

# Thermonukleare Brennfronten

14.6.2002

1. Supernovae 1A (Überblick)
2. Deflagration
3. Detonation
4. Vergleich Deflagration - Detonation
5. Instabilität der Flammenfront
  - 5.1 Landau-Darrieus-Instabilität
  - 5.2 Rayleigh-Taylor-Instabilität
6. Übergang Deflagration – Detonation

# 1. Supernovae 1A (Überblick)

Weißer Zwerge akkretieren Masse, bis sie die Chandrasekhar-Masse

$$M_C \approx 1,4M_S$$

Verbrennen von Kohlenstoff setzt ein

Weißer Zwerg verbrennt von innen nach außen

Alle SN 1A sind sehr ähnlich

⇒ der Verbrennungsmechanismus ist in allen SN 1A der gleiche

Es existieren zwei Formen der Verbrennung: Detonation und Deflagration

Reine Detonation scheidet aus, da der Weiße Zwerg zu Ni verbrennen würde, aber in den Überresten auch mittelschwere Kerne gemessen wurden

⇒ Deflagration oder Mischung aus beiden

## 2. Deflagration

Ursache für Verbrennung ist der Wärmetransport  
Zone 2 (verbranntes Gas) → Zone 1 (unverbranntes Gas)

$$\Rightarrow \delta \propto \sqrt{\chi\tau} \quad \delta = \text{Flammendicke}$$
$$\chi = \text{Temperaturleitfähigkeit}$$
$$\tau = \text{Reaktionsdauer}$$

$$\Rightarrow v_1 \propto \frac{\delta}{\tau} \propto \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{c} \propto \sqrt{\frac{\chi}{\tau c^2}} \propto \sqrt{\frac{\tau_{fr}}{\tau}}$$

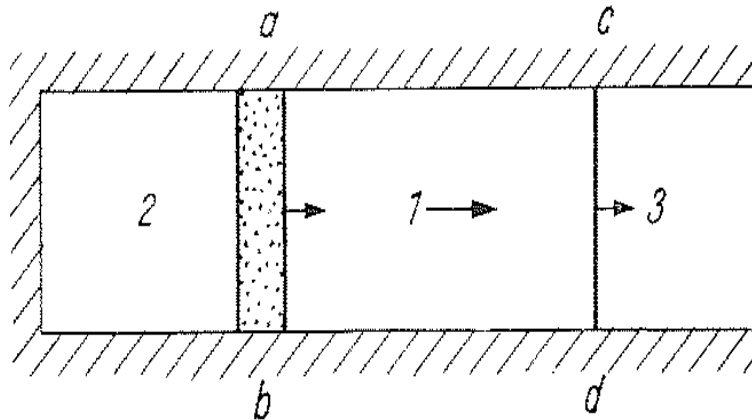
d.h., Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_1 \ll c$

Flammenfront kann als Unstetigkeitsfläche angesehen werden

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{V_1}{V_2} ; \quad p_1 = p_2 ; \quad w_1 = w_2$$

$$w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1 ; \quad w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2 \quad q = w_{01} - w_{02}$$

$$\Rightarrow p_1 = p_2 \quad T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}}T_1 \quad V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left( \frac{q}{c_{p1}T} + 1 \right)$$



Flammenfront (ab) bewegt sich relativ zum Gas 1/2 mit  $u_{1/2}$

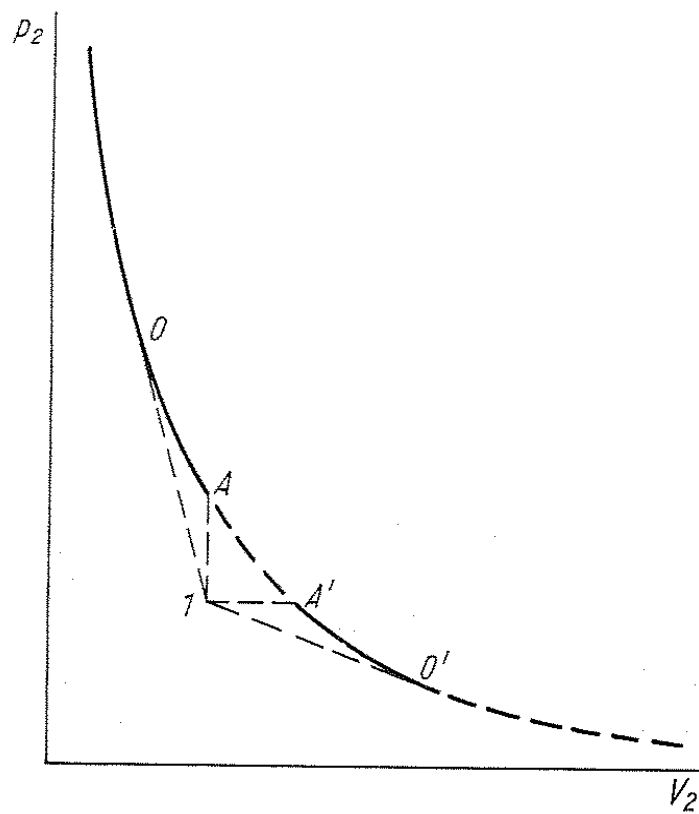
Flamme schiebt Gas 1 mit  $u_{Gas1} = u_2 - u_1$  vor sich her

Randbedingungen: Gas muss am Rohranfang und –ende in Ruhe sein

⇒ Ausbildung einer Stoßwelle (cd), die zu einem Sprung in der Strömungsgeschwindigkeit führt



## 4. Vergleich Deflagration – Detonation



Oberhalb O	$v_1 > c$	$v_2 < c$	Detonation
Abschnitt AO	$v_1 > c$	$v_2 > c$	
Abschnitt A'O'	$v_1 < c$	$v_2 < c$	Deflagration
Unterhalb O'	$v_1 < c$	$v_2 > c$	

## 5. Instabilität der Flammenfront

### 5.1 Landau-Darrieus-Instabilität

dominant auf kleinen Skalen

Flammenfront wird durch eine kleine, periodische Funktion  $\zeta$  gestört

$$\frac{\delta(\bar{v} + \bar{v}')}{\delta t} + ((\bar{v} + \bar{v}')\nabla)(\bar{v} + \bar{v}') = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + p')$$

Bewegungsgleichungen (linearisiert in der Störung):

$\bar{v}'$  ist die Störung ;  $\bar{v} = const$

$$div\bar{v}' = 0 \quad ; \quad \frac{\delta v}{\delta t} + (\bar{v}\nabla)v' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' \quad (\text{Euler-Gleichung})$$

$$\Delta p' = 0; \quad p'_1 = p'_2$$

tangentiale Geschwindigkeitskomponente muss stetig sein

$$v'_{1y} + v_1 \frac{\delta \zeta}{\delta y} = v'_{2y} + v_2 \frac{\delta \zeta}{\delta y}$$

außerdem bleibt die Normalkomponente unverändert

$$v'_{1x} - \frac{\delta \zeta}{\delta t} = v'_{2x} - \frac{\delta \zeta}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \omega_{LD} = ku_{lam} f(\mu), \text{ mit } \mu = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad f(\mu) = \frac{1}{1+\mu} \left( \sqrt{1-\mu + \frac{1}{\mu}} - 1 \right)$$

unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten

$$\omega_{LD} = ku_{lam} (f(\mu) - h(\mu, l_{th}, l_r, Le) kl_{th})$$

h stabilisiert Flamme

kritische Wellenlänge  $l_{crit}$ , bei der die LD-Instabilität einsetzt

$$l_{crit} = 4\pi l_{th} \frac{h}{f} \quad ; \quad l_{crit} \approx 10 - 100 \cdot l_{th}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u(l) = u_{lam} \left( \frac{l}{l_{crit}} \right)^{e_{cell}} \quad ; \quad e_{cell} \approx 0,1$

## 5.2 Rayleigh-Taylor-Instabilität

wird durch Gravitation hervorgerufen, da verbranntes und unverbranntes Material unterschiedliche Dichten besitzt und in Schichten angeordnet ist

Blasenbildung setzt ein, wodurch die Verbrennung turbulent wird

die Gravitation modifiziert die Stetigkeitsbedingung für den Druck

$$p_1 - p_2 = -g(\rho_2 - \rho_1)\zeta$$

$$\Rightarrow \omega_{RT}^2 = kg \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\frac{\delta v}{\delta t} = \rho^{-1} \left( (\rho_1 - \rho_2) g \frac{4\pi}{3} r^3 - C_D \left( \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) v \right) \pi r^2 v \right) = 0$$

$$\Rightarrow v_{RT} = B \sqrt{g_{eff} r} \quad B \in [0,466; 0,490]$$

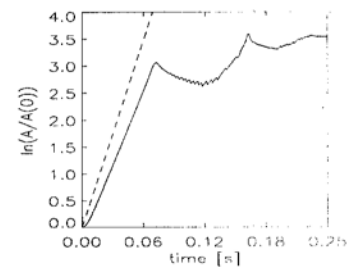
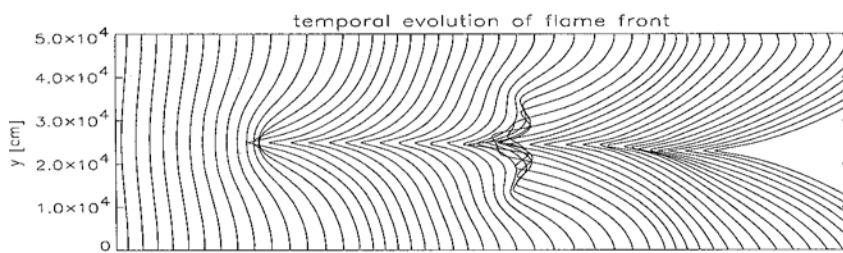
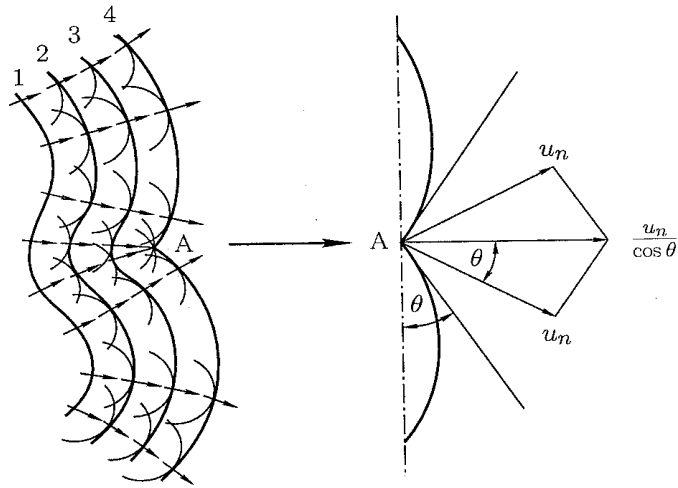
$$\Rightarrow v_{RT}(l) \propto l^{\frac{1}{2}}$$

# Nichtlineare Stabilisierung über das Huygensche Prinzip

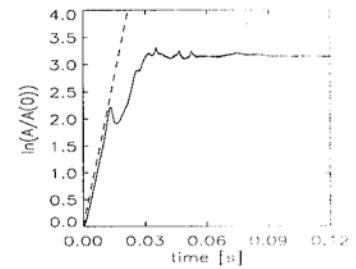
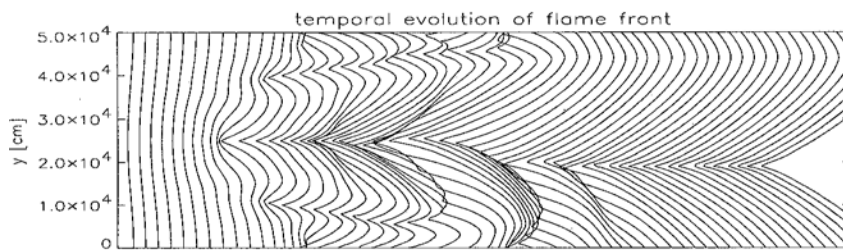
$$\left(\frac{\delta A}{\delta t}\right)_{nl} = -u_{lam} \left( (\cos \vartheta)^{-1} - 1 \right) \approx -u_{lam} \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \vartheta \approx \frac{4A}{\lambda} = \frac{2Ak}{\pi}$$

$$\frac{\delta A}{\delta t} = ku_{lam} f(\mu) A - \frac{2}{\pi^2} k^2 u_{lam} A^2$$

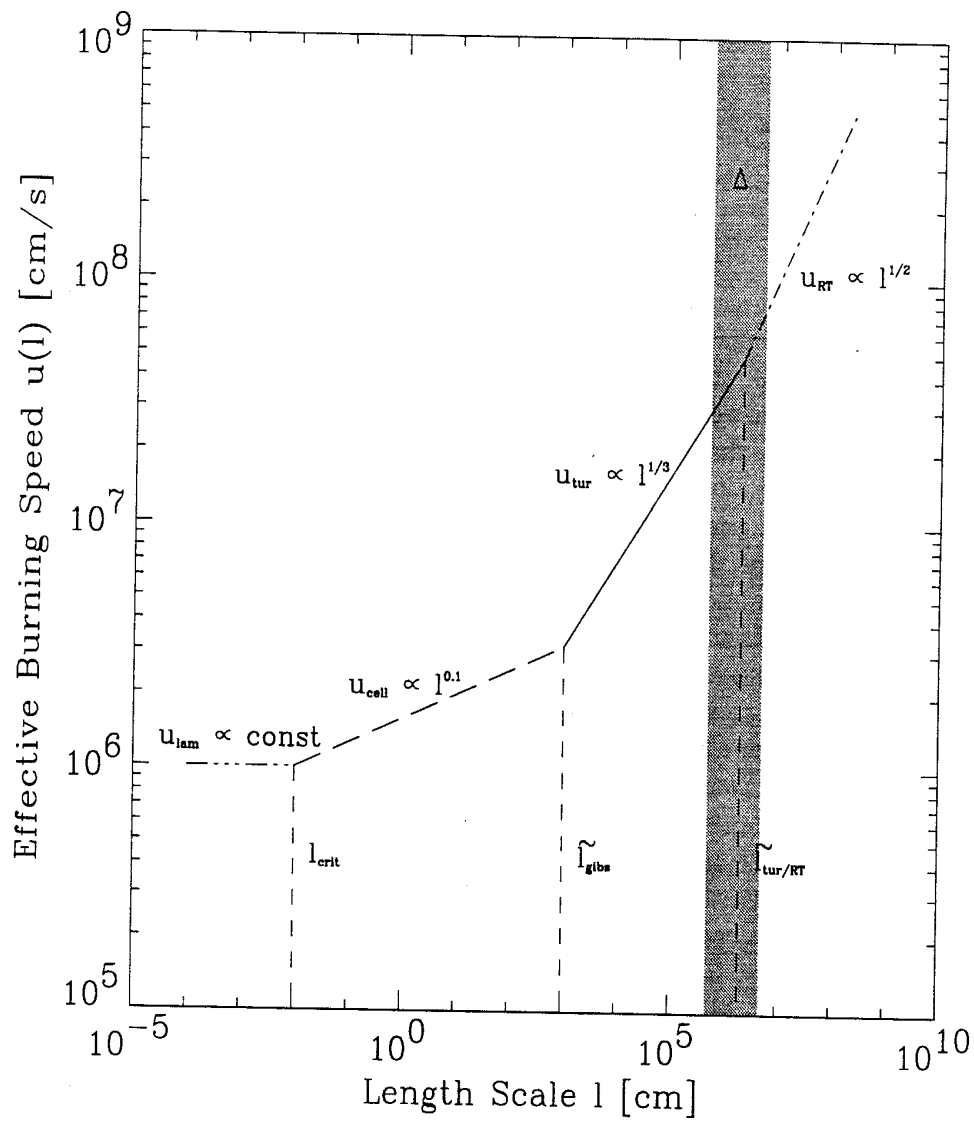
$$\Rightarrow A_{Stat} = \frac{\pi}{4} f(\mu) \lambda$$



a)



b)



## 6. Übergang Deflagration - Detonation

Flamme wird lokal ausgelöscht

Homogenes Gemisch mit einem konstanten Temperaturgradienten  
entsteht

Flamme durchläuft Gradienten  $\Rightarrow$  Detonation

Dichte des Gemisches  $\rho \approx 10^7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Problem:

benötigter Durchmesser des Gemisches  $\gg$  Flammenfront