Advisorseminar Kosmische Explosionen

Thema:

Strahlungstransport

gehalten von

Marius Gieseler

am

21. Juni 2002

Betreuer

Markus Rampp

1) Kurze Motivation

2) Definition einiger Grundgrößen

3) Definition von Opazität und Emissivität

4) Strahlung im thermischen Equilibrium

5) Transport – und Momentengleichung(en)

6) Diffusion und Strahlungslimit

Was ist Strahlungstransport und warum wird es gemacht ?

- Strahlungstransport beschreibt die Ausbreitung von Strahlung (Photonen, Neutrinos, etc…) in Medien unter Berücksichtigung von Wechselwirkungen mit dem Medium

- Man versucht an hand von Simulationen – d.h. in der Regel dem numerischen Lösen von Transportgleichung(en) – und durch Vergleich mit Messdaten (wie Lichtkurven, Spektren,…) mehr über den Aufbau und das Verhalten von Sternen bzw. bei (Super-) Novae über deren Explosionsmechanismen zu erfahren.

- Durch Variation der „Umgebungsbedingungen“, wie Zustandsgleichungen, Ansätze für Opazitäten, Dichte und Radius des Sterns, usw., werden verschiedene Lichtkurven numerisch berechnet.

- Im allgemeinen besteht eine Kopplung zwischen den Transportgleichung(en) und den Entwicklungsgleichungen für das Medium (z.B. Hydrodynamik)

Spezifische Intensität I

$$\delta E = I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu)(dS \cos\alpha) d\nu \cdot dt$$

- Mit δE als Strahlungsenergie im
- Frequenzintervall $(\nu, \nu + d\nu)$, die
- in einer Zeit dt in einen
- festen Raumwinkel $d\Omega$ durch
- das Flächenelement $d\mathbf{S}$ abgegeben wird, welches mit
- der Propagationsrichtung $\mathbf{n}$ den Winkel α bildet
- Die Einheiten von I sind $[I] = \dfrac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{hz} \cdot \mathrm{sr}}$
- Implizite Definition der Intensität, gut für eine makroskopische Sichtweise

Photonen Anzahl-Dichte ψ

- $\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu)d\nu d\Omega$ ist die Zahl der Photonen pro Einheitsvolumen bei $(\mathbf{x},t)$, im Frequenzintervall $(\nu,\nu+d\nu)$

- Also ist die Zahl der Photonen, die mit c in einem festen Winkel $d\Omega$ um $\mathbf{n}$ fliegen und die in der Zeit dt durch $d\mathbf{S}$ fliegen

$$\psi\mathbf{n}d\mathbf{S}(cdt)d\nu d\Omega.$$

- Mit $h\nu$ als Energie eines Photons gilt

$$\delta E = ch\nu\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu)dS\cos\alpha\cdot d\Omega d\nu dt$$

- Durch Vergleich erhält man

$$I(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu) = ch\nu\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu)$$

Photonen Verteilungsfunktion f_R

- Die Verteilungsfunktion ist so definiert, dass $f_R(\mathbf{x},t;\mathbf{n},p)d^3p$ die Zahl der Photonen pro Einheitsvolumen bei $(\mathbf{x},t)$ mit Impuls $(\mathbf{p},\mathbf{p}+d\mathbf{p})=(h\nu/c)(\mathbf{n},\mathbf{n}+d\mathbf{n})$ ist

- Unter Benutzung von $d^3p=p^2dpd\Omega=(h/c)^3\nu d\nu d\Omega$ findet man folgenden Zusammenhang

$$\left(h^3\nu^2/c^3\right)f_R d\nu d\Omega=\psi d\nu d\Omega$$

bzw.

$$\psi=\frac{h^3\nu^2}{c^3}f_R$$

und

$$I=\frac{h^4\nu^3}{c^2}f_R$$

Mittlere Intensität J

- Die *mittlere Intensität* ist die spezifische Intensität I integriert über alle festen Winkel, also:

$$J(\mathbf{x},t;\nu) = \frac{1}{4\pi}\oint I(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu)\,d\Omega$$

- Trivialerweise sind die Einheiten von J

$$[J] = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{hz}}$$

- In sphärisch symmetrischen Medien ist das Integral über den Azimuthalwinkel ϕ trivial, da I unabhängig von ϕ ist. Mit $\mu \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$ und $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi = -d\mu \cdot d\phi$ folgt:

$$J_\nu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu\, d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu^0 I_\nu\, d\mu$$

- Die mittlere Intensität ist also das nullte Winkelmoment der spezifischen Intensität

Strahlungsenergiedichte

- Die *monochromatische Strahlungsenergie-Dichte* bei der Frequenz ν ist gleich (Anzahl Photonen Dichte)*(Energie eines Photons) integriert über alle Winkel

$$E(\mathbf{x},t;\nu)=h\nu\oint\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu)d\Omega$$

- Es gilt also auch

$$E_\nu=\frac{1}{c}\oint I(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu)d\Omega=\frac{4\pi}{c}J_\nu$$

Die **totale** Strahlungsenergiedichte

- Integration über die Frequenz liefert die totale Strahlungsenergiedichte

$$E=\int_0^\infty E_\nu d\nu=\frac{4\pi}{c}J$$

im Folgenden heißt „total“ integriert über alle Frequenzen

Photonen Anzahl - Fluss

- $N = \left(\oint \psi(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) c \mathbf{n} d\Omega \right) d\mathbf{S}$ ist der Photonen Anzahl Fluss durch $d\mathbf{S}$ in Richtung $\mathbf{n}$ pro Frequenzintervall und pro Zeiteinheit

Energie - Fluss

- Durch Multiplikation von N mit $h\nu$ und Umwandlung von ψ in I erhält man die Größe

$$\delta E = \left(\oint I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} d\Omega \right) d\mathbf{S}$$

Strahlungs - Energie - Fluss

- *Monochromatischer* Strahlungs - Energie - Fluss $\mathbf{F}$ ist definiert durch
  - $\mathbf{F} d\mathbf{S}$ ist die Rate des Strahlungs - Energie – Flusses, die pro Frequenzintervall durch $d\mathbf{S}$ strömt, also

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \nu) = \oint I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} d\Omega$$

beachte: der Fluss ist eine vektorielle Größe

- Die Einheiten von $\mathbf{F}$ sind

$$[F] = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{hz}}$$

- in sphärischer Geometrie wie Skalar zu behandeln!!!

$$F(z,t;\nu) = 2\pi \int_{-1}^{1} I(z,t;\mu,\nu)\mu d\mu \equiv F_\nu$$

- nach Eddington ist es nützlich zu definieren:

$$H_\nu \equiv \frac{1}{4\pi} F_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I(z,t;\mu,\nu)\mu d\mu$$

- H_ν ist das erste Winkelmoment der spezifischen Intensität

- Die Leuchtkraft L ist definiert durch

$$F \equiv \int_0^\infty F_\nu d\nu$$

$$L(r,t) = 4\pi r^2 F$$

Strahlungs – Spannungs – bzw. Druck - Tensor

- Definition: P^{ij} ist die Nettorate des Impulstransports in die i-te Richtung pro zur j-ten Koordinatenachse senkrechten Einheitsfläche.

- Die Zahl der mit Frequenz ν in j Richtung fliegenden Photonen pro Einheitsfläche und pro Zeiteinheit ist $\psi_\nu c n^j$

- Jedes Photon trägt in i Richtung den Impuls $(h\nu / c) n^i$

$\Rightarrow$

$$P^{ij} = \oint \psi(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu)(h\nu n^i / c)(c n^j) d\Omega = \frac{1}{c} \oint I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) n^i n^j d\Omega$$

- Mit sphärischer Symmetrie kann man ein paar Vereinfachungen vornehmen:

$$\mathbf{P}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_\nu - P_\nu) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(E_\nu - P_\nu) & 0 \\ 0 & 0 & P_\nu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_\nu & 0 & 0 \\ 0 & P_\nu & 0 \\ 0 & 0 & P_\nu \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3P_\nu - E_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 3P_\nu - E_\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- E_ν ist die Strahlungsenergiedichte und P_ν ist der Skalar:

$$P_\nu = \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{1} I(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu)\mu^2 d\mu = \left(\frac{4\pi}{c}\right)\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu \mu^2 d\mu \equiv \frac{4\pi}{c}K_\nu$$

- K_ν ist das zweite Winkelmoment der spezifischen Intensität

- Bei sphärischer Geometrie wird P_ν oft als „der“ Strahlungsdruck bezeichnet

- Ist das Strahlungsfeld zusätzlich isotrop, so geht $P_\nu \to \frac{1}{3}E_\nu$

- Man kann also – bei Isotropie - einen mittleren Druck definieren

$$\overline{P}_\nu = \frac{1}{3} P_\nu^{ii} = \frac{1}{3} E_\nu$$

- Dies ist das dasselbe Ergebnis, wie man es für Materie-Teilchen erhält!

- Für Strahlung können die Elemente P_{xx} und P_{yy} (oder P_{zz}) merklich verschieden sein! Insbesondere an den Grenzen eines Objektes

- Wird aber die spezifische Intensität I als isotrop angenommen, so nimmt der Drucktensor die vorher erwähnte Form an.

- Dieser Fall ist wichtig, da er mit sehr hoher Genauigkeit auf 99% eines Sternes zutrifft (insbesondere auf das Innere)

Eddington Faktor

$$f_\nu \equiv P_\nu / E_\nu = \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\mu^2 d\mu \,/ \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu) d\mu$$

- In einer Dimension ist dieser Faktor geeignet, um die Asymmetrie des Strahlungsfeldes zu beschreiben,

- Dieser Faktor liefert eine Abschlussbedingung für die Strahlungsmomentengleichungen (siehe später).

- im Inneren gilt obige Beziehung zwischen P und E; also $f = 1/3$

- an Systemgrenzen kann der Faktor durch die Chapman-Enskog Lösung berechnet werden

- gibt es zwei oder drei Dimensionen, so wird der Eddingtonfaktor zum Eddingtontensor

$$\mathbf{f}_\nu \equiv \mathbf{P}_\nu / E_\nu$$

Opazität & „Emissivität“

- Opazität χ : Diese ist dadurch definiert, dass ein Materieelement der Länge dl mit
- Querschnittsfläche dS
- dem Strahl in Richtung $\mathbf{n}$ in einen festen Winkel $d\Omega$
- in einer Zeit dt folgenden Energiebetrag entnimmt:

$$\delta E = \chi(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) dl dS d\Omega d\nu dt$$

- die Einheiten sind $[\chi] = cm^{-1}$

$\Rightarrow$ Mittlere freie Weglänge eines Photons mit Frequenz ν

$$\lambda_\nu \equiv \frac{1}{\chi_\nu}$$

- Die Opazität ist im Wesentlichen die Summe $\sum_i n_i \alpha_i$, wobei n_i die Anzahldichte des Teilchentyps i ist, welche Strahlung mit der Frequenz ν und dem Wirkungsquerschnitt α_i absorbieren oder streuen kann.

- Emissivität η : Die Emissivität ist ähnlich zur Opazität definiert: ein Materie - Volumenelement mit $dldS$ emittiert
- im Frequenzintervall $(\nu, \nu + d\nu)$
- in Richtung $\mathbf{n}$ in einen festen Winkel $d\Omega$
- in einer Zeit dt folgenden Energiebetrag:

$$\delta E = \eta(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) dldSd\Omega d\nu dt$$

- Die Einheiten sind:

$$[\eta] = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{hz} \cdot \mathrm{sr}}$$

- Für beide Größen gelten folgende Überlegungen:

- Ist das Material in Ruhe und auf mikroskopischen Skalen homogen, so sind χ und η isotrop.

- Selbiges gilt für ein mitbewegtes Bezugssystem im Falle sich bewegenden Materials

- Im Laborsystem liegt eine Anisotropie vor, da die Frequenzen und Winkel durch den Dopplereffekt aneinander gekoppelt sind

- Dies führt zu immensen Komplikationen bei der Berechnung in sich bewegenden Medien

- Man rechnet daher oft in mitbewegten Bezugssystemen

Streu und Absorptions-/Emissionsprozesse

- Man unterscheidet häufig zwischen *thermischen Absorptions- und Emissionsprozessen* und *Streuung*

- Bei den thermischen Prozessen besteht eine lokale Kopplung zwischen der Strahlung und dem Zustand des Mediums.

- Als Beispiel eines solchen Prozesses sei nur die Anregung eines Atoms durch ein Photon und die Abregung durch elastische Kollision z.B. mit einem Elektron erwähnt. Natürlich gilt auch der umgekehrte Prozess!

- Es findet also zwischen Strahlung und thermischer Energie des Materiegases ein Austausch statt

- Bei Streuprozessen wird die Richtung und/oder Frequenz eines Photons geändert. D.h. die Emissionsrate ist nicht alleine an den thermischen Zustand gekoppelt

- Zwei typische Beispiele sind Thomsonstreuung für Photonen geringer Energie und Comptonstreuung für Photonen mit der Energie $E_\gamma \approx m_e$. Letztere führt zu großen Veränderungen in der Photonenenergie

Strahlung im TE

- Betrachten wir nun das wichtige Beispiel: Strahlung im thermischen Equilibrium

$$I_\nu^* \equiv B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} / \left(e^{h\nu/kT} - 1\right) \text{ (Planck – Funktion)}$$

(*-Größen seien Größen im TE)

- Im lokalen thermischen Equilibrium LTE gilt $T = T(x)$

- Offensichtlich ist I_ν^* isotrop; also $\mathbf{F}_\nu^* \equiv 0$ im Inneren. Zur Erinnerung: der monochromatische Energieflux $\mathbf{F}$ ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \nu) = \oint I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu)\mathbf{n}\, d\Omega$$

- Die monochromatische Energiedichte im TE ist:

$$J_\nu^* = I_\nu^* \Rightarrow E_\nu^* = \frac{4\pi}{c} B_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} / \left(e^{h\nu/kT} - 1\right)$$

- Auch hier zur Erinnerung: mittlere Intensität J:

$$J_\nu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu \, d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu^0 I_\nu \, d\mu$$

- die totale Energiedichte ist somit:

$$E^*(T) = \int_0^\infty E_\nu^* d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = a_R T^4$$

- Die integrierte Planckfunktion ist:

$$B(T) = \frac{c}{4\pi} E^*(T) = \frac{a_R c}{4\pi} T^4 = \frac{\sigma_R}{\pi} T^4$$

- Den Fluss, der aus dem Hohlraum <u>austritt</u> ist:

$$F = 2\pi \int_0^1 B_\nu(T) \mu d\mu = \pi B_\nu(T)$$

also:

$$F = \pi B(T) = \sigma_R T^4$$

- für den Druck im TE gilt, wie oben erwähnt:

$$P^* = \frac{1}{3} E^* = \frac{1}{3} a_R T^4$$

- man sieht: im Falle des thermischen Equilibriums ergeben sich gerade die aus der Statistik bekannten Formeln für die oben angegebenen Größen!

Transportgleichung (phänomenologische Ableitung)

- in einem Materieelement mit Volumen $dsdS$
- ist die Energiemenge, die bei $(\mathbf{x}, t)$ eintritt und
- bei $(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t + \Delta t)$ austritt
- durch die Absorptionen und Emissionen gegeben, also:

$$[I(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t + \Delta t; \mathbf{n}, \nu) - I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu)] dS d\Omega d\nu dt = \Delta ds dS d\Omega d\nu dt$$

mit

$$\Delta \equiv [\eta(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu)]$$

- setzt man $\Delta t = ds / c$ und entwickeln I in eine Taylorreihe so erhält man:

$$I(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) = I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial s} \right) ds$$

- durch Einsetzen erhält man:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) = \Delta$$

- in kartesischen Koordinaten ist

$$\frac{\partial}{\partial s} = \mathbf{n} \vec{\nabla}$$

also gilt:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \vec{\nabla} \right) I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) = \eta(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu)$$

- durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\mathbf{n}'^{k} d\Omega / 4\pi$ und k+1-facher Integration über alle Winkel erhält man jeweils das k-te Moment der Transportgleichung

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n}\vec{\nabla}\right) I(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu) = \eta(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu) - \chi(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu) I(\mathbf{x},t;\mathbf{n},\nu)$$

- hier sind die ersten zwei Gleichungen interessant, da nun in diesen Gleichungen der Energiedichte, Energiefluss und der Drucktensor auftauchen.

- Allgemein kriegt man so eine unendliche Reihe von Momentengleichungen.

- Beschränkt man sich auf n Gleichungen, benötigt man eine Schließbedingung, die zwei Momente miteinander verknüpft. Der Eddingtonfaktor ist eine solche Bedingung

Diffusion & Strahlungslimit

- vereinfacht gesagt gibt es in Sternen (und Supernovae) drei Bereiche. Zwei lassen sich durch Grenzfälle annähern

- im Diffusionsbereich ist es so, dass die mittlere freie Weglänge der Strahlung sehr viel kleiner ist, als die Größe des Systems

- D.h. es liegt ein optisch Dichtes Medium vor bzw. eine Große optische Tiefe. Daraus resultieren viele Streu- bzw. Absorptions- und Emissionsprozesse. Diese Nährung trifft auf einen Großteil eines Sterns zu.

- Der andere Grenzfall ist das Strömungslimit. In diesem Fall ist die mittlere freie Weglänge eines Photons seht viel größer als die Größe des Systems.

- In diesem Bereich ist das Medium dann natürlich optisch dünn und es finden so gut wie keine Streuprozesse statt. Die in diesem Bereich emittierten Photonen nehmen wir wahr.

- Für den Zwischenbereich gibt es keinen einfachen Grenzfall und man sieht sich gezwungen vollen Transport zu rechnen.