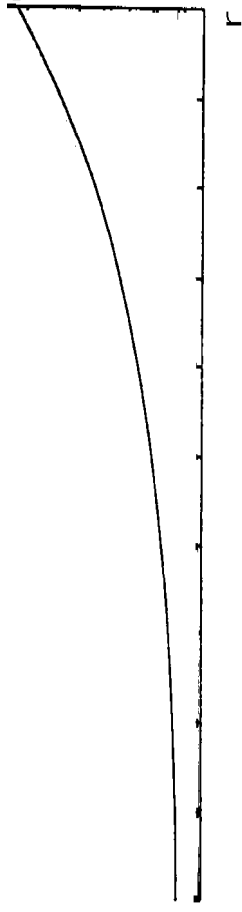
- Bei Abhängigkeit aller Größen vom Verhältnis  $\frac{x}{t}$  : Skalierung des Profils der Strömung.
- Voraussetzung:  
Abhängigkeit der Bedingungen von Größen, aus denen sich keine Kombination von der Dimension einer Länge oder Zeit bilden läßt.
- Konsequenz:  
Dichte, Druck nehmen für jedes Gaselement mit der Zeit ab: nichtstationäre Verdünnungswelle.

Ähnlichkeitsströmung



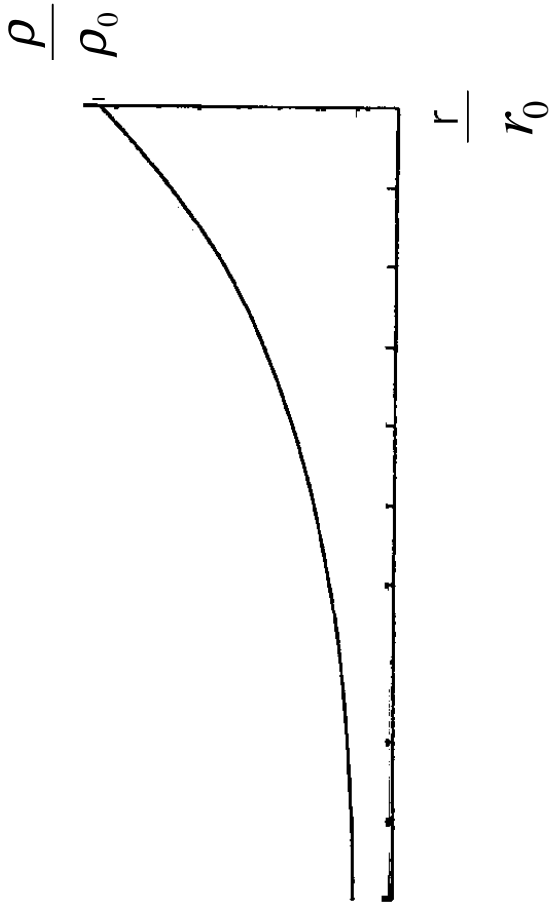
Dichteprofil zur Zeit  $t_1$

Ähnlichkeitsströmung



Zu einer späteren Zeit  $t_2$

## Ähnlichkeitsströmung



Darstellung des Profils in auf die Werte an der Stoßfront normierten Variablen:  
wegen der Skalierungseigenschaft zu allen Zeiten gleiche Form

# Sedov - Lösung

- Annahme: starker Stoß in ruhendem dünnen Gas.
- Abhängigkeit der Strömung nur von  $r_0$ ,  $t$ ,  $\rho_1$  und  $E$ :  
Ähnlichkeitsströmung mit Skalierungsgesetz

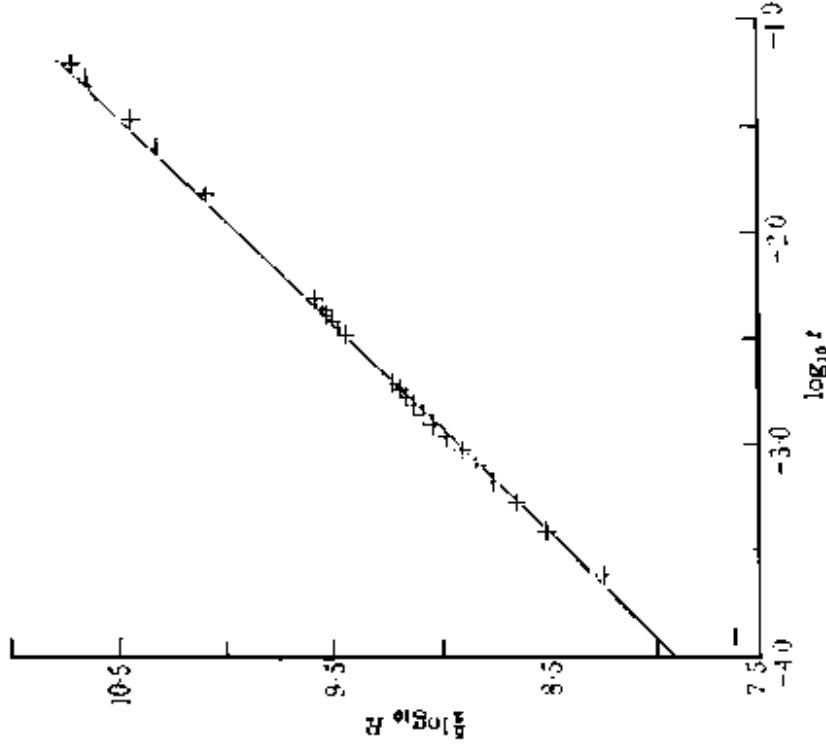
$$\xi = r \left( \frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{\frac{1}{5}} = \text{const.}$$

- Ort des Stoßes

$$r_0 = \xi_0 \left( \frac{Et^2}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{5}}$$

Geschwindigkeit

$$u_1 = \frac{2}{5} \xi_0 \left( \frac{E}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}} = \frac{2r_0}{5t}$$



## Sedov - Lösung

- Größen hinter dem Stoß

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$v_2 = \frac{2u_1}{\gamma+1} \propto t^{-3/5} E^{1/5}$$

$$P_2 = 2 \frac{\rho_1}{\gamma+1} u_1^2 \propto t^{-6/5} E^{2/5}$$

- Speziell  $\gamma = 4/3$ :

$$\rho_2 = 7\rho_1$$

$$v_2 = \frac{6}{7} v_1$$

$$P_2 = \frac{6}{7} \rho_1 u_1^2$$

## Sedov - Lösung

Herleitung des Profils hinter dem Stoß erfolgt aus den Gleichungen für kugelsymm. adiabatische Strömung

$$\partial_t v + v \partial_r v = -\frac{1}{\rho} \partial_r p \quad (\partial_t + v \partial_r) \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = 0$$

$$\partial_t \rho + \partial_r (\rho v) + \frac{2\rho v}{r} = 0$$

unter Einführung dimensionsloser Größen

$$v = \frac{4}{5(\gamma+1)} \frac{r}{t} v' \quad \rho = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho' \quad P = \frac{8\rho_1}{25(\gamma-1)} \left( \frac{r}{t} \right)^2 P'$$

mit den Randbedingungen

$$v' = P' = \rho' = 1 \quad \text{für } \xi = \xi_0$$

## Sedov - Lösung

- Energiebilanz für das Gasvolumen innerhalb des Stoßes:

Abfluß

$$dt 4\pi r^2 \rho v \left( w + \frac{v^2}{2} \right)$$

Zufluß durch Volumenvergrößerung

$$dt 4\pi r^2 \rho v_n \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right)$$

- Gleichsetzen liefert unter Berücksichtigung der thermodyn. Relationen ein Integral des Gleichungssystems

$$\frac{P'}{\rho'} = \frac{(\gamma + 1 - 2v')v'^2}{2\gamma v' - \gamma - 1}$$

## Sedov - Lösung

- Damit wird das Gleichungssystem zu

$$\frac{dv'}{d \ln \xi} + \left( v' - \frac{\gamma+1}{2} \right) \frac{d \ln \rho'}{d \ln \xi} = -3v' \quad \frac{d}{d \ln \xi} \left( \ln \frac{p'}{\rho'^{\gamma}} \right) = \frac{5(\gamma+1) - 4v'}{2v' - (\gamma+1)}$$

- Nach gewissen Rechnungen ergibt sich

$$\left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^5 = v'^2 \left[ \frac{5(\gamma+1) - 2(3\gamma-1)v'}{7-\gamma} \right]^v \left[ \frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma-1} \right]^\eta$$

$$\rho' = \left[ \frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma-1} \right]^\lambda \left[ \frac{5(\gamma-1) - 2(3\gamma-1)v'}{7-\gamma} \right]^\chi \left[ \frac{\gamma+1-2v'}{\gamma-1} \right]^\delta$$

$$v = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)} \quad \eta = -\frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1} \quad \lambda = \frac{3}{2\gamma+1}$$

$$\chi = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(2-\gamma)(3\gamma-1)(2\gamma+1)} \quad \delta = \frac{1}{\gamma-2}$$

## Sedov - Lösung

Die Position des Stoßes bestimmt sich aus der Energieerhaltung

$$E = \int_0^{r_0} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) 4\pi r^2 dr$$

woraus die Bedingung für  $\xi_0$  folgt

$$\xi_0^5 \frac{32\pi}{25(\gamma^2 - 1)} \int_0^1 (\xi^4 \rho' v'^2 + \xi^9 p') d\xi = 1$$

für  $\gamma = 7/5$ :  $\xi_0 = 1,033$

4/3:  $\xi_0 = 0,995$

## Sedov - Lösung

- Damit gilt für das Verhalten für kleine  $\xi$ :

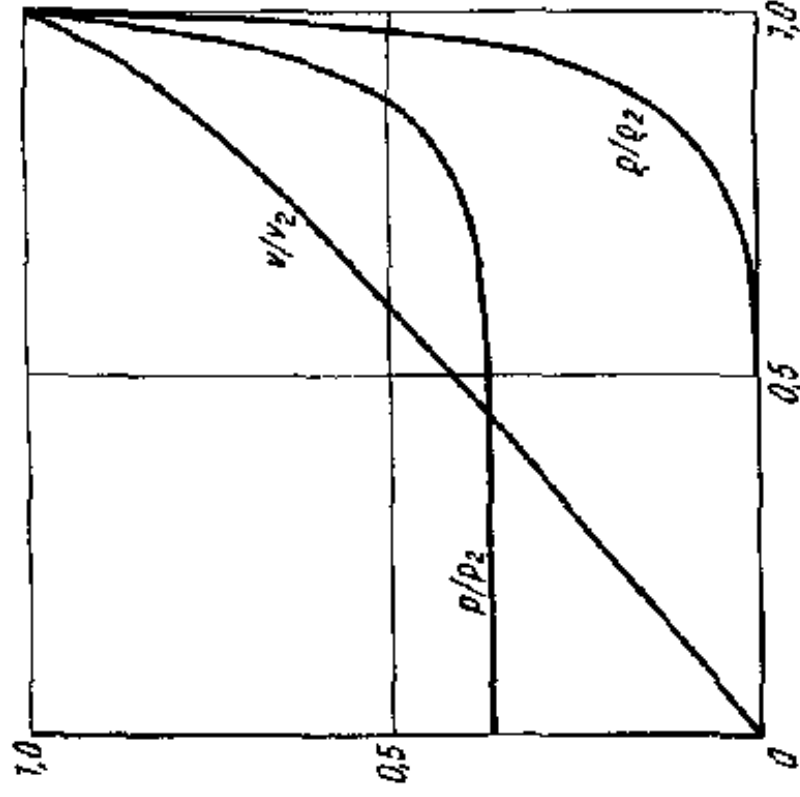
$$\frac{v}{v_2} \cong \frac{r}{r_0} \quad \frac{\rho}{\rho_0} \cong \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\overline{\gamma}-1}$$

Dichte und Geschwindigkeit gehen gegen Null, der Druck gegen einen konstanten Wert, das Verhältnis der Temperaturen gegen unendlich.

- Aufgrund des raschen Abfalls der Dichte gegen den Explosionsort ist fast die gesamte Masse hinter dem Stoß konzentriert.

# Sedov - Lösung

Profil einer Sedov-Strömung im homogenen Gas



## Sedov – Lösung: Verallgemeinerung

- Annahme eines Potenzgesetzes für die Anfangsdichte:

$$\rho_1 = Ar^{-\omega}$$

- Damit ändert sich das Stoßausbreitungsgesetz zu

$$r_0 = \xi_0 \left( \frac{E}{A} \right)^{1/(5-\omega)} t^{2/(5-\omega)}$$

$$\partial_t r_0 \propto t^{\frac{\omega-3}{5-\omega}}$$

- Der Stoß beschleunigt also für  $3 < \omega < 5$

## Sedov – Lösung: Verallgemeinerung

- Von  $\omega$  hängen auch  $\xi_0$ , die Verteilung von E auf interne und kinetische Energie und die Form der Dichte- und Druckverteilungen hinter dem Stoß ab.
- Hohe  $\omega$  begünstigen kinetische Energie deutlich

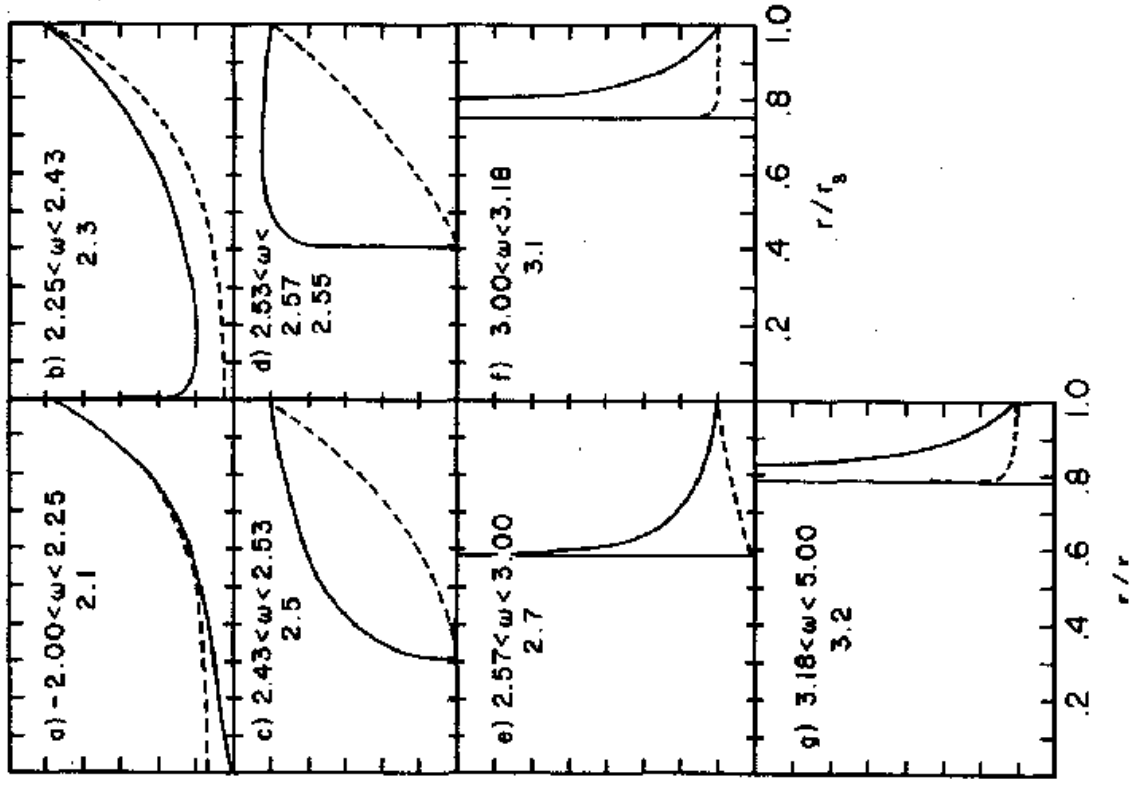
TABLE 1

$\gamma = 4/3$  BLAST WAVES SOLUTIONS FOR INITIAL  $\rho \propto r^{-\omega}$

$\omega$	$\beta_1$	$E_{\text{int}}(\%)$	$r_0/r_2$
-2	2.08	86.7	0
-1	1.47	84.2	0
0	0.974	80.3	0
1	0.571	74.0	0
1.5	0.405	68.9	0
2.0	0.262	61.2	0
2.3	0.185	54.2	0
17/7	0.153	50.0	0
2.5	0.135	47.1	0.308
2.7	0.0834	35.4	0.578
3.0	0.0145	8.70	0.728
3.2	$2.15 \times 10^{-3}$	1.68	0.779
4.9	$1.44 \times 10^{-2}$	$7.49 \times 10^{-6}$	0.915

## Sedov – Lösung: Verallgemeinerung

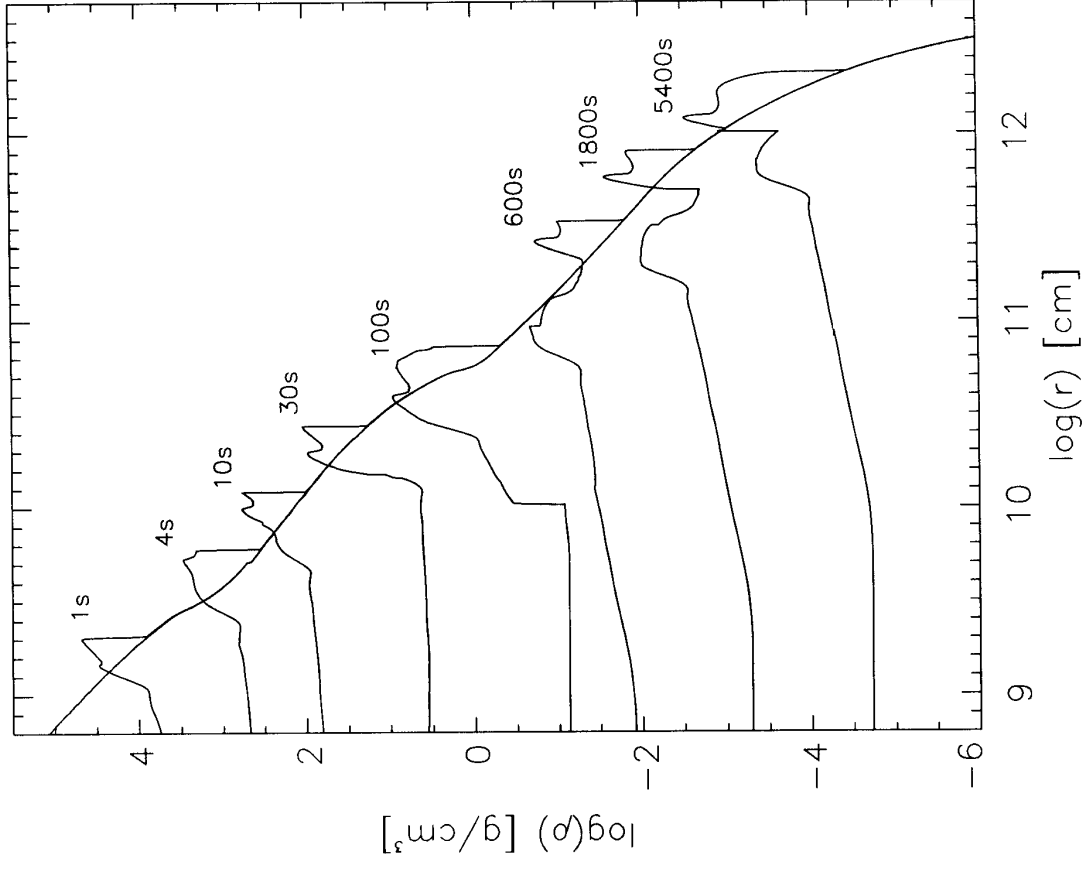
- Für  $\omega > (7-\gamma)/(\gamma+1) = 2,43$  verschwindet die Dichte (gestrichelt, durchgezogen: Druck) gegen das Zentrum hin, für  $\omega > 2,53$  steigt  $\rho$  hinter dem Stoß an und für  $\omega > 2,57$  ergibt sich ein ausgeprägtes Maximum.
- Durch Queren von Regionen mit  $\omega > 2,53$  und  $\omega > 2,57$  kann es zum Ausstoßen von Schalen kommen.



## Sedov – Lösung: Verallgemeinerung

Durchlauf einer Stoßwelle  
durch einen Stern:

Abbremsung und  
Beschleunigung je nach  
Druckabfall,  
Entstehen von potentiell  
Rayleigh-Taylor -  
instabilen Nebenmaxima



## Rayleigh-Taylor – Instabilität

- Sei gegeben die Grenzfläche ( $z = 0$ ) zweier Fluide (oben: 2, unten: 1) unterschiedlicher Dichten senkrecht zur Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$
- Störung der Dichte um  $\delta\rho$
- Damit gelten die Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung sowie die Konstanz der Dichte eines Elements im mitbewegten System (Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$ ):

$$\partial_i u_i = 0$$

$$\rho \partial_t u_i = -\partial_i \delta p + \partial_k p_{ik} - g_i \delta \rho$$

$$\partial_i \delta p + u_i \partial_i \rho = 0$$

$p_{ki}$  der Spannungstensor

## Rayleigh-Taylor – Instabilität

- Lösungen mit  $x, y, t$  – Abhängigkeit der Form

$$\exp(ik_x x + ik_y y + nt)$$

erlauben die Konstruktion der allgemeinen Lösung

- Damit findet man eine Dispersionsrelation  $n(k_x, k_y)$ , die die Bedingungen für stabile Entwicklung der Störungen zu bestimmen gestattet:  $n$  imaginär
- Speziell ohne Viskosität gilt ( $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ )

$$\partial_z (\rho \partial_z u_z) - \rho k^2 u_z = - \left( \frac{k}{n} \right)^2 g (\partial_z \rho) u_z$$

mit der Randbedingung  $u_z = 0$  auf der Grenze der Fluide

## Rayleigh-Taylor – Instabilität

Für zwei Fluide konstanter Dichten  $\rho_1, \rho_2$  folgt

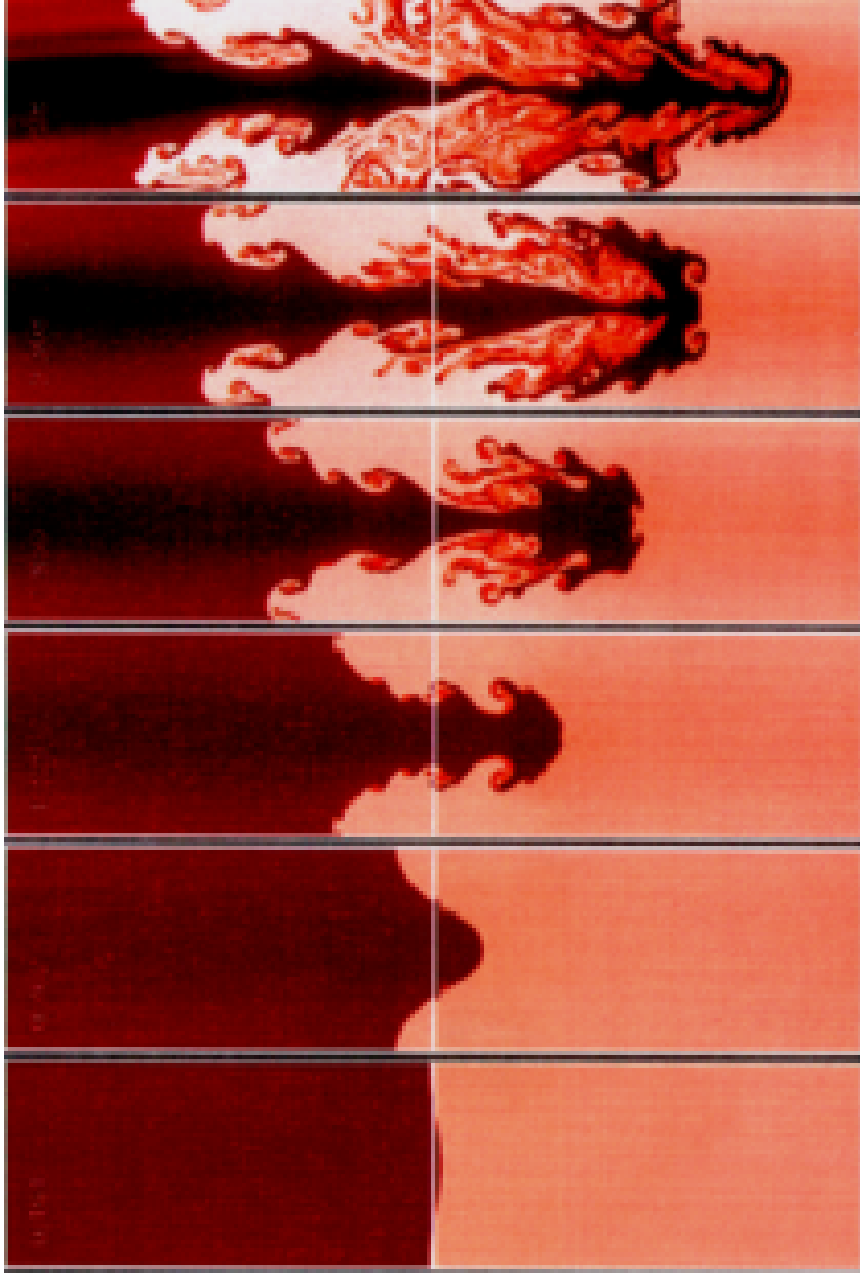
$$(\partial_z^2 - k^2)u_z = 0$$

Die resultierende Dispersionsrelation ist

$$n^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

- Stabilität für  $\rho_2 < \rho_1$ , d. h. falls die schwerere Flüssigkeit unten, d. h. in Richtung der Kraft, liegt ansonsten Instabilität; unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung auch dann noch für hohe Wellenzahlen stabil.

## Rayleigh-Taylor – Instabilität



Simulation einer RT-Instabilität

## Rayleigh-Taylor – Instabilität

- Über eine Höhe  $d$  exponentiell variierende Dichte

$$\rho = A e^{\beta z}$$

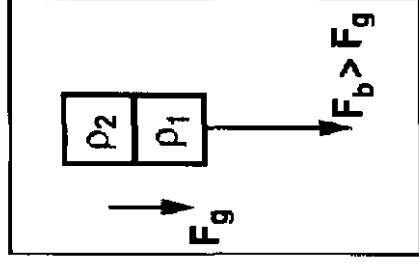
Dispersionsrelation (m eine natürliche Zahl)

$$\frac{g\beta}{n^2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\beta^2 d^2 + m^2 \pi^2}{k^2 d^2}$$

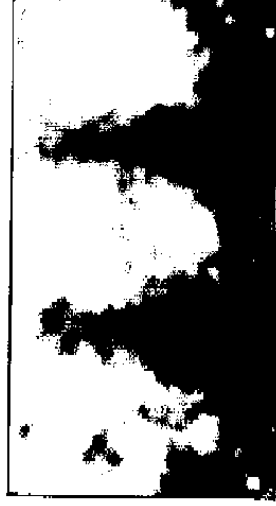
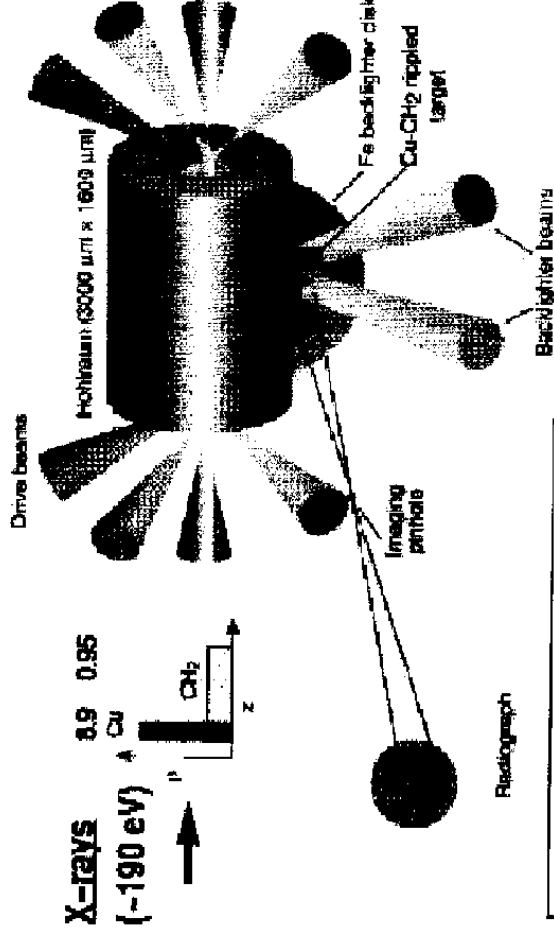
- Stabilität für  $\beta < 0$  (nach oben fallende Dichte)  
Instabilität für  $\beta > 0$  (Antiparallelität von Kraft und Dichtegradient)
- Analog zur nach unten gerichteten Gravitation ist eine Beschleunigung des Fluids nach oben. Dann: Instabilität für Parallelität von Beschleunigung und Dichtegradient.

# Rayleigh-Taylor – Instabilität

Überprüfung in Fallturmexperimenten und mit Laserexperimenten



Supernova-relevant hydrodynamic instability experiments on the NOVA laser (Kane et.al., ApJ 478 (1997), L75)



Nonlinear RT growth in NOVA experiment

## Rayleigh-Taylor – Instabilität

- Bei Beschleunigung durch einen Druckgradienten tritt dieser an die Stelle von  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g} \rightarrow -\frac{1}{\rho} \partial_r P$$

- Instabilität bei Beschleunigung parallel zum Dichtegradienten, also für unterschiedliches Vorzeichen von Druck- und Dichtegradient.

Für diesen Fall lautet das RT-Kriterium

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{P}} < \frac{1}{\gamma}$$

mit  $\mathcal{P} = \partial_r \ln P$  Druckskalenhöhe  
 $\mathcal{R} = \partial_r \ln \rho$  Dichteskalenhöhe

## Rayleigh-Taylor – Instabilität

Ob es zur Ausbildung der Instabilitäten kommt, hängt vom Verhältnis der relevanten Zeitskalen ab: hydro. Zeitskala

$$\tau_{hydro} = \frac{r_{Sto\beta}}{u_{Sto\beta}}$$

Anwachszeitskala

$$\tau_{RT} \approx \frac{\gamma}{c_S} (\Pi^2 - \gamma \Pi R)^{-1/2}$$

nur für  $\tau_{RT} < \tau_{hydro}$  kann die Explosion durch RT-Instabilitäten nennenswert beeinflusst werden

# Literatur

- L. Landau, E. Lifschitz:  
Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI
- A. R. Choudhuri:  
The Physics of Fluids and Plasmas
- S. Chandrasekhar  
Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability
- R. Chevalier  
The Hydrodynamics of Type II Supernovae (ApJ 207,  
1976)
- R. Chevalier, N. Soker  
Asymmetric Envelope Expansion of Supernova 1987A  
(ApJ 341, 1989)

## Literatur

- R. Bandiera  
Convective Supernovae (Astr and Ap 139, 1984)
- C. Matzner, C. McKee  
The Expulsion of Stellar Envelopes in Core-Collaps  
Supernovae (1999, ApJ 510)
- E. Müller  
Skript zur Hydrodynamik - Vorlesung